



Златопольский Дмитрий Михайлович

Кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и прикладной математики Московского городского педагогического университета; организатор и директор Музея истории вычислительной техники.

О заданиях 11 ЕГЭ по информатике

В статье описывается эффективный, по мнению автора, метод выполнения заданий 11 ЕГЭ по информатике и ИКТ.

В Спецификации контрольных измерительных материалов для проведения в 2020 году Единого государственного экзамена по информатике и ИКТ в качестве проверяемого элемента содержания для задания 11 указывается «умение исполнить рекурсивный алгоритм».

Напомним, что «рекурсивными»¹ называют процедуры или функции,

которые используют (вызывают) как вспомогательную саму себя.

В качестве примера приведём функцию для расчёта факториала натурального числа n (факториал числа n , обозначаемый $n!$, равен $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$). Такую функцию можно создать, имея в виду, что $n! = (n - 1)! \times n$. На школьном алгоритмическом языке соответствующая функция имеет вид:

```

алг цел Факториал (арг цел  $n$ )
нач
    знач := Факториал( $n - 1$ ) *  $n$            | Рекурсивный вызов
                                           | функции Факториал
    | Служебное слово знач означает "значение функции"
кон
  
```

На самом деле эта функция оформлена не по правилам, и при выполнении программы появится сообщение об ошибке. Дело в том,

что при каждом вызове вспомогательной функции (или процедуры) для неё отводится место в оперативной памяти, которое «освобождает-

¹) От латинского *recursio* – возвращение.

ся» после завершения её (функции/процедуры) работы. Но если во вспомогательной процедуре имеется рекурсия, то вызовы вспомогательных подпрограмм будут продолжаться до тех пор, когда место в памяти будет исчерпано. Чтобы

устранить этот недостаток, необходимо так оформлять функции (процедуры), чтобы рекурсивные вызовы осуществлялись по условию, которое когда-то станет ложным. Например, для приведённой функции это условие записывает так:

```
алг цел Факториал(арг цел n)
нач
  если n > 1
  то
    |Рекурсивный вызов функции Факториал
    знач := Факториал(n - 1) * n
  иначе |Известное значение
    знач := 1
  все
кон
```

или

```
алг цел Факториал(арг цел n)
нач
  если n = 1
  то
    знач := 1
  иначе
    знач := Факториал(n - 1) * n
  все
кон
```

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, использующий рекурсию, может быть описан

$$F(1) = 10$$

$$F(n) = F(n - 1) + 3 \text{ при } n > 1$$

или

$$F(1) = 10$$

$$F(n) = F(n - 1) + 3 \text{ при } n > 1$$

$$F(n) = 0 \text{ при } n < 1$$

или

$$F(12) = 5$$

по-другому – с указанием двух или более вариантов значения, например, в виде:

$$F(n) = F(n + 1) - 1 \text{ при } n < 12$$

или

$$F(n) = 25 \text{ при } n > 12$$

$$F(12) = 5$$

$$F(n) = F(n + 1) - 1 \text{ при } n < 12$$

и т. п.

Видно, что в двух первых случаях рекурсивные вызовы осуществляются с меньшими значениями аргумента, в остальных – с большими. Во всех случаях когда-то рекурсивные вызовы прекратятся (убеди-

тесь в этом!) и начнётся передача результатов в «вызывающую» функцию.

Пример работы программы при вычислении значения факториала числа 4 показан на рис. 1 – 2.

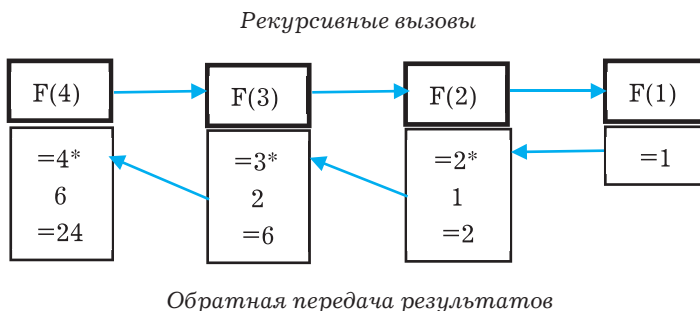


Рис. 1

F(n)	F(4)	F(3)	F(2)	F(1)
Значение функции	24 ← 4 × 6	6 ← 3 × 2	2 ← 2 × 1	1
n	4	3	2	1

Рис. 2

Ответ: 24.

Как правило, задания 11 ЕГЭ рекомендуют выполнять, используя (в том или ином виде) дерево вызовов. Имеется также origi-

нальный метод¹, который опишем на примере задания из демонстрационного варианта экзамена 2019 года.

¹ К сожалению, не удалось установить, кто его автор.

Условие

Ниже записан рекурсивный алгоритм F.

Алгоритмический язык	Паскаль
алг F(цел n) нач если n > 0 то F(n - 1) вывод n F(n - 2) все кон	procedure F(n: integer); begin if n > 0 then begin F(n - 1); write(n); F(n - 2) end end ;

Запишите подряд без пробелов и разделителей все числа, которые будут напечатаны на экране при выполнении вызова F(4). Числа должны быть записаны в том же порядке, в котором они выводятся на экран.

Методика решения

1. Составляется таблица, иллюстрирующая работу вызова функции F(4) (сначала для большей ясности приводим её несколько громоздкой):

Функция F(n)	Вызывается функция	На экран выводится	Вызывается функция	Общий результат выполнения
F(4)	F(3)	4	F(2)	
F(3)	F(2)	3	F(1)	
F(2)	F(1)	2	F(0)	
F(1)	F(0)	1	F(-1)	
F(0)	—	—	—	

Видно, что вызываемые функции не рисуются, а «выписываются».

2. Заполняется последний столбец последнего «сработавшего» вызова (F(1)):

Функция F(n)	Вызывается функция	На экран выводится	Вызывается функция	Общий результат выполнения
F(4)	F(3)	4	F(2)	
F(3)	F(2)	3	F(1)	
F(2)	F(1)	2	F(0)	
F(1)	F(0)	1	F(-1)	1
F(0)	—	—	—	—

(Конечно, заполняется всё та же таблица.)

3. Заполняется последний столбец предпоследнего вызова с использованием уже известного результата вызова функции F(1):

Функция F(n)	Вызывается функция	На экран выводится	Вызывается функция	Общий результат выполнения
F(4)	F(3)	4	F(2)	
F(3)	F(2)	3	F(1)	
F(2)	F(1) 1	2	F(0)	12
F(1)	F(0)	1	F(-1)	1
F(0)	—	—	—	—

Можно результат вызова функции F(1) записывать сразу в последний столбец (не записывая его во второй).

4. Заполняется следующая (при просмотре снизу вверх) строка:

Функция F(n)	Вызывается функция	На экран выводится	Вызывается функция	Общий результат выполнения
F(4)	F(3)	4	F(2)	
F(3)	F(2) 12	3	F(1) 1	1231
F(2)	F(1) 1	2	F(0)	12
F(1)	F(0)	1	F(-1)	1
F(0)	—	—	—	—

5. И ещё одна:

Функция F(n)	Вызывается функция	На экран выводится	Вызывается функция	Общий результат выполнения
F(4)	F(3) 1231	4	F(2) 12	1231412
F(3)	F(2) 12	3	F(1) 1	1231
F(2)	F(1) 1	2	F(0)	12
F(1)	F(0)	1	F(-1)	1
F(0)	—	—	—	—

Итак, ответ: **1231412**.

Задание 11 из демонстрационного варианта ЕГЭ 2020 года

Ниже на пяти языках программирования записан рекурсивный алгоритм F.

Бейсик	Python
SUB F(n) PRINT n, IF n >= 3 THEN F(n \ 2) F(n - 1) END IF END SUB	def F(n): print(n, end='') if n >= 3: F(n // 2) F(n - 1)

Алгоритмический язык	Паскаль
алг F(цел n) нач вывод n если n >= 3 то F(div(n, 2)) F(n - 1) все кон	procedure F(n: integer); begin write(n); if n >= 3 then begin F(n div 2); F(n - 1) end end ;
C++	
<pre>void F(int n) { std::cout << n; if (n >= 3) { F(n / 2); F(n - 1); } }</pre>	

Запишите подряд без пробелов и разделителей все числа, которые будут выведены на экран при выполнении вызова F(5). Числа должны быть записаны в том же порядке, в котором они выводятся на экран.

Решение

Таблица для получения ответа имеет вид (здесь полезно предусмотреть столбец со значениями n):

n	Функция F	На экран выводится	Вызывается функция $F(n \text{ div } 2)$	Вызывается функция $F(n - 1)$	Общий результат выполнения
5	F(5)	5	F(2)	F(4)	5242312
4	F(4)	4	F(2)	F(3)	42312
3	F(3)	3	F(1)	F(2)	312
2	F(2)	2	—	—	2
1	F(1)	1	—	—	1

Если в условии задания требуется определить сумму напечатанных на экране чисел или общее количество напечатанных на экране символов (например, “*”), то после аналогичного заполнения таблицы находится соответствующая сумма.

Задание 11 из демонстрационного варианта ЕГЭ 2014 года**Условие**

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(1) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

Решение

$$F(n) = F(n - 1) + 2 \times F(n - 2) \text{ при } n > 2$$

Чему равно значение функции $F(7)$?

В ответе запишите только натуральное число.

n	Функция F	Вызывается функция $F(n - 1)$	Вызывается функция $F(n - 2)$	Результат выполнения
7	$F(7)$	$F(6)$ 11	$F(5)$ 11	$21 + 11 \times 2 = 43$
6	$F(6)$	$F(5)$ 5	$F(4)$ 5	$11 + 2 \times 5 = 21$
5	$F(5)$	$F(4)$ 3	$F(3)$ 3	$5 + 2 \times 3 = 11$
4	$F(4)$	$F(3)$ 2	$F(2)$ 1	$3 + 2 \times 1 = 5$
3	$F(3)$	$F(2)$ 1	$F(1)$ 1	$1 + 2 \times 1 = 3$
2	$F(2)$			1
1	$F(1)$			1

Ответ: 43.

Задание 11 из демонстрационного варианта ЕГЭ 2016 года**Условие**

Ниже на двух языках програм-

мирования записаны две рекурсивные функции¹ (процедуры): F и G .

Алгоритмический язык	Паскаль
<pre> алг F(цел n) нач если n > 0 то G(n - 1) все кон алг G(цел n) нач вывод "*" если n > 1 то F(n - 3) все кон </pre>	<pre> procedure F(n: integer); begin if n > 0 then G(n - 1) end; procedure G(n: integer); begin write('*'); if n > 1 then F(n - 3) end; </pre>

¹) Так в условии, поскольку там используются и другие языки программирования. Заметим также, что каждая из функций/процедур вызывает себя не непосредственно, а через вызов другой. Такая рекурсия называется «косвенной».

Сколько символов «звёздочка» будет напечатано на экране при выполнении вызова $F(11)$?

Решение

Здесь в задании фигурируют две процедуры (функции), поэтому составляются две таблицы:

n	Функция F	Вызывается функция $G(n-1)$	Функция G	На экран выводится (количество символов)	Вызывается функция $F(n-3)$	Общее количество выведенных символов
11	$F(11)$	$G(10)$				
10	$F(10)$		$G(10)$	1	$F(7)$	$2 + 1 = 3$
9	$F(9)$		$G(9)$			
8	$F(8)$		$G(8)$			
7	$F(7)$	$G(6)$	$G(7)$			
6	$F(6)$		$G(6)$	1	$F(3)$	$1 + 1 = 2$
5	$F(5)$		$G(5)$			
4	$F(4)$		$G(4)$			
3	$F(3)$	$G(2)$	$G(3)$			
2	$F(2)$		$G(2)$	1	$F(-1)$	1
1	$F(1)$		$G(1)$	—	—	—
0	$F(0)$	—				

Ответ: 3.

Эффективность описанного метода автор предлагает оценить вам, уважаемые читатели.

Задания для самостоятельной работы учащихся

1¹. Ниже на двух языках программирования записан рекурсивный алгоритм F .

Алгоритмический язык	Паскаль
алг $F(\text{цел } n)$ нач если $n > 2$ то вывод $n, \text{ нс}$ $F(n - 3)$ $F(n - 4)$ все кон	procedure $F(n: \text{integer});$ begin if $n > 2$ then begin $\text{writeln}(n);$ $F(n - 3);$ $F(n - 4);$ end end;

¹⁾ Задание из демонстрационного варианта ЕГЭ 2017 года.

Чему равна сумма напечатанных на экране чисел при выполнении вызова $F(10)$?

2. Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$F(1) = 2$ при $n \leq 2$;

$F(n) = 3 \times F(n - 1) + F(n - 2)$ при

$n > 2$.

Чему равно значение функции $F(8)$?

В ответе запишите только натуральное число.

3¹. Ниже на двух языках программирования записан рекурсивный алгоритм F :

Алгоритмический язык	Паскаль
алг $F(\text{цел } n)$ нач если $n > 0$ то вывод $n, \text{ нс}$ $F(n - 3)$ $F(\text{div}(n, 3))$ все кон	procedure $F(n: \text{integer});$ begin if $n > 0$ then begin $\text{writeln}(n);$ $F(n - 3);$ $F(n \text{ div } 3)$ end end;

Запишите подряд без пробелов и разделителей все числа, которые будут напечатаны на экране при

выполнении вызова $F(9)$. Числа должны быть записаны в том же порядке, в котором они выводятся на экран.

4. Ниже на двух языках программирования записаны две рекурсивные процедуры: F и G .

Алгоритмический язык	Паскаль
алг $F(\text{цел } n)$ нач вывод $***$ если $n < 5$ то $G(n - 1)$ все кон алг $G(\text{цел } n)$ нач если $n < 4$ то $F(n + 2)$ все кон	procedure $F(n: \text{integer});$ begin $\text{write}('***');$ if $n < 5$ then $G(n - 1)$ end; procedure $G(n: \text{integer});$ begin if $n < 4$ then $F(n + 2)$ end;

Сколько символов «звёздочка» будет напечатано на экране при выполнении вызова $F(2)$?

¹) Задание из демонстрационного варианта ЕГЭ 2018 года.