



Златопольский Дмитрий Михайлович
 Кандидат технических наук, доцент,
 член редколлегии журнала «Информатика в школе»,
 организатор и директор
 музея истории вычислительной техники.

Красивые узоры таблицы Пифагора

Оказывается, что обыкновенная таблица с числами может превращаться в очень красивые изображения. В данной статье рассказывается, как это можно сделать.

На обложках многих школьных тетрадей можно увидеть таблицу чисел (см. рис. 1).

Таблица Пифагора									
	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	4	6	8	10	12	14	16	18	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	

Рис. 1

Что это за таблица – понятно (в ней представлены произведения всех пар чисел от 2 до 9). Но почему она называется «таблица Пифагора»?

Дело в том, что эта таблица умножения была приведена в сочинении Никомaha Геразского (I – II вв. н.э.) «Введение в арифметику». Правда, вместо десятичной системы счисления и арабских цифр в ней использовалась древнегреческая (ионийская) система нумерации, в которой для записи чисел использовались буквы существовавшего тогда алфавита. Так вот, по словам Никомaha, эта таблица восходит «к самому Пифагору».

Таблицу Пифагора можно расширять вправо и вниз до бесконечности, соблюдая единственное условие: каждое число таблицы есть произведение номера строки и номера столбца, в которых оно стоит.

Таблица умножения скрывает в себе много замечательных математических закономерностей, поиск которых способен превратиться в увлекательное занятие.

тельное занятие, сулящее немало сюрпризов [1]. К такому занятию автор и приглашает читателей.

Конечно, будем использовать возможности компьютера, в частности, разработаем программы на языке Паскаль.

Начнём с программы для вывода таблицы Пифагора в виде:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис. 2

Для этого удобно использовать оператор установки места вывода на экран `GotoXY`. Но при этом надо найти связь между координатами вывода и значениями i и j . Номер строки (второй параметр указанного оператора) равен j . С номером «столбца» (первый параметр) сложнее. Для установления нужной зависимости составим таблицу:

j	1	2	3	...
Номер «столбца»	1	4	7	

Из нее видно, что:

номер «столбца» = $(j - 1) * 3 + 1$,
или короче:

номер «столбца» = $j * 3 - 2$.

(Убедитесь в правильности приведенных формул.)

Вся программа решения задачи имеет вид:

```
Uses CRT;
var i, j: byte;
BEGIN
for i := 1 to 9 do
  for j := 1 to 9 do
    begin
```

```
      gotoXY(j * 3 - 2, i);
      write(i * j)
    end
  END.
```

Задания для самостоятельной работы

1. Разработайте программу, в результате выполнения которой на экран будет выведена таблица Пифагора размером 9 на 9, при этом чётные произведения оформлены одним цветом, а нечётные – другим.

Можно каждое число таблицы Пифагора изобразить каким-либо символом (например, «*»), причём цвет символа будем устанавливать в зависимости от свойств того или иного числа.

2. Разработайте программу, в результате выполнения которой на экран будет выведено следующее:

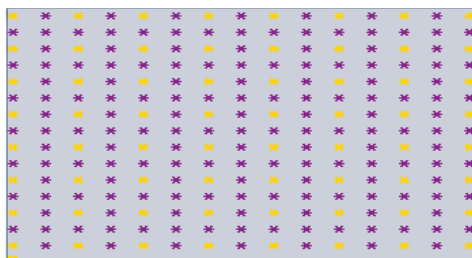


Рис. 3

Примечание. «Пустот» между символами ни по горизонтали, ни по вертикали на рис. 3 нет.

Ещё более красивые изображения можно получить, если моделировать каждое число таблицы Пифагора цветным квадратом. Для этого следует использовать графический режим. Напомним, что в программе на языке Паскаль рисование прямоугольника (а квадрат является прямоугольником) осуществляется с помощью процедуры `Rectangle`. Её общий вид:

`Rectangle(x1, y1, x2, y2);`

где x_1, y_1 – координаты левого верхнего угла прямоугольника, x_2, y_2 – координаты правого нижнего угла. Стороны прямоугольника рисуются текущим (последним установленным) цветом линий, а прямоугольник «заливается» текущим цветом заливки.

Условимся каждое число представлять на экране в виде квадрата размером 10 пикселей.

Установим зависимость между числами – множителями таблицы Пифагора и координатами квадрата, соответствующего той или иной паре этих чисел. Иными словами, определим, где на экране должен изображаться квадрат, соответствующий произведению чисел i (число – множитель по горизонтали таблицы) и j (число – множитель по вертикали). Для этого сначала оформим такую таблицу:

	Квадрат 1					Квадрат 2					Квадрат 3					...
1	1	2	...	9	10	11	12	...	19	20	21	22	...	29	30	31
	2															
	...															
	9															
	10															
2	11															
	12															
	...															
	19															
	20															
3	21															
	22															
	...															
	29															
	30															
...	31															

Обозначим число – множитель по горизонтали таблицы Пифагора – i , число – множитель по вертикали – j . Тогда можем составить следующую таблицу с координатами левого верхнего и правого нижнего углов квадратов:

		i			
		1	2	3	...
j	1	(1,1) – (10,10)	(11,1 – 20,10)	(21, 1 — 30, 10)	
	2	(1,11) – (10,20)	(11,11 – 20,20)	(21, 11 — 30, 20)	
	3	(1,21) – (10,30)	(11,21 – 20,30)	(21, 21 — 30, 30)	
	...				

из которой следует, что для каждого квадрата искомые зависимости такие:

$$x1 = i * 10 - 9$$

$$y1 = j * 10 - 9$$

$$x2 = i * 10$$

$$y2 = j * 10$$

Это означает, для числа, равного произведению i (число по горизонтали таблицы) на j (по вертикали), процедура рисования соответствующего квадрата оформляется так:

```
Rectangle(i * 10 - 9, j * 10 - 9, i * 10, j * 10)
```

Задание для самостоятельной работы

3. Разработайте программу, в результате выполнения которой на экран будет выведено следующее изображение:

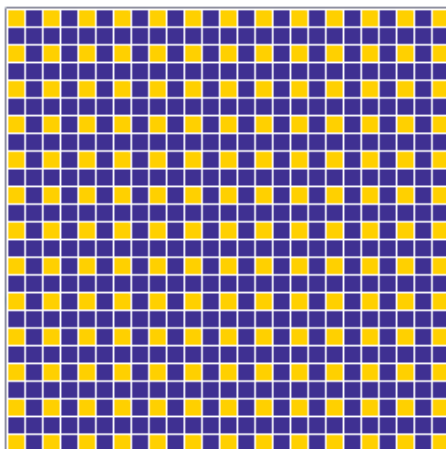


Рис. 4

Чтобы получить представление о том, как в таблице Пифагора расположены числа, дающие одинаковые остатки при делении, например, на 5, закрасим числа (точнее – квадраты, им соответствующие), дающие остатки 0, 1, 2, 3 и 4, каждое своим цветом.

Программа, решающая указанную задачу, имеет вид:

```
Uses graphABC;
var i, j, ost: byte; zvet1,
zvet2 : color;
BEGIN
for i := 1 to 30 do
  for j := 1 to 30 do
    begin
      {Определяем остаток от
      деления числа на 5}
      ost := i*j mod 5;
      {В зависимости от значения
      остатка задаем цвета}
      case ost of
        1: begin
          {Цвет линий}
          zvet1 := clYellow;
          {Цвет заливки}
          zvet2 := clYellow
        end;
        2: begin
          zvet1 := clCyan;
          zvet2 := clCyan
        end;
        3: begin
          zvet1 := clGreen;
          zvet2 := clGreen
        end;
        4: begin
          zvet1 := clRed;
          zvet2 := clRed
        end;
        0: begin
          zvet1 := clBrown;
          zvet2 := clBrown
        end
      end; {case}
      {Устанавливаем цвета рисования}
      SetPenColor(zvet1);
      SetBrushColor(zvet1);
      {Рисуем соответствующий квадрат}
      Rectangle(i * 10 - 9, j * 10 - 9, i * 10, j * 10)
    end
  end
END.
```

Примечание. Приведена программа на языке PascalABC.net.

Как это ни удивительно, но в результате таблица Пифагора оказывается расчленённой на совершенно одинаковые по расцветке квадраты (рис. 5).

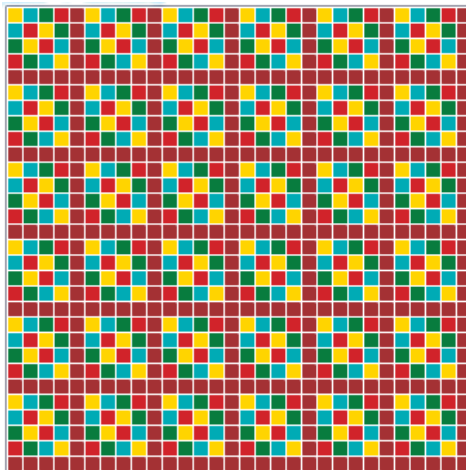


Рис. 5

Аналогичное разбиение получается при делении чисел таблицы на любое другое натуральное число k , в чём легко убедиться, заменив в программе число 5 на него. Предлагаем читателям разработать соответствующую программу.

Благодаря свойству периодичности таблицы Пифагора по остаткам на экране возникают разнообразные мозаики. Очевидно, чем больше k , тем больше будет остатков ost , тем больше потребуется цветов. Чтобы узоры не были слишком пёстрыми, ограничимся, например, тремя цветами. Для этого остатки сгруппируем по модулю 3, то есть первым цветом закрасим числа таблицы с остатками 1, 4, 7, 10, ..., вторым – числа с остатками 2, 5, 8, 11, ... а третьим – числа, кратные 3. Результат для случая $k = 13$ показан на рис. 6.

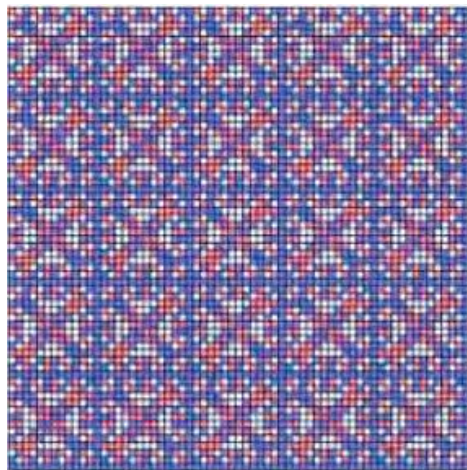


Рис. 6

Задание для самостоятельной работы

4. Разработайте программу для получения изображения на рис. 6.

Ещё один вариант трёхцветных мозаик приведён на рис. 7. Здесь для большей симметрии одинаковым цветом закрашены не только числа с одинаковым остатком ost , но и числа с остатком, дополняющим ost до k ($k = 16$).

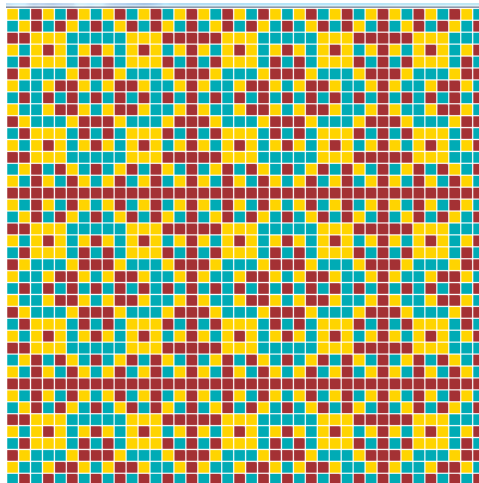


Рис. 7

Задание для самостоятельной работы

5. Разработайте программу для получения изображения на рис. 7.

Интересные мозаики возникают и тогда, когда красят не все числа, а выборочно. Например, узор на рис. 8 получен при $k = 23$ в случае закраски разными цветами только трёх групп чисел:

- 1) для которых остаток от деления произведения на 23 равен 1 или 22;
- 2) для которых остаток от деления произведения на 23 равен 11 или 12;
- 3) для которых остаток от деления произведения на 23 равен 5 или 18.

Остальные числа (соответствующие им квадраты) закрашиваются каким-то четвёртым цветом.

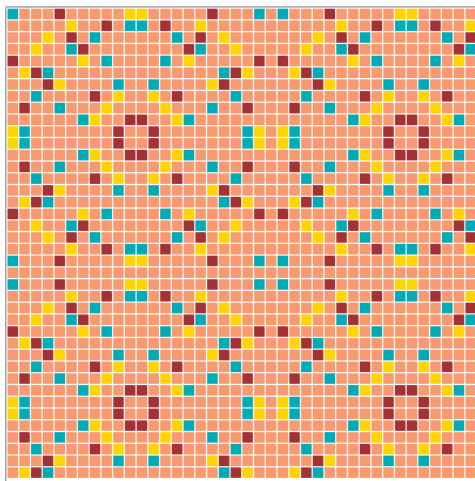


Рис. 8

Задание для самостоятельной работы

6. Разработайте программу для получения изображения на рис. 8.

Кружевной двуцветный узор на рис. 9 возникает, если во всей таблице закрасить одинаковым цветом только числа, дающие остатки, сравнимые с одним и тем же натуральным числом. В данном случае $k = 31$, а закрашиваются только числа, удовлетворяющие условию:

$$i * j \bmod 31 \bmod 3 = 2$$

Остальные числа (соответствующие им квадраты) закрашиваются каким-то другим цветом.

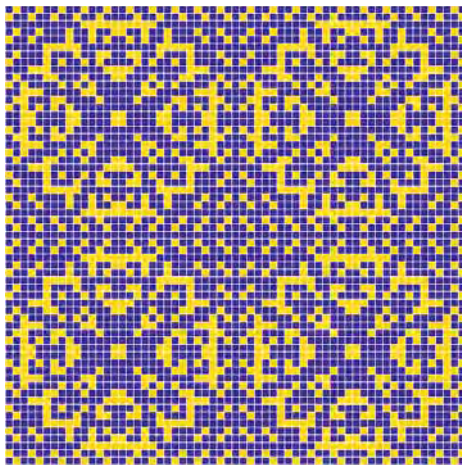


Рис. 9

Задание для самостоятельной работы

7. Разработайте программу для получения изображения на рис. 9.

Как пишет автор статьи [1], «Если вы внимательно и терпеливо займётесь изучением свойств таблицы Пифагора, то, несомненно, отыщете новые, не менее красивые, узоры на основе этой древней числовой схемы»...

Литература

1. Авилов Н. Узоры таблицы Пифагора. <http://www.nkj.ru/archive/articles/2008>.

Дополнение¹

В 1996 г. в Музее искусства и истории Женевы была выставлена надгробная плита (стелла) древнегреческого происхождения (рис. Д1).



Рис. Д1. Древнегреческая надгробная плита III века до н.э., показывающая обучение детей таблице умножения

Изображённая на плите картина показывает школу. На стене висит некая таблица. Учитель, очевидно, задает вопрос, показывая место в этой таблице, а ученик должен был ответить на вопрос.

Швейцарский профессор А. Шарлиг (A. Schärliг), изучивший эту плиту, установил, что таблица на стене является таблицей умножения чисел от 1 до 10, записанной буквами греческого числового алфавита. Иными

словами, на плите показана сцена контроля учителем знаний таблицы умножения, которую ученик должен был выучить наизусть.

Указанная плита датируется III веком до н.э. Таким образом, этот памятник показывает нам таблицу умножения на 100 – 200 лет раньше известного до недавнего времени древнейшего манускрипта Никомаха Геразского, где приводится таблица умножения (см. статью Д.М. Златопольского).

Подобную таблицу принято называть «таблицей Пифагора». Конечно, не Пифагор её автор. Она была известна задолго до него в Вавилоне, но, вероятно, имя Пифагора молва присвоила этой таблице в связи с её использованием в греческом способе умножения [1].

На рис. Д2 показана сделанная А. Шарлигом реконструкция таблицы на плите.

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Σ	Ζ	Η	Θ	Ι
Β	Δ	Γ	Η	Ι	ΙΒ	ΙΔ	ΙΕ	ΙΗ	Κ
Γ	Γ	Θ	ΙΒ	ΙΕ	ΙΗ	ΚΑ	ΚΔ	ΚΖ	Λ
Δ	Η	ΙΒ	ΙΕ	Κ	ΚΔ	ΚΗ	ΛΒ	ΛΕ	Μ
Ε	Ι	ΙΕ	Κ	ΚΕ	Λ	ΛΕ	Μ	ΜΕ	Ν
Σ	ΙΒ	ΙΗ	ΚΔ	Λ	ΛΕ	ΜΒ	ΜΗ	ΝΔ	Ξ
Ζ	ΙΔ	ΚΑ	ΚΗ	ΛΕ	ΜΒ	ΜΘ	ΝΕ	ΞΓ	Ο
Η	ΙΕ	ΚΔ	ΛΒ	Μ	ΜΗ	ΝΕ	ΞΔ	ΟΒ	Π
Θ	ΙΗ	ΚΖ	ΛΕ	ΜΕ	ΝΔ	ΞΓ	ΟΒ	ΠΑ	Ρ
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	

Рис. Д2

Литература

1. Цайгер М.А. Основы древнегреческой арифметики. – Беэр-Шева, 2015.

¹Дополнение подготовил кандидат технических наук М.А. Цайгер, г. Беэр-Шева, Израиль.