Златопольский Дмитрий Михайлович
Кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и прикладной математики Московского городского педагогического университета.

Фальшивые монеты, отравленное вино и... системы счисления

Сколько лет проводятся олимпиады для школьников, столько лет их участникам приходится «искать фальшивые монеты» в разных вариантах. Решать задачи такого типа можно разными способами. Разнообразию методов поиска истины и посвящена данная статья.

Задача 1. Имеются 64 одинаковые по виду золотые монеты. 63 из них настоящие, а одна – фальшивая, которая легче настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний на рычажных весах с чашками и без гирь можно определить, какая из монет фальшивая?

Прежде чем описывать решение, заметим, что фраза «наименьшее число взвешиваний» в условии означает, что должны рассматриваться «худшие» варианты, а не варианты типа «а вдруг повезёт». Например вариант, когда при первом взвешивании сравниваются две монеты, и одна из чашек весов перевешивает («повезло!»), рассматриваться не должен. Аналогично, не должен рассматриваться, например, такой вариант:

№ взвешивания	Берём монеты	1-я чашка весов	2-я чашка весов	Допустим, что перевесила
1		32	32	2-я чашка
2	С 1-й чашки	15	15	1-я чашка
3	Со 2-й чашки	7	7	Весы в равновесии

В описанной ситуации за три взвешивания устанавливается, что фальшивая монета – 15-я из той группы, которая оказалась легче при втором взвешивании.

Самое простое решение – последовательно делить всё количество монет пополам, на весах сравнивать их, затем брать более лёгкую кучку монет, делить её пополам и т. д., пока при последнем взвешивании не останется сравнить между собой две монеты. Более лёгкая из них и есть фальшивая. Сказанное можно оформить в виде таблицы (жирным начертанием выделены кучки монет, содержащие фальшивую монету, а также сама эта монета):

№ взвешивания	Берём монеты	1-я чашка весов	2-я чашка весов	Допустим, что перевесила
1		**32**	32	2-я чашка
2	С 1-й чашки	16	**16**	1-я чашка
3	Со 2-й чашки	8	**8**	1-я чашка
4	Со 2-й чашки	**4**	4	2-я чашка
5	С 1-й чашки	2	**2**	1-я чашка
6	Со 2-й чашки	**1**	1	2-я чашка

Ответ. Потребуется 6 взвешиваний.

Задания для самостоятельной работы.

1. Нарисуйте блок-схему, описывающую все возможные варианты взвешиваний по рассмотренной методике при 16 монетах.

2. Определите, какое минимальное число взвешиваний потребуется для поиска фальшивой монеты среди 2^n монет.

Задача 2. Есть 8 монет, из них 7 настоящих, каждая из которых весит 10 г, и одна фальшивая весом 9 г. Необходимо, используя электронные весы, показывающие вес с точностью 1 г, найти фальшивую монету за минимальное число взвешиваний.

Решение во многом аналогично решению предыдущей задачи.

При первом взвешивании определим вес любых четырёх монет, например 1, 2, 3 и 4. Если весы покажут 40 г, то фальшивая монета находится среди оставшихся монет, если 39 г – среди взвешиваемых. Затем нужно узнать вес любых двух монет из соответствующей группы и выявить пару монет, среди которых есть фальшивая. Третье взвешивание покажет, какая монета из этой пары – фальшивая.

Задание для самостоятельной работы. Нарисуйте блок-схему, описывающую все возможные варианты взвешиваний по рассмотренной методике решения задачи 2.

Интересно, что для решения задачи можно применить... двоичную систему счисления!

Пронумеруем монеты и представим их номера в виде трёхразрядных двоичных чисел:

Номер монеты	1	2	3	4	5	6	7	8
Условный номер	0	1	2	3	4	5	6	7
Двоичное представление	000	001	010	011	100	101	110	111

В первом взвешивании должны участвовать монеты, содержащие единицу в первом разряде, во втором – монеты с единицей во втором разряде, в третьем взвешивании – с единицей в третьем разряде. Результаты измерений будем записывать так: если общий вес монет равен 39 г, то во взвешиваемой группе содержится фальшивая монета – запишем «1» в соответствующий номеру измерения разряд, в противном случае запишем «0». Полученное двоичное число будет однозначно определять номер фальшивой монеты.

Рассмотрим пример. Пусть фальшивая монета имеет номер 6. Её условный номер: $5_{10} = 101_2$, значит, эта монета будет участвовать в первом и третьем взвешиваниях. В первом случае весы покажут 39 г, а при втором взвешивании – 40 г, т. е. в результате получится двоичное число 101, соответствующее условному номеру фальшивой монеты.

А теперь более подробно. В каком случае при каком-то взвешивании весы покажут 39 г? Ответ: – если среди взвешиваемых монет есть фальшивая. А 40 г? – Если её там нет. Число взвешиваний равно количеству двоичных разрядов в записи номеров. Фальшивая монета будет участвовать в тех взвешиваниях, номера которых соответствуют номеру разряда в её двоичной записи с единицами. И именно при этих взвешиваниях весы покажут 39 г (а мы запишем в соответствующем разряде 1). В остальных взвешиваниях фальшивая монета участвовать не будет, то есть при них весы покажут 40 г (а мы запишем 0 в соответствующем разряде). Следовательно, двоичное число, составленное по результатам всех взвешиваний, будет таким же, как двоичный номер искомой монеты.

Задание для самостоятельной работы. Подумайте, будет ли работать описанная методика, когда общее число монет равно 16; 14.

Задача 3. Имеются 9 одинаковых по виду золотых монет. Восемь из них настоящие, а одна – фальшивая, которая легче настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний на рычажных весах с чашками и без гирь можно определить, какая из монет фальшивая?

Если решать задачу так же, как задачу 1, то понадобится 3 взвешивания (убедитесь в этом самостоятельно). Но, оказывается, можно решить её всего за два взвешивания!

Для этого можно разделить все монеты не на две, а на три кучки, после чего сравнить на весах две любые кучки. Если весы в равновесии, то фальшивая монета – в третьей кучке из трёх монет, в противном случае – среди тех, которые на весах перевесили. Таким образом, в любом случае мы выделим кучку из трёх монет, среди которых есть искомая. Сравнив на весах две любые монеты из этой кучки, мы этим вторым взвешиванием установим, какая из монет – фальшивая.

Задание для самостоятельной работы. Решите задачу: «Купец получил за товар 64 золотые монеты. Потом он узнал, что одна из этих монет фальшивая, которая весит больше настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний на рычажных весах с чашками и без гирь купец сможет определить, какая из монет фальшивая?».

Указания по выполнению. Разделяйте монеты, среди которых есть фальшивая, на три части (в том числе неравные, если число монет не кратно 3). Например, первоначальную кучу из 64 монет можно разделить на три кучки из 21, 21 и 22 монет. В любом случае старайтесь, чтобы две из этих трёх кучек были равными, а третья может от них отличаться.

Оказывается, что и в решении задачи 3 нам опять поможет система счисления, но не двоичная, а троичная!

Закодируем номера монет в троичной системе счисления:

Номер монеты	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Условный номер	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Троичное представление	00	01	02	10	11	12	20	21	22

Задачу можно решить за два взвешивания. Для первого взвешивания рассмотрим левый разряд троичных чисел – «1» в нём будет означать, что монету нужно положить на левую чашку весов, «2» – на правую чашку, а «0» – что монета не участвует во взвешивании. Затем аналогично для второго разряда.

Запишем результаты каждого i-го взвешивания ($i = 1, 2$) в соответствующий разряд по правилу: если перевесила левая чашка – «1», если правая – «2», если весы уравновешены – «0». Полученное троичное число однозначно определяет номер фальшивой монеты.

Проверьте сказанное самостоятельно на примере какой-то монеты. Почему так получается?

Задание для самостоятельной работы. Решите задачу 3 для случая, когда число монет равно 27.

Задача 4. Когда-то в Древнем Риме некий патриций решил устроить праздник и для этого приготовил 4 бочки вина. Однако он узнал, что кто-то из его врагов подсыпал яд в одну из бочек. Про яд известно, что человек, который его выпил, умирает в течение 24 часов. До начала праздника осталось 25 часов. У патриция есть рабы, которыми он готов пожертвовать, чтобы узнать, в какой именно бочке яд. Какое минимальное число рабов необходимо «использовать», чтобы патриций узнал это?

И здесь, прежде чем описывать решение, обратим внимание на то, что фраза «минимальное число» в условии означает, что должны рассматриваться «худшие» варианты, а не варианты типа «а вдруг патрицию повезёт». Например вариант, когда один раб пьёт вино из одной из бочек и умирает («Патрицию повезло!»), рассматриваться не должен.

Самое простое решение – «использовать» трёх рабов, каждый из которых пьёт вино из какой-то одной бочки (все – из разных). Если через 24 часа никто не умрёт, то отравленное вино – в 4-й бочке, в противном случае один из рабов ценой своей жизни «укажет» на бочку с ядом.

А если трёх рабов у патриция нет? Можно ли решить задачу в этом случае? Оказывается, можно! Для этого опять следует применить двоичную систему счисления!

Пронумеруем[1] бочки: 1, 2, 3, 4 и представим номера бочек в виде двухразрядных двоичных чисел:

Номер бочки	1	2	3	4
Условный номер	0	1	2	3
Двоичное представление	00	01	10	11

[1] Мы используем глаголы «пронумеруем» и другие в 1-м лице исключительно для более понятного изложения методики решения задач. Естественно, что мы считаем недопустимым использование людей для решения подобных задач.

Рабов тоже пронумеруем от 1 до 4. Раб с номером 1 должен выпить вино из тех бочек, у которых в первом разряде их двоичного условного номера стоит 1 (то есть из бочек с номерами 10 и 11), а раб с номером 2 – из тех бочек, у которых единица стоит во втором разряде их двоичного номера (01 и 11).

Если через 24 часа никто из рабов не умер (ура!), то яд в бочке с номером 1 (с двоичным условным номером 00).

Если умер раб с номером 1, то яд в бочке с двоичным условным номером 10, если раб с номером 2 – в бочке с номером 01.

К сожалению, возможен также и вариант, когда погибнут оба раба…

Задания для самостоятельной работы.

1. Определите, какое минимальное число рабов необходимо «использовать», чтобы патриций решил задачу, когда общее число бочек равно 8; 16; 2^k.

2. Определите, можно ли при восьми бочках решить задачу с меньшим числом рабов, но за большее время.

3. Сравните два варианта решения аналогичной задачи, когда общее число бочек равно 8, а до начала пира осталось 49 часов:

1) в первом варианте в первые 24 часа «используются» 2 раба, а затем, при необходимости, «эксперимент» (повторим – недопустимый) проводится в следующие 24 часа;

2) во втором варианте в первые 24 часа «используются» 3 раба.

Можно ли сделать вывод о том, какой вариант «гуманнее»?

«Пир в доме Левия», Паоло Веронезе

Задача 5. Когда-то в Древнем Риме некий патриций решил устроить праздник и для этого приготовил 9 бочек вина. Однако он узнал, что кто-то из его врагов подсыпал яд в одну из бочек. Про яд известно, что человек, который его выпил, умирает в течение 24 часов. До начала праздника осталось 49 часов. У патриция есть рабы, которыми он готов пожертвовать, чтобы узнать, в какой именно бочке яд. Какое минимальное число рабов необходимо «использовать», чтобы патриций узнал это?

Если решать задачу так же, как задачу 4, то «понадобится» 4 раба (убедитесь в этом самостоятельно). Но, оказывается, можно решить её всего с двумя рабами! Как это сделать, вы, конечно, уже догадались –

следует применить не двоичную систему счисления, а троичную.

Закодируем номера бочек в троичной системе счисления:

Номер монеты	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Условный номер	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Троичное представление	00	01	02	10	11	12	20	21	22

Рабов тоже пронумеруем (1 и 2). Раб с номером 1 должен выпить вино из тех бочек, у которых в первом разряде их троичного условного номера стоит «1» (то есть из бочек с номерами 10, 11 и 12), а раб с номером 2 – из тех бочек, у которых единица стоит во втором разряде их троичного номера (01, 11 и 21).

Если через 24 часа умрут оба раба, то яд находится в бочке, из которой они пили, то есть с троичным номером 11.

В случаях, когда погибнет только один раб, станут известны две бочки, из которых он пил, а второй раб останется живым. Значит, за вторые 24 часа можно найти «нужную» бочку.

Если же через 24 часа никто не умрёт, то яд находится в одной из четырёх непроверенных бочек. И в этом случае за вторые 24 часа можно решить данную задачу (см. задачу 4).

Задания для самостоятельной работы.

1. Определите, какое минимальное число рабов необходимо «использовать», чтобы патриций решил задачу 5, когда общее число бочек равно 27; 81; 3^k; n.

2. Заполните таблицу с результатами определения необходимого числа рабов в случае использования для расчёта двоичной и троичной систем счисления (без учёта фактора времени):

Число бочек n	**Необходимое число рабов**		**Разность**
	Использование двоичной системы	**Использование троичной системы**	
8			
16			
32			
…			

Определите, при каком значении общего числа бочек n разность значений во втором и третьем столбцах станет равна 5 (допустив, что такое число бочек возможно).

3. (Задание для читателей, владеющих каким-либо языком программирования.) Разработайте компьютерную программу, с помощью которой можно решить задачу о патриции при любом числе бочек n и при заданном количестве часов, оставшихся до пира (25 или 49).