Медведев Михаил Геннадиевич
Кандидат физико-математических наук, доцент факультета кибернетики Киевского национального университета имени Тараса Шевченко.

Числа Фибоначчи

Описываются числа Фибоначчи, их свойства и методы вычисления. Рассматривается набор олимпиадных задач, которые решаются при помощи чисел Фибоначчи.

В XIII веке итальянский математик Леонардо Фибоначчи исследовал решение следующей задачи.

Фермер выращивает кроликов. Когда кролик становится взрослым (ему исполняется два месяца), то каждый месяц он даёт потомство в одного кролика. Сколько кроликов будет у фермера через n месяцев, если сначала у него был только один кролик (считается, что кролики не умирают и дают потомство по вышеописанной схеме)?

Очевидно, что в начале первого и второго месяца у фермера один кролик, поскольку потомства ещё нет. На третий месяц будет два кролика. На четвёртый месяц первый кролик даст ещё одного, а второй потомства не даст, так как ему ещё один месяц. Таким образом, на четвёртый месяц будет три кролика. Кролики будут размножаться, как показано на рисунке 1.

Количество кроликов в n-ый месяц будет равно количеству кроликов, которое было в $(n-1)$-ом месяце, плюс количество родившихся. Последних будет столько, сколько кроликов дают потомство (которым уже исполнилось 2 месяца).

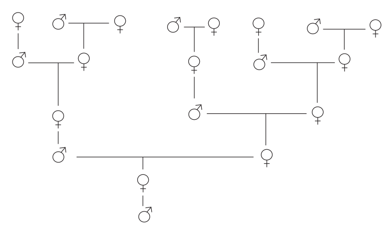


Рис. 1

Их число равно количеству кроликов в $(n-2)$-ой месяц.

Если через F_n обозначить количество кроликов после n-го месяца, то имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \; F_1 = F_2 = 1.$$

Положим $F_0 = 0$, при этом соотношение при $n = 2$ останется истинным. Таким образом образовалась последовательность

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \\ 34, 55, 89, 144, \dots ,$$

которая называется *последовательностью Фибоначчи.*

Рассмотрим несколько функций $f(n)$ вычисления n-го числа Фибоначчи. Для нахождения $f(n)$ с линейной сложностью без запоминания значений $f(1),\ f(2),\ \ldots,\ f(n-1)$ можно использовать циклический вариант:

```
int f(int n)
{
  int i, temp, a = 0, b = 1;
  for(i = 0; i < n; i++)
  temp = a, a = b, b = temp + a;
  return a;
}
```

Максимальным числом Фибоначчи, которое помещается в тип int, является $F_{46} = 1836311903$. В 64-битовый целочисленный тип long long помещается максимум F_{92}. Если в задаче требуется находить значения $f(n)$ для $n > 92$, то следует воспользоваться длинной арифметикой.

В случае необходимости запоминания всех чисел Фибоначчи $f(1)$, $f(2),\ \ldots,\ f(n)$ заведём массив m, в котором положим $m[i] = f(i),\ 0 \le i \le n$. Реализация может быть как циклическая, так и рекурсивная с запоминанием:

```
#include <stdio.h>
#include <memory.h>
int i, n, m[47];

void main(void)
{
  memset(m,0,sizeof(m));
  m[0] = 0; m[1] = 1;
  scanf("%d",&n);
  for(i = 2; i <= n; i++)
    m[i] = m[i-1] + m[i-2];
  while(scanf("%d",&i) == 1)
    printf("%d\n",m[i]);
}
```

```
#include <stdio.h>
#include <memory.h>
int i, n, m[47];

int f(int n)
{
  if (m[n] >= 0) return m[n];
  if (n == 0) return m[0] = 0;
  if (n == 1) return m[1] = 1;
  return
  m[n] = f(n-1) + f(n-2);
}

void main(void)
{
  memset(m,-1,sizeof(m));
  scanf("%d",&n); f(n);
  while(scanf("%d",&i) == 1)
  printf("%d\n",m[i]);
}
```

Формула Бине выражает в явном виде значение F_n как функцию от n:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Значение $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ известно как «золотое сечение». При этом φ и $1-\varphi$ являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Наибольший общий делитель двух чисел Фибоначчи равен числу Фибоначчи с индексом, равным наибольшему общему делителю индексов, то есть

$$\text{НОД}(F_n, F_m) = F_{\text{НОД}(n,m)}.$$

Следствие 1. F_m делится на F_n тогда и только тогда, когда m делится на n (за исключением $n = 2$).

Следствие 2. F_n может быть простым числом только для простых n (за исключением $n = 4$).

Числа Фибоначчи удовлетворяют следующим свойствам:

а) $F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n = F_{n+2} - 1;$

б) $F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1} = F_{2n};$

в) $F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + ... - F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n-1} - 1;$

г) $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1};$

д) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ (равенство Ж.Д. Кассини);

е) $F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n.$

Доказательство всех равенств проводим по индукции.

а) База. $n = 0.$ $F_0 = F_2 - 1$, что верно.

Шаг. $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n = (F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_{n-1}) + F_n = F_{n+1} - 1 + F_n = F_{n+2} - 1.$

б) База. $n = 1.$ $F_1 = F_2$, что верно.

Шаг. $F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n+1} = (F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1}) + F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2}.$

в) База. $n = 1.$ $F_0 - F_1 + F_2 = 0 - 1 + 1 = 0,$ $F_1 - 1 = 1 - 1 = 0.$

Шаг. $(F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + ... - F_{2n-1} + F_{2n}) - F_{2n+1} + F_{2n+2} = F_{2n-1} - 1 - F_{2n+1} + F_{2n+2} = F_{2n-1} - 1 - F_{2n+1} + F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n-1} + F_{2n} - 1 = F_{2n+1} - 1.$

г) База. $n = 0.$ $F_0^2 = F_0 \cdot F_1$, что верно.

Шаг. $F_0^2 + F_1^2 + ... + F_{n+1}^2 = (F_0^2 + F_1^2 + ... + F_n^2) + F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} \cdot F_{n+2}.$

д) Равенство получается из матричного тождества

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

после вычисления определителей.

е) Индукция по m. База. $m = 1.$ $F_{n+1} = F_1 F_{n+1} + F_0 F_n = 1 \cdot F_{n-1} + 0 \cdot F_n = F_{n+1}$, что верно.

Шаг. $F_{n+m+1} = F_{n+m} + F_{n+m-1} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n + F_{m-1} F_{n+1} + F_{m-2} F_n = (F_m + F_{m-1}) F_{n+1} + (F_{m-1} + F_{m-2}) \cdot F_n = F_{m+1} F_{n+1} + F_m F_n.$

Далее рассмотрим набор задач, в которых необходимо вычислять числа Фибоначчи.

Лестница. Необходимо пройти по лестнице, состоящей из n ступенек. С очередной ступеньки можно перейти или на следующую ступеньку, или перешагнуть через одну. Сколько существует вариантов прохождения лестницы?

Решение. Пусть $f(n)$ – количество вариантов, которыми можно пройти по n ступенькам. С n-ой ступеньки можно перейти или на $(n-1)$-ую, или на $(n-2)$-ую. Количество вариантов пройти n ступенек равно количеству вариантов пройти $n-1$ ступенек плюс количество вариантов пройти $n-2$ ступеньки, то есть $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$. Очевидно, что $f(1)=1$ и $f(2)=2$. Таким образом, $f(n)$ является $(n+1)$-ым числом Фибоначчи.

Кирпичная стена [Вальядолид, 900]. Высота кирпича равна 2, ширина – 1. Необходимо построить стену высотой 2 и длиной n (рис. 2).

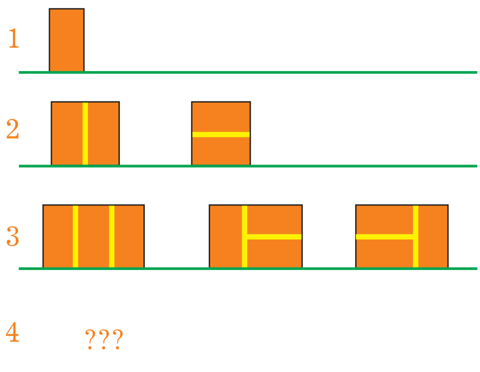


Рис. 2

Сколькими способами можно это сделать в зависимости от значения n?

Решение. Обозначим через $f(n)$ количество способов, которыми можно построить кирпичную стену высотой 2 и длиной n. Тогда можно положить один кирпич вертикально и далее строить стену длиной $n-1$ числом способов $f(n-1)$ или положить два кирпича горизонтально и строить стену длиной $n-2$ числом способов $f(n-2)$. То есть $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$. Также имеем: $f(1)=1$ (один вертикальный кирпич), $f(2)=2$ (два вертикальных или два горизонтальных кирпича). Отсюда следует, что $f(n)$ является $(n+1)$-ым числом Фибоначчи.

Путь пчелы. Пчела начинает свой путь с клетки 1 или 2 и направляется

в клетку с номером n. Двигаться пчеле можно только по соседним клеткам от меньшего номера к большему. Сколькими разными путями пчела может попасть в клетку с номером n (рис. 3)?

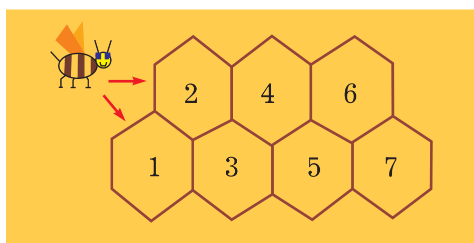


Рис. 3

Решение. Из клетки с номером n пчела может попасть или в клетку с номером $n+1$, или с номером $n+2$. Задача сводится к движению по ступенькам лестницы. Количество разных путей до клетки с номером n равно F_{n+1}.

Новости по телефону. n друзей проживают в разных городах и разговаривают между собой только по телефону. Один телефонный звонок всегда длится одну минуту. Один из друзей желает поделиться новостью со всеми друзьями за наименьшее время. Найти наименьшее время, за которое все друзья будут знать новость, если каждый может совершить не более двух звонков.

Решение. Звонки между друзьями следует организовать так, как показано на рис. 4. Тогда на i-ой минуте о новости узнают еще F_{i+1} друзей. Наименьшее число минут, за которое новость распространится среди $n-1$ друзей (изначально не знающих новости), равно такому наименьшему значению k, для которого $F_2+F_3+...+F_k+F_{k+1} \geq n-1$. Учитывая, что $F_0+F_1+F_2+F_3+...+$ $+F_n = F_{n+2}-1$, неравенство можно переписать в виде: $F_{k+3}-1 \geq n$. Считаем, что $F_1=1$ (личность, которая распространяет новость) и $F_2=1$ (друг, которому сделан первый звонок).

```
личность, распространяющая новость
                     /------------^----\
первая минута        A                  \
                  /----^----\            \
вторая минута   C           \           B
               /--^--\        \       /--^--\
третья минута D      \        E       F      \
             /--^-\     \   /--^--\ /--^--\    \
            ...  ...    ... ...   ... ...  ...  ...
```

Рис. 4

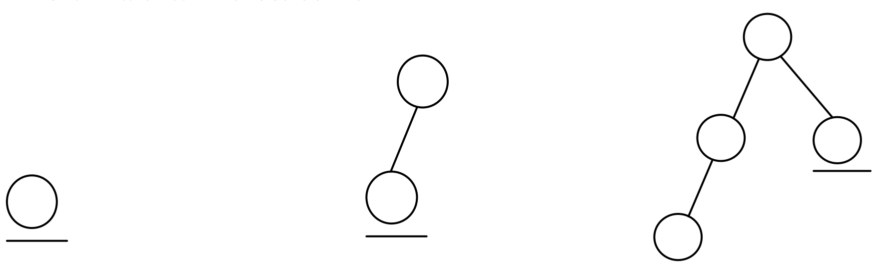
Например, при $n=4$ необходимо $k=2$ минуты (распространяется новость трём друзьям A, B и C). Неравенство $F_5-1 \geq 4$ имеет место.

AVL-деревья. Бинарное дерево называется AVL-деревом, если оно имеет следующие свойства:

- высоты поддеревьев каждой вершины отличаются не более чем на единицу;
- каждое поддерево для каждой вершины является AVL-деревом.

Вычислить количество листьев в AVL-дереве высоты n.

Решение. Обозначим через $f(n)$ число листьев в AVL-дереве высоты n. Тогда $f(0)=1$, $f(1)=1$, $f(2)=2$.



$n=0$, один лист $\quad$ $n=1$, один лист $\quad$ $n=2$, два листа

Рис. 5

Если AVL-дерево имеет высоту n, то его левое поддерево (например, для определённости) имеет высоту $n-1$, а правое $n-2$. Количество листьев тогда равно

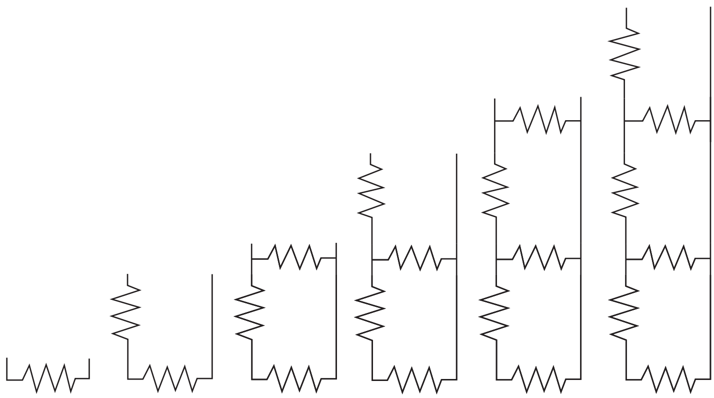
$$f(n) = f(n-1) + f(n-2),$$

то есть числам Фибоначчи (рис. 5).

Резисторы. n одинаковых резисторов с сопротивлением 1 Ом каждый соединили как показано на рисунке 6 (к первому резистору подсоединены резисторы с чётными номерами последовательно, а с нечётными – параллельно). Найти сопротивление всей системы из n резисторов.

Решение. Обозначим через $f(n)$ сопротивление системы из n резисторов. Очевидно, что $f(1)=1$, $f(2)=2$. Докажем по индукции, что $f(n)=\frac{F_{n+1}}{F_n}$ при чётном n и $f(n)=\frac{F_n}{F_{n+1}}$ при нечётном n.

Если схема состоит из чётного ко-



n=1 n=2 n=3 n=4 n=5 n=6

Рис. 6

личества резисторов, то следующий резистор соединяется параллельно и результирующее сопротивление равно

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}}+\frac{1}{1}} = \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n+1}}+1} = \frac{1}{\frac{F_n+F_{n+1}}{F_{n+1}}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}.$$

В случае нечётного количества резисторов соединение со следующим резистором происходит последовательно и результирующее сопротивление равно

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}+1 = \frac{F_n+F_{n+1}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

Шум мирового кубка [Вальядолид, 10450]. По заданному числу n вычислить количество последовательностей из 0 и 1 длины n, в которых две единицы не стоят рядом.

Вход. Первая строка содержит количество тестов. Каждая следующая строка является отдельным тестом и содержит число n $(0 < n < 51)$.

Выход. Для каждого теста вывести его номер и количество последовательностей из 0 и 1 длины n, в которых две единицы не стоят рядом.

Пример входа	Пример выхода
2	Scenario #1:
3	5
1	
	Scenario #2:
	2

Решение. Обозначим через $f(n)$ количество искомых последовательностей из 0 и 1 длины n. Если на первом месте последовательности будет находиться 0, то, начиная со второго места, можно построить $f(n-1)$ последовательностей. Если на первом месте стоит 1, то на втором месте обязательно должен стоять 0, а на последующих $n-2$ свободных местах можно построить $f(n-2)$ последовательностей (рис. 7).

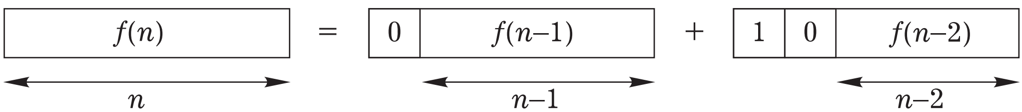


Рис. 7

При этом $f(1) = 2$ (имеем две последовательности длины 2: 0 и 1), $f(2) = 3$ (последовательности 00, 01, 10). Значения $f(n)$ образуют числа Фибоначчи. Учитывая начальные условия, получим: $f(n) = F_{n+2}$.

Луч сквозь стекло [Вальядолид, 10334]. Две пластины стекла совместили друг с другом. Сколькими способами a_n луч света может пройти сквозь пластины, если по пути он изменит направление n раз (рис. 8)?

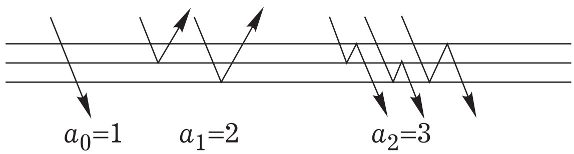


Рис. 8

Вход. Каждая строка содержит одно число n $(0 \le n \le 1000)$.

Выход. Для каждого теста вывести в отдельной строке значение a_n.

Пример входа	Пример выхода
0	1
1	2
2	3

Решение. При наложении двух стеклянных пластин образуется одна внутренняя сторона и две внешние, относительно которых может отражаться луч света. Каждый проход луча с n отражениями будем кодировать последовательностью нулей и единиц длины n: если отражение осуществляется относительно внутренней стороны, то ставим 1, если относительно внешней, то 0. Например, показанному ниже движению луча с 4 отражениями соответствует последовательность 1, 0, 0, 0 (рис. 9).

Можно заметить, что две единицы в такой последовательности никогда не стоят рядом, потому что

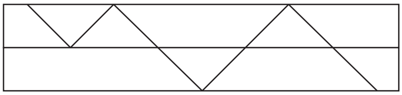


Рис. 9

два последовательных отражения относительно внутренней стороны никогда не могут иметь место. Таким образом, количество возможных проходов луча с n отражениями равно количеству последовательностей из 0 и 1 длины n, в которых две единицы не стоят рядом. Количество таких последовательностей равно числам Фибоначчи (задача 10450). Число способов a_n прохода луча света сквозь пластины равно F_{n+2}.

Поскольку $n \le 1000$, то следует воспользоваться длинной арифметикой.

Пчела [Вальядолид, 11000]. В Африке живёт специальный вид пчёл. Каждый год самка производит на свет одного самца, а самец – самца и самку, после чего родители погибают. Учёные изобрели магическую самку-пчелу, которая плодится как обыкновенная самка, но при этом является бессмертной. Необходимо вычислить число самцов и общее количество пчёл в семействе, если изначально была лишь одна магическая самка-пчела.

Вход. Каждая строка содержит целое N ($N \ge 0$). Последний тест содержит $N = -1$ и не обрабатывается.

Выход. Для каждого значения N вывести число самцов и общее количество пчёл в семействе через N лет. Выводимые числа не более 2^{32}.

Пример входа	Пример выхода
1	1 2
3	4 7
-1	

Решение. Обозначим $(n+2)$-ое число Фибоначчи через $f(n)$. Тогда через n лет число самцов в пчелином семействе будет равно $f(n)-1$, а общее число пчёл $f(n+1)-1$. Через $n=0$ лет семейство состоит из единственной пчелы самки, то есть имеется 0 самцов и 1 пчела. Положим $f(0)=1$, $f(1)=2$. Далее по индукции докажем справедливость приведённого утверждения. После $(n+1)$-го года число самцов равно суммарному числу самок и самцов после n-го года, то есть $f(n+1)-1$. Число самок после $(n+1)$-го года равно числу самцов после n-го года плюс одна бессмертная самка, то есть $f(n)-1+1=f(n)$. Таким образом, общее число пчёл после $(n+1)$-го года равно

$$f(n+1)-1+f(n)=f(n+2)-1.$$

Флаги [Тимус 1225]. Флаг состоит из n вертикальных полос белого, красного и синего цвета. Соседние полосы не могут иметь одинаковый цвет, а синяя полоса всегда должна находиться между красной и белой. Сколькими способами можно покрасить флаг из n полос?

Вход. Число полос n $(1 \le n \le 45)$ на флаге.

Выход. Количество способов, которыми можно покрасить флаг из n полос.

Пример входа	Пример выхода
3	4

Решение. Обозначим через $f_{red}(n)$ и $f_{white}(n)$ количество способов раскраски флага из n полос при условии, что первой полосой будет соответственно красная или белая. Тогда

$$f_{red}(n)=f_{white}(n-1)+f_{white}(n-2),$$

$$f_{red}(1)=1, f_{red}(2)=1;$$

$$f_{white}(n)=f_{red}(n-1)+f_{red}(n-2),$$

$$f_{white}(1)=1, f_{white}(2)=1.$$

Если $f(n)$ – искомое общее количество способов раскраски, то

$$f(n) = f_{red}(n) + f_{white}(n).$$

Поскольку $f_{red}(1) = f_{white}(1) = 1$, $f_{red}(2) = f_{white}(2) = 1$, а $f_{red}(n)$ и $f_{white}(n)$ одинаковыми формулами выражаются друг через друга, то $f_{red}(n) = f_{white}(n) = F_n$, где F_n – n-ое число Фибоначчи. Таким образом, $f(n) = 2 \cdot F_n$.

Определитель. Вычислить определитель порядка $n \times n$, где на главной диагонали и под ней стоят единицы, а над главной диагональю стоят минус единицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Обозначим через $f(n)$ значение определителя. Тогда

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2.$$

Раскрывая определитель по первой строке, получим:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2),$$

откуда $f(n) = F_{n+1}$.

В статье рассмотрена реализация ряда олимпиадных задач, требующих вычисления чисел Фибоначчи. Условия задач взяты со страницы университета Вальядолид **http://acm.uva.es/problemset**, посвящённой олимпиадному программированию.

Список литературы

1. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ. – Москва, Санкт-Петербург, Киев, 2005, 1292 с.

2. *Винокуров Н.А., Ворожцов А.В.* Практика и теория программирования, книга 2.– М: Физматкнига, 2008, 288 с.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Удобная арифметика

Как-то репортёр спросил знаменитого американского писателя Марка Твена, как идёт его работа над новой пьесой.

– Это драматическое произведение будет состоять из 4-х актов и 3-х антрактов. Все три антракта я уже закончил! – ответил Марк Твен.