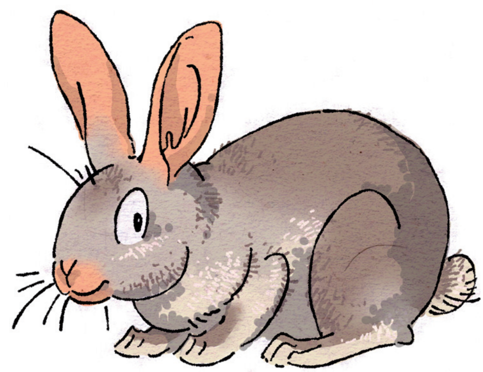
Златопольский Дмитрий Михайлович
Кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и прикладной математики Московского городского педагогического университета.

Числа Фибоначчи – не только кролики ☺

Приводятся примеры использования чисел Фибоначчи, в том числе пример, обнаруженный автором.

Как известно, числами Фибоначчи (или последовательностью Фибоначчи) называют последовательность чисел: 1, 1, 2, 3, 5, ..., очередными членами которой являются числа 8, 13, ... (каждый член последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих). Она так называется потому, что впервые была представлена в книге «Liber abaci» («Книга абака»), написанной в XIII веке итальянским математиком Фибоначчи, известным также как Леонардо Пизанский (Leonardo Pisano). В этой книге имеется такая задача: «Некто поместил пару кроликов в загоне, огороженном со всех сторон, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится в течение года. Природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а потомство дают они со второго месяца после своего рождения». Так сколько же пар кроликов будет через год?

Приведём решение Фибоначчи.



В начале первого месяца была одна пара кроликов; в начале второго – две, причём одна из них зрелая, т. е. способная через месяц принести потомство, вторая – нет. Поэтому в начале третьего месяца будут три пары кроликов, две из них зрелые. В начале четвёртого месяца станет пять пар (три пары были и две – новое потомство), из них только три зрелые, и т. д.

Эти рассуждения можно оформить в виде таблицы 1.

Таблица 1

Номер месяца (его начало)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**
Общее число пар	1	2	3	5	8	13	...
Число зрелых пар	1	1	2	3	5	8	...
В этом месяце родятся, пар	1	1	2	3	5	8	...
В этом месяце станут зрелыми, пар	0	1	1	2	3	5	...

Видно, что общее число пар кроликов N_i в некотором i-м месяце (вторая строка таблицы) равно

$$N_{i-1} + N_{i-2}.$$

Конечно, задача о кроликах – условная. Но, оказывается, в природе есть и реальные примеры использования чисел из последовательности 1, 1, 2, 3, 5, ...

В разнообразных спиралевидных расположениях мелких частей растений обычно можно усмотреть две группы спиралей. В одной из них спирали завиваются по часовой стрелке, а в другой – против. Число спиралей того и другого вида часто оказываются... соседними числами Фибоначчи.

Так, взяв молодую сосновую веточку, легко заметить, что хвоинки образуют две спирали, идущие справа снизу налево вверх. Вместе с тем, они же составляют три спирали, идущие слева снизу направо вверх.

На многих шишках семена (т. е. «чешуйки») расположены в трёх спиралях, «навивающихся» в противоположном направлении. В крупных шишках удаётся наблюдать 5 и 8 и даже 8 и 13 спиралей. Хорошо заметны спирали и на ананасе: обычно их бывает 8 и 13.

У многих сложноцветных (например, у маргаритки или ромашки) заметно спиральное расположение отдельных цветков в соцветиях-корзинках. Число спиралей бывает здесь 13 в одном направлении и 21 – в другом или даже соответственно 21 и 34. Особенно много спиралей можно наблюдать в расположении семечек крупного подсолнуха. Их

число в каждом из направлений может достигать соответственно 55 и 89! [1].

Несмотря на постоянно растущее число цифр в числах Фибоначчи, каждое число, начиная с четвёртого, имеет отношение к следующему, близкое к 0,618. Например:

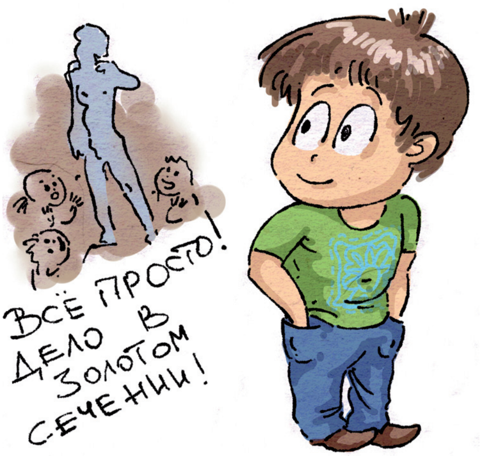
$$2 : 3 = 0{,}67,$$
$$3 : 5 = 0{,}6,$$
$$5 : 8 = 0{,}625,$$
$$8 : 13 = 0{,}615,$$
$$13 : 21 = 0{,}619$$

и т. д. Обратите внимание, как значение соотношений колеблется вокруг величины 0,618. Отношение любого числа к предыдущему приблизительно равно 1,618 (величина обратная 0,618). Например:

$$13 : 8 = 1{,}625,$$
$$21 : 13 = 1{,}615,$$
$$34 : 21 = 1{,}619.$$

Чем больше номера чисел, тем более отношения приближаются к величинам 0,618 и 1,618.

Отношение 0,618 встречается около 300 лет до нашей эры в работах Евклида и называется «золотым сечением». Золотое сечение – деление одной целой величины на две составные части, при этом меньшая составляющая относится так же к большей, как и большая часть ко всей целой величине. Его следы мы находим в музыке, изобразительном искусстве и архитектуре. Греки использовали принцип «золотого сечения» при строительстве Парфенона, египтяне – Великой пирамиды в Гизе. Свойства «золотого коэффициента» были хорошо известны Пифагору, Платону и Леонардо да Винчи.



Все приведённые примеры, как говорится, «дело рук человека». Но, оказывается, золотое сечение характеризует структурную организацию многих живых систем.

Так, расположение листьев на стеблях также носит строгий математический характер, и это явление называется в ботанике «филлотаксисом». Суть филлотаксиса состоит в винтовом расположении листьев на стебле растений (ветвей на деревьях, лепестков в соцветиях и т. д.). По мере роста стебля листья располагаются на нём в определённом порядке, который обусловливает оптимальный доступ к свету. Листья появляются на стебле по спирали как по часовой стрелке, так и против неё, под определённым углом расхождения. В угле расхождения замечены отношения чисел Фибоначчи: 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, 21/34, 34/55, 55/89.

Прямоугольники с размерами золотого сечения выглядят «пропорционально» и приятны на вид. Вещами, имеющими такие размеры, оказывается, удобно пользоваться. Поэтому многим «прямоугольным» предметам (книгам, спичечным коробкам, чемоданам и т. п.) часто придают именно такую форму.

Числа Фибоначчи используются даже на... межбанковском валютном рынке – так называемом «Форексе». Сегодня большинство трейдеров[1] для составления своих прогнозов целиком или частично используют волновую теорию Ральфа Эллиота, который в своей работе «Законы природы» показал, что поведение «толпы» – будь то рыночные торговцы или участники биржевой игры – подчиняется характерным законам. Эти законы связаны с отношением Фибоначчи, равным 1,618.

[1] Трейдер – человек, который занимается торговлей на бирже: покупает и продаёт акции, облигации и другие ценные бумаги и их производные, получая прибыль от изменения курсов ценных бумаг.

Имеются также примеры использования не только отдельных чисел Фибоначчи или их отношений, но и «всей» последовательности. Приведём три наиболее известные из них.

1. Треугольник Паскаля. Треугольник Паскаля – таблица чисел, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел (рис. 1).

$$\begin{array}{c}
1\\
1\ \ 1\\
1\ \ 2\ \ 1\\
1\ \ 3\ \ 3\ \ 1\\
1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1\\
1\ \ 5\ \ 10\ \ 10\ \ 5\ \ 1\\
1\ \ 6\ \ 15\ \ 20\ \ 15\ \ 6\ \ 1\\
1\ \ 7\ \ 21\ \ 35\ \ 35\ \ 21\ \ 7\ \ 1\\
1\ \ 8\ \ 28\ \ 56\ \ 70\ \ 56\ \ 28\ \ 8\ \ 1\\
1\ \ 9\ \ 36\ \ 84\ \ 126\ \ 126\ \ 84\ \ 36\ \ 9\ \ 1\\
1\ \ 11\ \ 55\ \ 165\ \ 330\ \ 462\ \ 462\ \ 330\ \ 165\ \ 55\ \ 11\ \ 1
\end{array}$$

Рис. 1

Если записать числа в виде, представленном на рис. 2, то можно увидеть, что суммы чисел на диагоналях, отмеченных пунктирными линиями, образуют последовательность Фибоначчи.

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & \ldots & & &
\end{array}$$

Рис. 2

2. Задача о прыгуне [1]. Прыгун может прыгать в одном направлении вдоль разделённой на клетки полосы, перемещаясь при каждом прыжке либо в соседнюю клетку, либо через клетку. Сколькими способами может он сдвинуться на $(n - 1)$-ю клетку и, в частности, переместиться из первой клетки в n-ю? (Способы прыгания считаются одинаковыми, если в ходе каждого из них прыгун побывает в одних и тех же клетках.)

Обозначим искомое число через x_n. Очевидно, что $x_1 = 1$ (переход из первой клетки в первую же осуществляется одним способом – отсутствием прыжков) и $x_2 = 1$ (переход из первой клетки во вторую тоже единственен). Пусть целью прыгуна является достижение $(n + 2)$-й клетки. Общее число способов осуществления этой цели в наших обозначениях есть x_{n+2}. Но с самого начала эти способы разбиваются на две группы: начинающиеся с прыжка во вторую клетку и начинающиеся с прыжка в третью клетку. Из второй клетки прыгун может переместиться в $(n + 2)$-ю x_{n+1} способами, а из третьей – x_n способами. Таким образом, последовательность чисел x_1, x_2, ..., x_n удовлетворяет рекуррентному соотношению[1]

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

и поэтому совпадает с последовательностью чисел Фибоначчи.

3. Числа Фибоначчи и геометрия. Числа Фибоначчи появляются также в вопросах, связанных с исследованием путей в различных геометрических конфигурациях. Рассмотрим, например, сеть путей, изображённую на рис. 3 (такие сети в математике и информатике принято называть *ориентированными графами*), и подсчитаем число путей, которыми можно, двигаясь вдоль стрелок, перейти из вершины A или вершины B в вершину C_n.

[1] Рекуррентной зависимостью (или рекуррентным соотношением) называют формулу, выражающую очередной член последовательности через один или несколько предыдущих её членов.

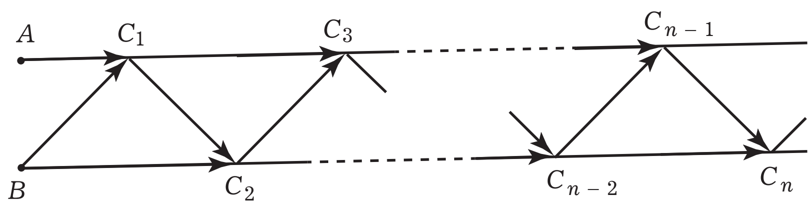


Рис. 3

Обозначим число таких путей соответственно через a_n и b_n. Ясно, что при начале движения как из точки A, так и из точки B в вершину C_n можно попасть двумя способами: через вершину C_{n-1} с последующим шагом вдоль наклонного ребра и через вершину C_{n-2} с последующим шагом вдоль горизонтального ребра. Значит,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}.$$

А так как $a_1 = a_2 = 1$ и $b_1 = b_2 = 1$, то полученные соотношения также характерны для последовательности Фибоначчи.

Неожиданный пример использования последовательности Фибоначчи обнаружен автором статьи. Этот пример связан с игрой, которую называют «ним».

Играют в неё вдвоём. Можно использовать для игры камешки, монеты, спички и т. п. В наиболее известном варианте «нима» 12 предметов выкладывают в три ряда так, как показано на рис. 4.

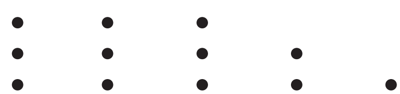


Рис. 4

Правила игры просты. Игроки по очереди забирают по одному или нескольку предметов из любого ряда. Выигрывает тот, кто возьмёт по следний предмет[1]. Подумав и/или рассмотрев несколько возможных ходов, вы наверняка обнаружите, что добиться победы можно, если оставить сопернику два одинаковых ряда предметов (то есть с одним и тем же числом предметов в каждом ряду). Выиграть можно и в том случае, если в первом ряду останется один, во втором – две и в третьем – три предмета. Тот, кто начинает игру, наверняка побеждает, если первым ходом он забирает два предмета из верхнего ряда, а затем рационально продолжает игру.

Казалось, что анализ столь простой игры не может привести к каким-либо неожиданностям, однако в начале XX века было сделано удивительное открытие. Обнаружилось, что ним допускает обобщение на любое число рядов с любым числом предметов в каждом ряду и что с

[1] Можно играть и наоборот – считать того, кто возьмёт последний предмет, проигравшим.

помощью простой стратегии любой желающий может стать непобедимым игроком. Полный анализ и доказательство существования оптимальной стратегии впервые опубликовал в 1901 году Чарльз Л. Бутон, профессор математики Гарвардского университета (США). Бутон и назвал игру «ним» от устаревшей формы английских глаголов *стянуть*, *украсть*.

Каждую комбинацию предметов в игре можно назвать либо «опасной», либо «безопасной». Если позиция перед очередным ходом игрока такова, что гарантирует ему выигрыш при правильной стратегии, она называется безопасной; в противном случае позиция называется опасной[1]. Так, при игре в «ним» по описанной выше схеме «3, 4, 5» (см. рис. 4) исходная позиция – безопасная, и он может превратить её в опасную для соперника, взяв два предмета из верхнего ряда. Любую безопасную позицию, сделав соответствующий ход, всегда можно превратить в опасную (для соперника). Когда позиция опасная – любой ход делает её безопасной. Следовательно, рациональная игра заключается в том, чтобы каждый раз превращать безопасную позицию в опасную.

Чтобы определить, опасна или безопасна данная позиция, число предметов в каждом ряду нужно записать... в двоичной системе. Если сумма чисел в каждом столбце (разряде) равна нулю или чётна, то позиция опасна. Если же сумма нечётна хотя бы в одном разряде, то позиция безопасна.

Записывая в двоичной системе число предметов в каждом ряду, расставленных по схеме «3, 4, 5», мы получим (см. табл. 2):

Таблица 2

Число предметов	**Двоичная запись числа**		
3		1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
Сумма цифр:	2	1	2

Сумма цифр (или количество единиц) в среднем столбце равна 1 – нечётному числу, что свидетельствует о безопасности данной позиции. Поэтому первый игрок может сделать её опасной для соперника. Как уже объяснялось, именно это он и делает, когда забирает из верхнего ряда два предмета. В результате в верхнем ряду остаётся лишь 1 предмет (двоичное число также 1) и нечётное число в последовательности сумм чисел по столбцам пропадает. Перепробовав остальные ходы, вы убедитесь в том, что только указанный ход может сделать исходную позицию опасной.

Итак, выигрышная стратегия состоит в том, чтобы оставлять после своего хода опасную позицию (правда, найти оптимальный ход «в уме» – непросто ☺).

Пример. Предположим, в игре три кучки, в них соответственно 2 (10 в двоичном представлении), 8 (1000) и 13 (1101) предметов. Эта позиция безопасная. Чтобы сделать её опасной, нужно взять 3 предмета из третьей кучки – там останется 10 (1010) предметов. Предположим, после такого хода противник забирает все предметы из первой кучки – выигрышная стратегия будет заключаться в том, чтобы забрать два предмета из третьей кучки, и т. д.

Рассмотрим наиболее популярную версию игры в ним с тремя кучками предметов. Пусть начальная позиция описывается тройкой чисел (n_1, n_2, n_3), где n_1, n_2 и n_3 –

[1] В книге [2] приняты «противоположные» признаки опасной и безопасной позиций, связанные с ситуацией, полученной *после* сделанного хода.

количество предметов в каждой из трёх кучек. Поставим задачу подсчёта общего числа опасных позиций вида (n, $2n$, $3n$), где n – натуральное число из некоторого диапазона.

1. При $n = 1$:

 1
10
11

Видно, что позиция опасная.

2. При $n = 2$:

 10
100
110

Позиция также опасная, то есть общее число опасных позиций для $n \le 2$ равно двум.

3. При $n = 3$:

  11
 110
1001

Здесь имеются разряды с нечётной суммой, то есть позиция безопасная (общее число опасных позиций для $n \le 3$ – по-прежнему 2).

4. Когда нужно определить общее число опасных позиций для всех $n \le 7$, задачу можно решить полным перебором, но когда n, например, не превышает 127, то полный перебор всех 127 чисел является крайне трудоёмким. Целесообразно определить признак, по которому можно установить, что значение n даёт опасную позицию.

Прежде всего обратим внимание на то, что количество предметов в третьем ряду равно общему числу предметов в двух первых рядах

$$(3n = n + 2n).$$

Далее, двоичная запись десятичных чисел n и $2n$ отличается наличием дополнительного нуля справа в числе $2n$:

а)

n		1	0	0	1	0	1	0
$2n$	1	0	0	1	0	1	0	0

б)

n		1	1	0	1	1	0	0
$2n$	1	1	0	1	1	0	0	0

Если во всех разрядах все единицы в двоичной записи числа n не совпадают с единицами в двоичной записи числа $2n$, как это имеет место в примере а), то двоичная сумма чисел n и $2n$ получится без переноса единиц «в уме» из разряда в разряд. Поэтому количество единиц в отдельных разрядах не может быть больше 1. Кроме того, в этом случае двоичные цифры числа $3n$ будут совпадать с количеством единиц в том или ином разряде (убедитесь в этом самостоятельно!). Это означает, что во всех разрядах количество единиц будет равно либо 2, либо 0, то есть соответствующая позиция – опасная.

Если же в двоичной записи числа n имеется хотя бы одна пара рядом стоящих единиц, то тогда при сложении чисел n и $2n$ будет иметь место перенос единиц «в уме»:

$$\begin{array}{r} 10110 \\ + \ 101100 \\ \hline 1000001 \end{array}$$

А это значит, что сумма чисел n и $2n$ в двоичном виде будет отличаться от двоичной записи числа $3n$. Это, в свою очередь, означает, что как минимум в одном из разрядов количество единиц будет нечётным, то есть позиция является безопасной.

Таким образом, мы можем сделать важный вывод: позиция (n, $2n$, $3n$) будет опасной, если в двоичной записи числа n нет двух рядом стоящих единиц. Анализ вариантов, полученных для первых семи натуральных чисел и других, показывает, что это правило подтверждается.

Но даже с использованием такого правила решение задания для $n \le 127$ является достаточно трудоёмким (подсчитывать количество единиц в каждом разряде при сложении 127 троек чисел необходимости нет, но проанализировать 127 значений n придётся). Поэтому попробуем разработать методику подсчёта искомого количества в общем виде.

Рассмотрим числа n, которые в двоичном виде являются k-значными (согласно найденному признаку опасности позиции, второй слева цифрой не может быть единица, то есть искомые числа с опасной позицией имеют в двоичной системе вид 10???, где «?» – 1 или 0):

1	0	?	?	?	?
k	$k-1$	$k-2$	…	2	1

Следовательно, можем сказать, что количество искомых k-значных двоичных чисел равно общему числу значений n с опасной позицией для $1-(k-2)$-значных чисел и ещё одно:

10…00 ($k-1$) нулей.

Так как для $k = 1$ ($n = 1$) и $k = 2$ ($n = 2$ и 3) искомое количество мы уже нашли (см. табл. 3), то можем «продолжить» расчёты, используя полученную только что зависимость (в табл. 4 она показана стрелками).

Таблица 3

k	Общее количество опасных позиций	Диапазон значений k	Общее количество опасных позиций
1	1	1 – 1	1
2	1	1 – 2	2

Таблица 4

Количество разрядов k в двоичной записи числа n	Общее количество опасных позиций	Диапазон значений k	Общее количество опасных позиций
1	1	1–1	1
2 ($n = 2 \div 3$)	1	1–2	2
3 ($n = 4 \div 7$)	2	1–3	4
4 ($n = 8 \div 15$)	3	1–4	7
5 ($n = 16 \div 31$)	5	1–5	12
6 ($n = 32 \div 63$)	8	1–6	20

Анализ второго столбца табл. 4 показывает, что общее количество опасных позиций для всех значений n, которые в двоичном виде являются k-значными (назовём это количество N_k), равно

$$N_{k-2} + N_{k-1}!$$

Вот уж, действительно, «широко простирает последовательность Фибоначчи руки свои…»[1] ☺.

Задания для самостоятельной работы

1. Установите закономерность в значениях в последнем столбце табл. 4.
2. Подсчитайте общее число опасных позиций вида (n, $2n$, $3n$) для всех n из интервала:
   1) 512 – 1023;
   2) 1 – 1023.

Литература

1. *Воробьёв Н.Н.* Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1978.
2. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. – М.: Мир, 1999.

[1] «Широко простирает химия руки свои в дела человеческие» – слова М.В. Ломоносова.