Златопольский Дмитрий Михайлович
*Кандидат технических наук,
доцент кафедры информатики и прикладной математики Московского городского педагогического университета.*

Гармонические числа и… игральные карты

Сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ при целом $n \geq 0$ так часто встречается в анализе алгоритмов, что специалистам понадобилось для нее специальное обозначение – H_n. Буква H в этом обозначении происходит от слова «harmonic», так что H_n – это гармоническое число. Оно названо так потому, что k-я гармоника, извлекаемая из скрипичной струны, – это основной тон, производимый струной, длина которой равна $1/k$ от длины основной струны [1].

«Физическое отступление»

Как известно, звук в широком смысле – *упругие волны*, распространяющиеся в какой-либо упругой среде и создающие в ней механические колебания; в узком смысле – субъективное *восприятие* этих колебаний специальными *органами чувств* человека – барабанными перепонками уха.

Указанные колебания может вызывать, например, струна скрипки, гитары и т. п. Струне определённой длины и степени натяжения соответствует некоторая волна, так сказать, «укладываемая» в точности от одного закреплённого конца струны до другого. Частота этого тона (количество звуковых колебаний в секунду) называется основной частотой. Чем выше частота, тем выше тон. Колебание с основной частотой называется *основным тоном*.

Если бы *струна* воспроизводила только основной тон, то форма её волны соответствовала бы следующему графическому изображению:

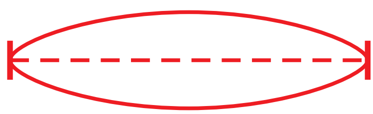

Рис. 1

Но звуковая волна на практике всегда имеет довольно сложную форму, часто далеко не похожую на изображённую на рис. 1. Происходит это вследствие того, что колеблющееся тело (в нашем случае – струна), вибрируя, преломляется в разных частях. Эти части производят самостоятельные колебания в общем процессе вибрации струны

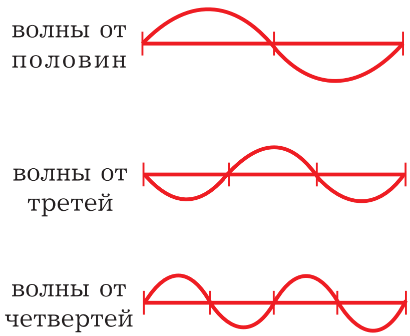

Рис. 2

и образуют дополнительные волны.

Длина волны тона, образующегося от половины струны, в два раза короче волны основного тона, а частота колебаний её в два раза больше основной частоты n, от трети струны – в три раза и т. д.

Колебания с частотами $2n$, $3n$, $4n$, ..., где n – основная частота, называются «гармониками» (2-й, 3-й, 4-й и т. д.).

Установлено, что k-я гармоника некоторой основной («исходной») струны образует звук такой же, что и основной тон струны, длина которой равна $1/k$ от длины исходной струны.

Вычисление гармонического числа

В программе рассчитать значение $H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ при заданном n можно с помощью функции, которая на школьном алгоритмическом языке имеет вид:

```
алг вещ Гармоническое_число (арг цел n)
нач цел i, вещ сумма
     сумма := 1
     нц для i от 2 до n
       сумма := сумма + 1/i
     кц
     |Значение функции:
     знач := сумма
   кон
```

Учитывая, что $H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$, можно применить приём, который в программировании называют «рекурсией» [2]. Создадим простую и логичную рекурсивную (использующую саму себя в качестве вспомогательной) функцию:

```
алг вещ Гармоническое_число (арг цел n)
нач
  если n = 1
    то
      знач := 1
    иначе
      знач := Гармоническое_число (n - 1) + 1/n
  все
кон
```

Нетрудно увидеть, что обе приведённые функции возвращают вещественное значение гармонических чисел.

Несколько более сложной задачей является получение гармонических чисел в виде простой дроби: 3/2, 11/6 и т. п.

Задание для самостоятельной работы

На известном вам языке программирования разработайте программы для получения гармонических чисел в двух вариантах вывода их на экран:

1)
1 1.00000
2 1.50000
3 1.83333
...
20 ...

2)
1 1/1
2 3/2
3 11/6
...
20 ...

Во втором случае две функции не создавать.

Пример с игральными картами

Вот один карточный фокус, который демонстрирует, насколько «гармонично» (☺) возникают гармонические числа уже в простых ситуациях. Положив на стол n карт и сдвигая их относительно друг друга, нам хотелось бы образовать как можно больший выступ над краем стола с учётом действия силы тяжести:

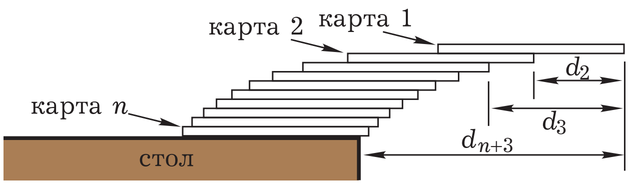

Рис. 3

Для большей определённости задачи потребуем, чтобы края карт были параллельны краю стола – в противном случае величину выступа можно было бы увеличить, разворачивая карты так, чтобы их уголки выступали немного дальше. А для того чтобы упростить ответ, предположим, что длина каждой карты равна 2 единицам.

Для одной карты максимальная величина выступа получается тогда, когда её центр тяжести находится ровно над краем стола (будем считать, что в этом случае равновесие будет устойчивое). А поскольку центр тяжести находится в центре карты, то мы можем образовать выступ длиной в половину карты, т. е. длиной в 1 единицу.

Для двух карт нетрудно убедиться, что максимальная величина выступа получается тогда, когда центр тяжести верхней карты находится ровно над краем второй карты, а общий центр тяжести обеих карт – ровно над краем стола. А поскольку общий центр тяжести двух карт будет находиться посередине их совмещённых частей, то мы в состоянии увеличить величину выступа ещё на половину единицы.

Подобные обстоятельства подсказывают общий метод, в соответствии с которым карты помещаются так, чтобы центр тяжести k верхних карт находился ровно над краем $(k + 1)$-й карты (которая положена под эти k верхних карт). Стол же играет роль $(n + 1)$-й карты. Для того чтобы выразить это условие алгебраически, можно обозначить через d_k расстояние от выступающего края самой верхней карты до соответствующего края k-й сверху карты (см. рис. 3).

Надо также вспомнить уроки физики. Из них читателю, очевидно, известно, что общий центр тяжести k предметов, которые имеют массы

$m_1, m_2, \ldots, m_k$ и центры тяжести которых находятся соответственно в точках предметов, находящихся на расстояниях $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (см. рис. 4), расположен в точке с

$$p = \frac{m_1 p_1 + m_2 p_2 + \ldots m_k p_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}$$

Это означает, что для двух карт можем записать:

$$d_3 = \frac{m(d_1+1) + m(d_2+1)}{m+m} = \frac{(d_1+1)+(d_2+1)}{2}.$$

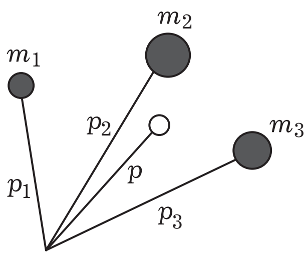

Рис. 4

Заметим, что $d_1 = 0$. В общем случае нужно положить d_{k+1} равным центру тяжести k первых карт:

$$d_{k+1} = \frac{(d_1+1)+(d_2+1)+\ldots+(d_k+1)}{k}$$

при $1 \le k \le n$.

А эту рекуррентную зависимость[1] можно переписать в двух эквивалентных формах:

$kd_{k+1} = k + d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1} + d_k, k \ge 0;$

$(k-1)d_k = k - 1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1}.$

Вычитание одного уравнения из другого показывает, что

$kd_{k+1} - (k-1)d_k = 1 + d_k, k \ge 1;$

следовательно, $d_{k+1} = d_k + 1/k$. Это означает, что вторая карта будет сдвинута на половину единицы длины относительно третьей карты, которая сдвинута на треть единицы длины относительно четвёртой карты и т. д. Отсюда по индукции вытекает общая формула

$$d_{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = H_k.$$

А если положить $k = n$, то получим $d_{n+1} = H_n$, т. е. полная величина выступа, когда n карт уложены так, как описано выше, равна гармоническому числу «степени» n.

Интересный вопрос: а нельзя ли получить бóльшую величину выступа, воздерживаясь вначале от сдвига каждой карты на предельно возможное расстояние и накапливая «потенциальную энергию силы тяжести» для решающего сдвига? Ответ – нет, нельзя, так как всякое устойчивое расположение карт должно удовлетворять неравенству:

$$d_{k+1} \le \frac{(d_1+1)+(d_2+1)+\ldots+(d_k+1)}{k}$$

при $1 \le k \le n$.

К тому же $d_1 = 0$. Отсюда по индукции следует, что $d_{k+1} \le H_k$.

Задание для самостоятельной работы

Разработав компьютерную программу, определите:

1) каким будет выступ в случае использования колоды из:

- 52 карт;
- миллиона карт (если условно допустить, что такое количество карт можно разместить, соблюдая рассмотренную закономерность);

2) при каком минимальном числе карт величина выступа будет превышать длину одной карты, которая равна двум единицам.

Литература

1. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. – М.: Мир, 1998.

2. *Златопольский Д.М.* Программирование: типовые задачи, алгоритмы, методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.

[1] Рекуррентной зависимостью (или рекуррентным соотношением) называют формулу, выражающую очередной член последовательности через один или несколько предыдущих членов. Например, для арифметической прогрессии такая формула: $a_i = a_{i-1} + d$ (каждый последующий член равен предыдущему, увеличенному на разность прогрессии).