

Информатика

Златопольский Дмитрий Михайлович

*Кандидат технических наук,
доцент кафедры информатики и прикладной
математики Московского городского
педагогического университета.*



Неутомимая гусеница, или Ещё раз о гармонических числах

В статье приводится один из занимательных примеров использования так называемых «гармонических чисел».

В №1 за 2013 год журнала «Потенциал» читатели познакомились с гармоническими числами – суммами

вида $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ при це-

лом $n \geq 1$. С их помощью решалась задача, связанная с игральными картами. В данной статье описывается ещё одна задача, в которой мы имеем дело с гармоническими числами.

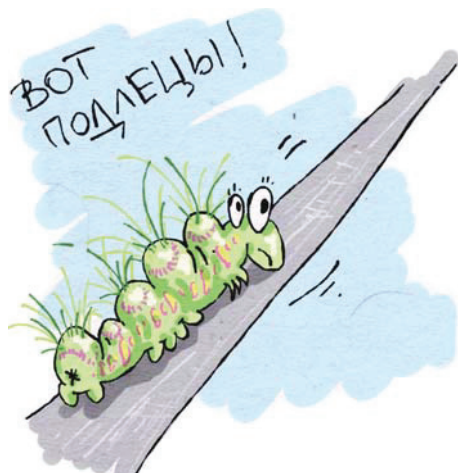
Гусеница ползёт по куску резины, стремясь достичь противоположного конца. Ползёт она со скоростью 1 см в минуту. Кусок имеет длину 7 см и может растягиваться до любой длины. Через минуту вы вытягиваете резину ещё на 7 см (т. е. она стала длиной 14 см). Гусеница прочно держится на поверхности и продолжает двигаться, пока вы тянете резину. Она ползёт всё с той же скоростью. Ещё через минуту вы снова вытягиваете резину так, что её первоначальная

длина утраивается (т. е. она становится равной 21 см). Гусеница продолжает ползти, а вы продолжаете каждую минуту тянуть резину, в четвёртый раз уже удлинив её в четыре раза. Доберётся ли гусеница когда-нибудь до конца резины, ведь каждую минуту длина последней существенно увеличивается?



Оказывается, ответ – положительный! Чтобы подтвердить это, прежде всего заметим, что существует формула для вычисления количества слагаемых в сумме, приведённая в начале статьи, при котором достигается некоторое заданное число. Предположим, нужно узнать, сколько слагаемых (их называют членами гармонического ряда) нужно взять, чтобы получить в сумме N . Возьмите число 2,71828 и умножьте его само на себя N раз, а затем разделите ответ на 1,781. Значение, полученное в результате, и будет числом членов гармонического ряда, необходимым для получения в сумме N . Итак, нужная нам формула:

$$\frac{2,71828^N}{1,781}.$$



Теперь вернёмся к гусенице (☺) и разберёмся, что же происходит при её движении. За первую минуту наша «путешественница» проползла 1 см, то есть $1/7$ длины пути. В течение следующей минуты она проползает ещё 1 см, что составит $1/14$ длины резины. Таким образом, в общей сложности пройдено $1/7 + 1/14$ длины резины, что можно переписать в виде: $(1 + 1/2)/7$. После удлинения резины до 21 см гусеница

преодолеет ещё 1 см, что составит $1/21$ часть длины. Теперь гусеница в общей сложности проползла $(1 + 1/2 + 1/3)/7$ часть общего пути.

Нетрудно понять, что за t минут гусеница проползёт:

$(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/t)/7$ часть пути. Здесь явно просматривается гармонический ряд. Значит, чтобы приведённое только что выражение стало равно $7/7 = 1$ (то есть был достигнут конец резины), нужно, чтобы гармоническое число в скобках было равно 7. Вспомнив о формуле для расчёта суммы слагаемых, мы можем сказать, что гусеница доберётся до «финиша»

через $t = \frac{2,71828^7}{1,781}$ минут. Для

расчётов можно использовать электронную таблицу Microsoft Excel или разработать компьютерную программу. В первом случае формула для расчёта такая:

$$=EXP(7)/1,781.$$

В языках программирования для расчёта значений $2,71828^n$, как правило, имеется функция *exp* (*exp*(n)).

Расчёты показывают, что в рассматриваемом случае гусеница пройдёт весь путь примерно за 10 часов 26 минут, что является неплохим результатом (☺).

Задание для самостоятельной работы. Разработав компьютерную программу (на языке программирования, который вы изучаете) или используя электронную таблицу Microsoft Excel, определите, через какое время гусеница доберётся до «финиша», если первоначальная длина резины равна:

- 10 см;
- 15 см;
- 20 см.

Заметим сразу, что в двух последних случаях время «путешествия» будет измеряться годами...