Грацианова Татьяна Юрьевна
Преподаватель подготовительных курсов факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова.

Эта страшная рекурсия

У вас в школе есть кружок по информатике? Нет? А у вас есть, но время занятий неудобное? Присоединяйтесь тогда к кружку школы №... А впрочем, какая разница, где находится эта школа. Главное, ребята хорошие и занятия интересные. Сегодня речь пойдёт о рекурсии: в информатике, в математике и даже в искусстве.

– Виктор Петрович! А правда, говорят, что в этом году в ЕГЭ по информатике какую-то страшную рекурсию добавили? Я думаю, может, мне и не сдавать информатику – её всё усложняют и усложняют.

– А почему ты считаешь, что задание с рекурсией обязательно страшное и сложное?

– Ну не знаю... Слово какое-то непонятное, страшное. Рычащее.

– Так, может быть, страшное потому, что непонятное? Вот давайте сегодня и разберёмся, что же такое рекурсия.

– Виктор Петрович! А если Вы сейчас про эту самую рекурсию рассказывать будете, тем, кто ЕГЭ по информатике не сдаёт, уходить?

– Да нет, пожалуй. Понятие рекурсии встречается не только в информатике. Им и в математике пользуются, и в других науках, да и в повседневной жизни.

– Про математику охотно поверю, чего там только нет. А про обычную жизнь – нет, ни разу такого не слышал.

– Рекурсия – это не какой-то предмет, объект или «зверь», это всего лишь один из способов описания чего-либо. И описывать этим способом не обязательно понятия из математики, описания и определения нужны во всех науках.

Давайте начнём мы с того самого нового задания по информатике. Посмотрим в демоварианте, например, на сайте www.fipi.ru, как оно выглядит:

Алгоритм вычисления значения функции F(n), где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

F(1) = 1

F(n) = F(n–1) * n, при n > 1

Чему равно значение функции F(5)?

Давайте посчитаем. Подставим $n = 5$ в формулу:

$$F(5) = F(4)*5.$$

Значение $F(4)$ мы не знаем, но можем его посчитать по той же формуле:

$$F(4) = F(3)*4.$$

И дальше, продолжая пользоваться формулой, получаем:

$$F(3) = F(2)*3; \; F(2) = F(1)*2.$$

А значение $F(1)$ дано в условии. Соберём всё вместе, получим:

$$F(5) = 5*4*3*2*1 = 120.$$

А можно и «с другого конца» подойти. Подсчитать

$$F(2) = 2*1 = 2,$$

потом

$$F(3) = 3*2 = 6,$$

$$F(4) = 4*6 = 24.$$

$$F(5) = 5*24 = 120.$$

Естественно, ответ получается такой же.

Присмотритесь к нашим вычислениям, к результатам. Не правда ли, что-то знакомое?

– Да, это факториал. По определению факториал числа n ($n!$) – это произведение всех чисел от 1 до заданного n; $n! = 1*2*3*...*(n - 1)*n$. А где же в задании рекурсия? Нет в нём такого слова!

– Верно, слова нет. Но, видите, факториал числа определяется не так, как мы привыкли, а по-другому, сам через себя. По этому определению получается, что для того чтобы посчитать факториал заданного числа, надо посчитать факториал числа, на единицу меньше заданного, и умножить на число. Когда какое-либо понятие определяется само через себя, определение называется рекурсивным.

– Так, значит, факториал – рекурсивная функция? А как же мы его раньше без всякой рекурсии определяли?

– Дело в том, что рекурсивность – свойство определения, а не самой функции.

– И можно всякие другие функции – из учебника – тоже определить рекурсивно?

– Конечно, только будет проще, если определять их не на всей числовой прямой, а только для целых чисел. Кто первый?

– Вот у меня что... Только очень длинно получилось...

$$F(0) = 0,$$

$$F(n) = (\sqrt{F(n-1)} + 1)^2 \text{ при } n > 0.$$

– Да, забавно. Угадаем, что же это. Давайте найдём $F(4)$:

$$F(4) = (\sqrt{F(3)} + 1)^2 =$$

$$= (\sqrt{(\sqrt{F(2)} + 1)^2} + 1)^2 =$$

$$= (\sqrt{F(2)} + 1 + 1)^2 = (\sqrt{F(2)} + 2)^2 =$$

$$= (\sqrt{(\sqrt{F(1)} + 1)^2} + 2)^2 = (\sqrt{F(1)} + 3)^2 =$$

$$= (\sqrt{F(0)} + 4)^2 = 16.$$

– Да это же всего-навсего $y = x^2$.

– Да, только определена для целых неотрицательных чисел.

– А я вот тоже придумал! Смотрите – совсем коротко получилось:

$$F(n) = F(n-1)*a.$$

Это a^n. Я даже могу сказать, как такие определения придумывать. Надо выразить $F(n)$ через $F(n-1)$. Вот так получается:

$$F(n) = a^n,\ F(n-1) = a^{n-1}.$$

Давайте линейную попробуем:

$$F(n) = k*n + b,$$

$$F(n-1) = k*(n-1) + b = k*n + b - k.$$

Значит, $F(n) = F(n-1) + k$ – рекурсивное определение линейной функции (опять же, определена она только для целых чисел).

– Ты слишком торопишься, определения неправильные.

– Да как же это может быть? Здесь и ошибиться-то негде!

– Посмотрите, чем отличаются эти определения от тех, которые мы рассмотрели сначала!

– Те из двух строчек состояли...

– Верно. И это очень важно. Рекурсивное определение должно состоять из нескольких частей. И хотя бы одна из них должна быть нерекурсивной, показывать, чему равно значение функции для какого-то аргумента. Именно благодаря этой нерекурсивной части мы останавливаемся в цепочных вычислениях по рекурсивной формуле. Если же такой части нет, мы будем вечно уменьшать аргумент, а значения функции не вычислим. Давайте запишем правильные определения (их можно написать по-разному, напишем один из вариантов).

Показательная функция:

$$F(1) = a,$$

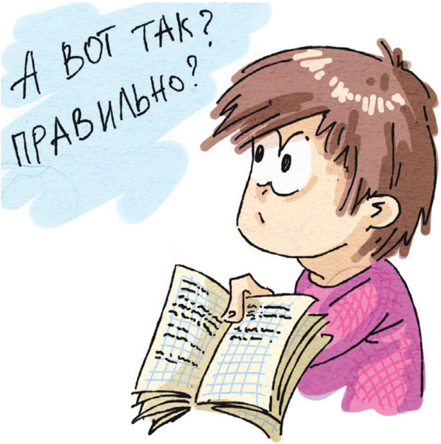
$$F(n) = F(n-1)*a \text{ для } n > 1.$$

Линейная функция:

$$F(0) = b,$$

$$F(n) = F(n-1) + k \text{ для } n > 0.$$

– То есть всегда должно быть две строки в определении?



– Не обязательно две. Обязательно должна быть нерекурсивная часть, «база» рекурсии, и рекурсивная часть – «шаг» рекурсии. В каждой части может быть несколько, как ты говоришь, «строчек».

Вот, например, в определении числа Фибоначчи в нерекурсивной части 2 формулы:

$$F(1) = 1,\ F(2) = 1,$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \text{ для } n > 2.$$

– А вот что интересно: мы знали нерекурсивное определение факториала, оказывается, есть рекурсивное. Для чисел Фибоначчи всегда даётся рекурсивное определение. А нерекурсивная, нормальная формула для них существует?

– Существует, только, боюсь, вам не понравится:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

– Да! Круто!

– Именно поэтому и пользуются рекурсивной формулой – она проще. А для факториала пользуются и той и другой – кому какая удобнее. Все остальные рекурсивные определения, нами здесь выдуманные, конечно, не используются.

– Жалко, что никто не вспомнил про арифметическую и геометрическую прогрессии, которые очень просто определяются рекурсивно.

– Да. Арифметическая прогрессия (первый член a, разность d): нерекурсивное определение задаёт зависимость значения каждого элемента от его номера

$$a_n = a + (n - 1)d,$$

а в рекурсивном «напрямую» определяется первый член (база) и задаётся связь между следующим членом и предыдущим (шаг):

$$a_1 = a,$$

$$a_n = a_{n-1} + d \text{ для } n > 1.$$

Аналогично для геометрической прогрессии (первый член b, знаменатель q) нерекурсивное определение:

$$b_n = b^*q^{n-1},$$

рекурсивное: $b_1 = b$; $b_n = b_{n-1}{}^*q$ для $n > 1$.

– Давайте посмотрим ещё один тип задачек из ЕГЭ с рекурсией (правда, и там этого термина нет).

Строки (цепочки цифр) создаются по следующему правилу.

Первая строка состоит из одной цифры 0. Каждая из последующих цепочек создаётся такими действиями: в очередную строку сначала записывается цифра, на 1 бóльшая последней цифры в предыдущей строке, к ней слева дважды подряд приписывается предыдущая строка.

Вот первые 4 строки, созданные по этому правилу:

(1) 0
(2) 001
(3) 0010012
(4) 001001200100123

Таковы правила формирования строк, определение рекурсивное: очередная строка определяется через предыдущую. Вопросы в таком задании могут быть разные: написать строку с заданным номером, назвать символ, который стоит в заданной строке на определённом месте, определить, является ли заданная последовательность «правильной», то есть составленной по вышеприведённым правилам.

– А всего 10 строчек построить можно, дальше цифры закончатся.

– Для наших с вами занятий этого вполне достаточно. Впрочем, никто не сказал, что цифры десятичные, так что можно много строчек написать.

Давайте посмотрим, как зависит длина строки от её номера. А ну-ка формулу – рекурсивную и нерекурсивную!

– А рекурсивная здесь проще, из определения следует: длина первой строки – 1 (это база рекурсии), а далее каждая строка удваивается и прибавляется один символ – это шаг рекурсии. Получается:

$L(1) = 1$; $L(n) = 2^*L(n - 1) + 1$ для $n > 1$.

– Правильно. А чтобы вывести нерекурсивную формулу, давайте запишем длины нескольких первых строк: 1, 3, 7, 15, 31.

– Так это же числа, на единицу меньшие степеней двойки!

$$L(n) = 2^n - 1.$$

– Давайте решим такую задачу: из предложенных строчек выбрать те, которые сформированы по описанным выше правилам:

```
(1) 00100120010012300100120010012340010012001001230010120010012345
(2) 001001200100123001001200100123400100120010012300100120010123456
(3) 001001200100123001001200100123400100120010012300100120010012345
(4) 000100120010012300100120010012340010012001001230010012001012345
(5) 001001200100123400100120010012300100120010012300100120010012345
(6) 001001200100123400100120010012300100120010012300100120010001345
```

– Ой, какие длинные, как долго в них разбираться.

– Ну, кое-что сразу видно. Одна короче других, у неё длина 62. У правильной последовательности такой длины быть не может. Номер первый отбросили.

– Если длина 63, то по выведенной нами формуле $L(n) = 2^6 - 1$, то есть это 6-я строка. А можно видеть, что в n-й строке последняя цифра равна $n - 1$, то есть у нас она должна равняться 5 – отбросили номер 2.

– И в конце должны быть цифры подряд от 0 до 5 – в 6-й строчке это нарушено.

– А начало у всех строчек должно быть одинаковое: 001, номер 4 тоже отбросим.

– Остались 3-я и 5-я. Как их проверить?

– Можно выполнить действия, обратные тем, которые делаются для формирования строки: отбросим последнюю цифру (мы уже видели, что она правильная), оставшуюся строку разделим на две части. Они должны быть одинаковые и каждая должна быть «правильной», то есть проверяем получившуюся уменьшенную строчку таким же образом. И так надо действовать до тех пор, пока либо обнаружится нарушение правил, либо дойдём до строчки «0» – это будет означать, что последовательность правильная.

Надо сказать, что этим способом можно было действовать и с самого начала – мы бы точно также обнаружили бы все ошибки.

– Итак...

– Пока вы тут разговаривали, я уже всё сделала. Третья – правильная. Только я совсем не так делала. Я просто дописала дальше строчки по правилам. Когда до шестой дошла, поняла, что это то, что нужно. Осталось только найти в списке строку, равную моей.

– И не лень тебе писать столько было?

– А я и не писала ничего. Я на компьютере: запоминала строку, потом её 2 раза копировала, цифру приписывала.

– Да, как и первую задачу (с факториалом), эту задачу можно решить двумя способами: выписывая строчки от первой до нужной и, наоборот, разбивая большую строку на меньшие. Обоими способами получается, что правильной является третья строчка.

– Вот ещё одна задача (похожая есть в одном из демовариантов ЕГЭ): запишите семь символов подряд, стоящих в седьмой строке на местах с 117-го по 123-е (считая слева направо).

– Давайте я попробую, я знаю как. 7-я строка, в ней по нашей формуле 127 цифр. В каждой строке последние n символов – это цифры от 0 до $(n - 1)$. Значит, в нашей строке с 121 по 127 место стоят цифры 0123456. Таким образом, 3 искомые цифры есть, это 012, они стоят на 121 – 123 местах. А перед цифрами от 0 до (n – 1) во всех строках стоят одинаковые символы. Их можно взять, например, из 3-й строки: 0010. Ответ 0010012.

– А зачем что-то считать, думать. Можно просто выписать эту строку целиком, отсчитать, где нужные места – и ответ готов.

– Конечно, это тоже метод решения. Правда, когда символов в строке так много, легко ошибиться. А если бы задача была про ещё более длинную строку?! Вот давайте посчитаем, на какой позиции (считая слева направо) в 10-й строке стоит последний ноль.

– Но это же очень просто: 10-я строка заканчивается на 0123456789, то есть, если считать справа, последний ноль на 10-м месте. А если слева – надо отнять 9 от длины строки. $2^{10} - 1 - 9 = 1023 - 9 = 1014$.

– Да-а-а. Такую строчечку уже не выпишешь...

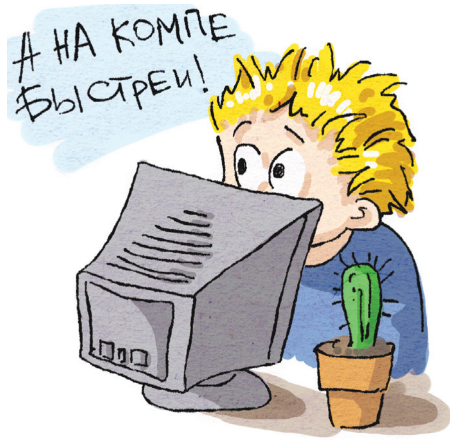
– А нельзя это как-то автоматизировать, чтобы компьютер сам такие задачки решал?

– Да можно, конечно. Для этого нужно программу написать, которая будет по указанным правилам строить последовательность. В программировании рекурсия широко применяется, во многих языках, в том числе в Си и в Паскале, допускается рекурсивное описание функций. Я думаю, мы с вами посвятим программированию следующее занятие.

– Мы всё задачи из ЕГЭ решаем, а собирались рассказать про рекурсию везде и во всём. Мы говорили о рекурсивных функциях. А что такое рекурсия вообще?

– Давайте в словаре посмотрим. У кого планшет включён?

– Вот определение из философского словаря: «термин, обозначающий повторяющийся характер человеческой деятельности и любого социального феномена как такового, устанавливающий отношения различия с тем, что повторяется». Ну а дальше уже совсем непонятно.



– Да зачем нам из философского, из математического давайте.

– А в математическом только про рекурсивные функции написано, мы это и так знаем. Вот из энциклопедии: «Метод определения объектов... предварительным заданием одного или нескольких (обычно простых) его базовых случаев, а затем заданием на их основе правила построения определяемого класса или метода, ссылающегося... на эти базовые случаи. Другими словами, рекурсия – способ общего определения множества объектов или функций через себя, с использованием ранее заданных частных определений. Рекурсия используется, когда можно выделить самоподобие задачи».

– Так это то же самое, что определение рекурсивной функции: база – простые случаи, и шаг – от менее сложного к более сложному.

– То есть рекурсия – это повторение, чем же она от цикла отличается?

– Вспомним, рекурсивность – не свойство объекта, а свойство его определения. Объект, в котором что-то повторяется, можно описать, используя либо, как вы говорите, «циклы», либо рекурсию.

– А обещали рассказать, где ещё используется рекурсия. Говорили, что не только в математике, а чуть ли не везде.

– Ну, сначала надо всё-таки ещё немного про математику. С рекурсией тесно связана математическая индукция – один из способов доказательства истинности утверждения для всех натуральных чисел. При доказательстве методом математической индукции сначала проверяется истинность утверждения для $n = 1$ (база индукции), а затем из истинности утверждения для некоторого n доказывается истинность для $n + 1$.

– А я вспомнил – мы недавно формулу сложного процента проходили – это ведь тоже рекурсия.

– Да, формулу сложного процента можно представить рекурсивно. Вспомним, что это такое. В банк кладётся R рублей под P процентов годовых. Соответственно, через год на счёте будет

$$R + R*P/100 = R*(1 + 0{,}01*P).$$

Если деньги остаются на счёте, проценты «набегают» уже на эту сумму. То есть ещё через год на счёте будет уже

$$R*(1+0{,}01*P)+R*(1+0{,}01*P)*P/100 =$$
$$= R*(1 + 0{,}01*P)*(1 + 0{,}01*P) =$$
$$= R* (1 + 0{,}01*P)^2.$$

Действуя аналогично, из рекурсивной формулы получим нерекурсивную: $R*(1 + 0{,}01*P)^n$.

– Всё-таки это тоже математика, а обещали про рекурсию везде-везде.

– Давайте про «везде». Как вы считаете, с какого времени человечеству известна рекурсия?

– С прошлого века? Неужели с позапрошлого?

– Ну, как же так! Вы уже забыли, что мы говорили про числа Фибоначчи, а Фибоначчи жил в XII веке.

С древности известны рекурсивные методы изготовления узоров. Например, возьмите квадрат, соедините отрезками середины его сторон – получите квадрат поменьше, с которым можно поступить так же. Встречается рекурсия и в изобразительном искусстве. Представьте себе: на картине изображена комната, которая отражается в зеркале, а в комнате висит то самое зеркало, а в нём...

– Такую штуку с зеркалами можно и самому сделать.

– А можно и не с зеркалами, а с компьютером, с видеокамерой.

– Да. Вот, пожалуйста, вам рекурсия в физике. Термин «рекурсия» используется и в лингвистике, и в литературе. Например, герой литературного произведения читает рассказ, сюжет которого схож с сюжетом произведения, и в рассказе есть похожий персонаж, который читает рассказ...

– В общем, «у попа была собака...».

– Да, это тоже пример рекурсии, и таких стишков, песенок, прибауток очень много. Помните Чучело-Мяучело, которое само про себя песенку пело? А вспомните такой способ упаковки подарка: вы раскрываете большую коробку, а в ней лежит коробка поменьше, в которой лежит ещё одна коробка, в которой...

– Значит, и матрёшка – это рекурсия.

– Конечно. Как можно определить матрёшку? Это фигурка, в которой спрятана другая фигурка.

– Виктор Петрович! А Вы неправильное определение дали – базы нет.

– Верно заметила, надо бы добавить, что в самой маленькой ничего не спрятано. База в рекурсивном определении должна быть всегда, неважно, относится оно к математике или к другой области. Иначе возникает ситуация, называемая «порочный круг», или «замкнутый круг». Помните, из сказок: меч спрятан в пещере, которую охраняет дракон, убить которого можно только мечом, который спрятан в пещере, которую... – безвыходное положение. Часто порочный круг по ошибке создают при определении одних объектов через другие. Например, определения «полукруг – половина круга» и «круг – фигура, состоящая из двух полукругов» ничего не определяют. Подобные казусы часто возникают и у вас, например, на уроках геометрии, когда вы пытаетесь доказать теорему, опираясь на её следствия. Хочется, чтобы, используя рекурсию, вы не забывали, к каким нехорошим последствиям приводит отсутствие базы.

Кто может привести ещё какие-нибудь примеры рекурсивных определений, из других областей жизни?

– А вот с кошками или с собаками... Чтобы доказать, что котёнок породистый, надо доказать, что породистые его родители. А для этого – доказать, что их родители породистые.

– И опять – база где?

– Так откуда-то же произошли эти породы! Первых персидских котов, наверное, из Персии привезли.

– Время наше уже заканчивается. Давайте подведём итоги. Мы сегодня узнали, что такое рекурсия, посмотрели определение этого термина в разных словарях, привели много интересных примеров. В следующий раз посмотрим, что такое рекурсия в программировании, напишем программы для тех задачек, которые решали сегодня, и для многих других.

– А домашнее задание?

– Придумайте красивый рекурсивный узор – посмотрим, как писать программы, которые рисуют узоры.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Врата в облака

Так назван удивительный «оптический» объект (см. рисунок) в уникальном парке современного искусства «Millennium park» (США, г. Чикаго). Его придумал известный британский скульптор А. Капура. По его проекту построено овальное сооружение, облицованное панелями из отполированной нержавеющей стали.

Оно похоже на огромную каплю с зеркальной поверхностью, немного растёкшуюся по земле. На этой капле возникают неожиданные и интересные сочетания изображений, так как в ней отражаются и сам парк, и его посетители, и чикагские небоскрёбы, и облака...