Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Текстовые задачи на движение

Разве ты не заметил, что способный к математике изощрён во всех науках в природе? Было бы хорошо … если бы лиц, занимающих высшие государственные должности, приучали заниматься математикой и в нужных случаях к ней обращаться.

Платон

В этой статье подобраны задачи на движение, которые, с точки зрения автора, интересны тем, что они, во-первых, могут решаться нетрадиционным способом, но зато почти устно (прямолинейное движение), во-вторых, кажущейся сложностью – сначала совсем не ясно, как начать их решать (некоторые задачи на движение по кругу), в-третьих, своей необычной постановкой.

Введение

Работа автора в 9-ом классе показала, что текстовые задачи на уроках алгебры не являются «любимыми». Школьники с большим удовольствием решают «абстрактные» трудные задачи. И это, наверное, неудивительно – ведь они находятся на уроке математики. Известно, что американские эксперты ЕГЭ недовольны тем, что в наших задачах по математике мало или вовсе нет связи с реальной жизнью. Недостаток это или нет? Известно, однако, и то, что наши троечники с задачами, содержащими всевозможные конкретные денежные расчёты, справляются быстрее, чем «четвёрочники», а задачи, в которых надо проводить рассуждения, им не под силу. Известно также, что много наших олигархов вышли не из отличников. Задатки бизнесмена, решающего насущные задачи, и учёного–математика, решающего глобальные или проблемные задачи того или иного бизнеса, различны! О чём всё это говорит? О том, что «натаскать» на решение простых бытовых задач можно практически всех (обратили внимание на то, как рыночные продавцы назначают цены и разрешают торговаться, себе не в убыток? А как быстро и правильно некоторые подсчитывают стоимость даже большой покупки?). Это говорит также о том, что текстовые задачи – это не только математика. Для их решения необходим жизненный опыт, умение абстрагироваться (принять, например, что лодка может развернуться на 180 градусов мгновенно!) и логически мыслить.

Обычно все методические пособия, содержащие решение текстовых задач, адресуются учащимся 5–9-х классов. Кроме того, текстовые задачи из ЕГЭ не засчитываются при выставлении оценки в аттестат. Мы считаем эту ситуацию неправильной. Когда *выпускников* спрашивают, какие задачи их прежде всего волнуют, они единогласно восклицают: текстовые и с параметром. И понятно, почему. Внимание текстовым задачам уделяется только до 9-го класса, затем выпускной экзамен – на этом работа в школе с ними заканчивается. Однако психика и житейский опыт детей (по крайней мере, родившихся в прошлом веке) к этому времени таковы, что химия растворов, встречи грузовиков с легковыми автомобилями, производительность на заводах и в бассейнах, распродажи, скидки и прибыли и т. д. их не интересуют, а потому всё это для них непонятно, а потому и неинтересно. «Интерес» возникает только при подготовке к вступительным экзаменам в вуз, а «хватка» исчезла. Приходится начинать всё заново. Необходимость в умении решать такие задачи возникает уже на работе.

В чём трудность решения текстовых задач? Решение любой текстовой задачи состоит из двух совершенно различных частей: логической и математической. В разных задачах на первый план выходит или первая или вторая часть, гораздо реже – обе.

Нередко составители считают задачу очень лёгкой, но неожиданно она оказывается очень плохо решаемой учащимися. В чём дело? Чаще всего в этом случае наибольшая проблема – первая часть. Она вызывает затруднение: ведь надо представить, что происходит и как это сформулировать на языке математики. Здесь требуется житейский опыт, умение логически мыслить, рассуждать, умение перевести происходящее на язык уравнений и неравенств. Практически – это и есть начало *математического моделирования*. Задача, которая под силу далеко не каждому! Иногда задачи вызывают практически непреодолимые трудности, которые к математике не имеют никакого отношения, после преодоления которых они же кажутся «недоразумением».

Приведём пример задачи первого «типа».

Задача 1. (ИКСИ, 1999) Из молока, жирность которого составляет 5%, изготовляют творог жирностью 15,5%, при этом остаётся сыворотка жирностью 0,5%. Сколько килограммов творога получится из одной тонны молока? **Ответ.** 300.

Решение. Кто из домохозяек не готовил дома творог в советское время! Каждая знает, что при одном из способов приготовления часть жидкости выкипает. Сколько? Не дано. А какой учащийся вообще представляет, как творог делается и что такое сыворотка? Откуда ему знать, что больше при этом ничего не получается? Авторы, судя по всему, считают, что сумма масс творога и сыворотки равна массе взятого молока. Тогда всё становится «тривиальным» и под силу любому школьнику!

Если x – масса получившегося творога (в кг), а y – масса сыворотки, то

$$\begin{cases} x+y=1000, \\ 0,155x+0,005y=0,05\cdot 1000. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1000-x, \\ 31x+1000-x=10000. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1000-x, \\ 30x=9000. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=700, \\ x=300. \end{cases}$$

Ответ. 300.

Вторая часть текстовых задач более понятна учащимся – это чисто математическая задача: решить полученные уравнения или неравенства. Затруднения здесь чаще всего возникают, если эта математическая задача им практически не встречалась в школьном учебнике. Что же это за задачи? Это прежде всего ситуация, когда число уравнений меньше числа неизвестных, например, одно уравнение, а искомых величин несколько. Такие задачи делятся на два больших класса. В одних на «лишнее» неизвестное просто можно сократить или в задаче надо найти какое-то отношение, поэтому, если ввести это отношение в качестве переменной, то всё будет в порядке, но не всякий школьник это сразу сообразит и будет «раскручивать» задачу с бо́льшим, чем можно, числом переменных. В задачах второго класса, как правило, надо «выискать» из условий задачи какие-то дополнительные ограничения, которые сформулированы «не очень ясно». Это прежде всего задачи, в которых решение уравнения надо искать в целых или натуральных числах. Ведь не секрет, что этому, вообще говоря, в обычной школе не учат совсем. Да, такие задачи иногда не требуют особых вычислений, но надо сообразить, что и как необходимо оценить, а это, как считает автор, требует «олимпиадного» мышления. На обычных уроках такими задачами заниматься нет времени. Иногда в задаче вообще не получается уравнений – одни неравенства, а найти надо число.

Часть первая. Движение по кругу

Как видно из приведённых ниже примеров, задачи на движение по кругу встречаются постоянно. При этом возникают разные задачи: «объекты» двигаются навстречу друг другу или друг за другом, они выходят из одной точки круговой трассы или из разных точек и т. д.

§1. Движение по кругу в одном направлении

Задача 2. (МГУ, 1970, мехмат) Три гонщика стартуют одновременно из одной точки круговой трассы и едут с постоянными скоростями в одном направлении. Первый гонщик впервые догнал второго, делая свой пятый круг, в точке, диаметрально противоположной старту, а через полчаса после этого он вторично, не считая момента старта, догнал третьего гонщика. Второй гонщик впервые догнал третьего через 3 часа после старта. Сколько кругов в час делает первый гонщик, если второй проходит круг не менее, чем за двадцать минут? **Ответ.** 3.

Решение. Основным моментом такого движения является процесс «догоняния». Если все участники начинают движение одновременно из одной точки, то некоторый участник движения обгоняет другого в тот момент, когда проезжает ровно на один круг больше.

Обозначим скорость первого гонщика v_1 кругов в час, второго – v_2 кругов в час, а третьего – v_3 кругов в час. Теперь попробуем записать условия задачи математически.

Первый гонщик впервые догнал второго, делая свой пятый круг, в точке, диаметрально противоположной старту, – значит, первый прошёл 4,5 круга, а второй на один круг меньше:

$$\frac{4,5}{v_1}=\frac{4,5-1}{v_2}\Leftrightarrow v_2=\frac{7}{9}v_1.$$

Через полчаса после этого он вторично, не считая момента старта, догнал третьего гонщика – первый прошёл на 2 круга больше третьего:

$$\left(\frac{4,5}{v_1}+\frac{1}{2}\right)v_1-2=\left(\frac{4,5}{v_1}+\frac{1}{2}\right)v_3. \qquad (1)$$

Второй гонщик впервые догнал третьего через 3 часа после старта – третий прошёл на один круг больше второго:

$$v_3 3+1=v_2 3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_3=\frac{3v_2-1}{3}=\frac{3\cdot\frac{7}{9}v_1-1}{3}=\frac{7}{9}v_1-\frac{1}{3}.$$

Подставим полученное v_3 в (1):

$$\left(\frac{4,5}{v_1}+\frac{1}{2}\right)v_1-2=\left(\frac{4,5}{v_1}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{9}v_1-\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2v_1^2-15v_1+27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v_1=3,\\ v_1=\frac{9}{2}.\end{array}\right.$$

Если $v_1 = 3$, то $v_2 = 3 \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{3} < 3$ удовлетворяет условию задачи; если $v_1 = \frac{9}{2}$, то $v_2 = \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{2} = 3{,}5 > 3$ не удовлетворяет условию задачи.

Отсюда следует, что $v_1 = 3$.

Замечание. Задачу можно, конечно, решать и другими методами, например, вводя в качестве неизвестного не скорость, а время, за которое гонщик проходит круг.

Ответ. 3.

Решим ещё одну задачу, в которой гонщики выезжают уже не из одной, а из разных точек трассы. Эту задачу оформим, используя идею «догоняния» (так же можно оформить решение и предыдущей задачи): если участники движения едут друг за другом, например, второй за первым, находясь первоначально на расстоянии s друг от друга, то второй догонит первого через $\frac{s}{\upsilon_2 - \upsilon_1}$ единиц времени.

Задача 3. (МГУ, 1970, мехмат) Три гонщика *A*, *B*, *C*, стартовав одновременно, едут с постоянными скоростями в одном направлении. В момент старта *B* находился перед *A* на расстоянии 1/3 длины шоссе, а *C* перед *B* на таком же расстоянии. Гонщик *A* впервые догнал В в тот момент, когда *B* закончил свой первый круг, а ещё через 10 минут *A* впервые догнал *C*. Гонщик *B* тратит на круг на 2,5 минуты меньше, чем *C*. Сколько минут тратит на круг гонщик *A*? **Ответ.** 15.

Решение. В момент старта *B* находился перед *A* на расстоянии 1/3 длины шоссе, а *C* перед *B* на таком же расстоянии – рис.1

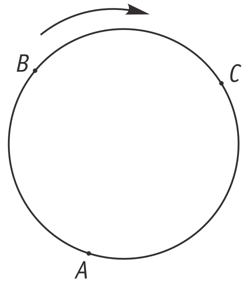

Рис.1

Пусть гонщик *A* тратит на круг t_1 часов, гонщик *B* – t_2 часов, гонщик *C* – t_3 часов. Гонщик *A* впервые догнал *B* в тот момент, когда *B* закончил свой первый круг (значит, гонщик *A* прошёл $\left(1 + \frac{1}{3}\right)$ круга): $t_2 = \frac{4}{3} t_1$, а ещё через 10 минут *A* впервые догнал *C*:

$$t_2 + \frac{1}{6} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4t_1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8t + 1}{2} = \frac{2}{\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_3}}. \qquad (2)$$

Гонщик *B* тратит на круг на 2,5 минуты меньше, чем *C*:

$$t_3 = t_2 + \frac{1}{24} = \frac{4}{3} t_1 + \frac{1}{24} = \frac{32t_1 + 1}{24}.$$

Подставим t_3 в (2):

$$\frac{8t_1 + 1}{2} = \frac{2}{\frac{1}{t_1} - \frac{24}{(32t_1 + 1)}} = \frac{2t_1(32t_1 + 1)}{(8t_1 + 1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64t_1^2 - 12t_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{6 \pm 10}{64},$$

откуда следует, что $t=\frac{1}{4}$ часа $=15$ мин.

Ответ. 15.

Задача 4. (МГУ, 1970, мехмат) Два бегуна стартуют из одной точки кольцевой трассы, а третий бегун стартует одновременно с ними в том же направлении из диаметрально противоположной точки. Пробежав 3 круга, третий бегун впервые после старта догнал второго. Через 2,5 минуты после этого первый бегун впервые обгоняет третьего. Сколько кругов в минуту пробегает второй бегун, если первый обгоняет его один раз через каждые 6 минут? **Ответ.** 0,5.

Решение. Пробежав 3 круга, третий впервые догнал второго:

$$\frac{3}{v_3}=\frac{2,5}{v_2}\Leftrightarrow v_3=\frac{6}{5}v_2.$$

Через 2,5 минуты после этого первый впервые обгоняет третьего:

$$(v_1-v_3)\left(\frac{3}{v_3}+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(v_1-\frac{6}{5}v_2\right)\left(\frac{5}{2v_2}+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\left(v_1-\frac{6}{5}v_2\right)(v_2+1)-v_2=0. \quad (3)$$

Первый обгоняет второго один раз через каждые 6 минут: $v_1 6=v_2 6+1$.

Подставим v_1 в (3):

$$5\left(v_2+\frac{1}{6}-\frac{6}{5}v_2\right)(v_2+1)-v_2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(5-6v_2)(v_2+1)-6v_2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6v_2^2+7v_2-5=0\Leftrightarrow v_2=\frac{-7\pm13}{12},$$

откуда следует, что $v_2=\frac{1}{2}$.

Ответ. 0,5.

Следующая задача о движении по кругу усложнена тем, что скорости участников движения различны на разных участках трассы.

Задача 5. (МФТИ, 1992) Два лыжника бегут по кольцевой лыжне длиной S, 1/6 часть которой проходит по стадиону, а оставшаяся часть – по лесу. Скорость первого лыжника на стадионе равна υ, а в лесу равна 5υ. Скорость второго лыжника на стадионе равна $\frac{8\upsilon}{5}$, а в лесу равна 4υ. Лыжники одновременно вбегают на стадион. Через какое время после этого один из них впервые совершит обгон другого?

Ответ. $\frac{40}{9}\cdot\frac{S}{\upsilon}$.

Решение. Выясним сначала, какой из лыжников быстрее проходит лыжню:

$$t_1=\frac{S}{6\upsilon}+\frac{5S}{6\cdot5\upsilon}=\frac{S}{3\upsilon},$$

$$t_2=\frac{S\cdot5}{6\cdot8\upsilon}+\frac{5S}{6\cdot4\upsilon}=\frac{15S}{6\cdot8\upsilon}=\frac{5S}{16\upsilon}.$$

Отсюда следует, что второй лыжник проходит лыжню быстрее, т. к.

$$\frac{S}{3\upsilon}>\frac{5S}{16\upsilon}\Leftrightarrow t_1>t_2.$$

Где происходит обгон: в лесу или на стадионе? На стадионе, т.к. скорость второго лыжника на стадионе больше скорости первого. Что значит, что происходит обгон? Значит, в этот момент второй лыжник прошёл на один круг больше. Пусть к моменту обгона первый прошёл m полных кругов и «кусок» по стадиону, равный l –ой части лыжни, при этом $0<l<\frac{1}{6}$, т. е. путь по стадиону длиной lS, т. к. обгон – на стадионе:

$$(m+1)\frac{5S}{16\upsilon}+\frac{5l\cdot S}{8\upsilon}=m\frac{S}{3\upsilon}+\frac{l\cdot S}{\upsilon}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\frac{1}{48\upsilon}+\frac{3l}{8\upsilon}-\frac{5}{16\upsilon}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\frac{1}{18}+l-\frac{5}{6}=0\Leftrightarrow l=\frac{5}{6}-\frac{m}{18},\quad \text{но}$$

$$0<l<\frac{1}{6}\Leftrightarrow 0<\frac{5}{6}-\frac{m}{18}<\frac{1}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<15-m<3\Leftrightarrow 12<m<15.$$

Поэтому первый обгон происходит, когда второй прошёл 14 полных кругов, а первый – 13 и оба – часть стадиона, равную

$$S\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{13}{18}\right)=S\cdot\frac{1}{9}.$$

Это происходит в момент

$$t=\frac{S}{\upsilon}\left(\frac{13}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{40}{9}\cdot\frac{S}{\upsilon}.$$

Ответ. $\frac{40}{9}\cdot\frac{S}{\upsilon}$.

Задача 6. (МГУ, 2005, биофак) На беговой дорожке стадиона длиной 400м одновременно со старта в одном направлении начали забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из низ бежал со своей постоянной скоростью. Первый спортсмен пришёл на финиш на 16 мин 40 с раньше второго, а второй спортсмен приходит к финишу через 42 мин 40 с после того, как его в третий раз на дистанции (не считая старта) обогнал первый спортсмен. Известно, что скорость первого больше 180 м/мин. Сколько всего раз первый спортсмен обгонял второго на дистанции после старта? **Ответ.** 6.

Решение. Пусть первый спортсмен за 1 мин пробегает ν_1 частей круга, а второй – ν_2 частей круга. Первый спортсмен пришёл на финиш на 16 мин 40 с раньше второго:

$$\frac{25}{\nu_1}+16\frac{2}{3}=\frac{25}{\nu_2}\Leftrightarrow\frac{1}{\nu_1}+\frac{2}{3}=\frac{1}{\nu_2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\nu_2=\frac{3\nu_1}{2\nu_1+3}. \qquad (1)$$

Первый спортсмен пришёл на финиш через (42 мин 40 с – 16 мин 40 с) $=$ $=26$ мин после того, как в третий раз на дистанции (не считая старта) обогнал второго спортсмена, т. е. на обгон в 3 круга он потратил $\frac{3}{\nu_1-\nu_2}$ мин и ещё бежал 26 мин: $\frac{3}{\nu_1-\nu_2}=\frac{25}{\nu_1}-26$.

Подставим в это уравнение ν_2:

$$\frac{3}{\nu_1-\frac{3\nu_1}{2\nu_1+3}}=\frac{25}{\nu_1}-26\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3(2\nu_1+3)}{2\nu_1^2}=\frac{25}{\nu_1}-26\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 52\nu_1^2-44\nu_1+9=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\nu_1=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2},\\ \frac{9}{26}.\end{array}\right.$$

Известно, что скорость первого больше 180 м/мин, что эквивалентно $\frac{180}{400}=\frac{9}{20}$ частей круга в мин, но $\nu_1=\frac{9}{26}<\frac{9}{20}$, а $\nu_1=\frac{1}{2}>\frac{9}{20}$, значит, $\nu_1=\frac{1}{2}$. При этом, если первый обгон происходит через

x кругов, то, по условию, $\dfrac{25-3x}{\frac{1}{2}}=26\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4$, т. е. первый обгоняет второго через каждые 4 круга. Отсюда следует, что обгонов было $\left[\dfrac{25}{4}\right]=6$.

Ответ. 6.

Задача 7. (МГУ, 1988, мехмат) Два бегуна стартовали раздельно в одной точке стадиона в беге на 25 кругов, причём второй начал движение, когда первый прошёл полкруга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда бегуны были рядом. Когда через 13 минут он вернулся, бегуны снова были рядом. Если бы первый бегун после третьего круга увеличил скорость в 2 раза, а второй бегун после десятого круга – в 3 раза, то оба бегуна финишировали бы одновременно. Определите, с какой разницей во времени финишировали бегуны, если закончивший бег вторым пробегал за минуту менее круга.

Ответ. $\dfrac{26}{9}$.

Решение. Обозначим скорость первого бегуна u кругов в минуту, а скорость второго бегуна υ кругов в минуту.

1. Запишем условие – «если бы первый бегун после третьего круга увеличил скорость в 2 раза, а второй бегун после десятого круга – в 3 раза, то оба бегуна финишировали бы одновременно» – математически:

$$\frac{3}{u}+\frac{22}{2u}=\frac{1}{2u}+\frac{10}{\upsilon}+\frac{15}{3\upsilon}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{u}+\frac{11}{u}-\frac{1}{2u}=\frac{15}{\upsilon}\Leftrightarrow\frac{27}{2u}=\frac{15}{\upsilon}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{9}{2u}=\frac{5}{\upsilon}\Leftrightarrow 9\upsilon=10u\Leftrightarrow\upsilon=\frac{10u}{9}.$$

2. Теперь выясним, кто финишировал первым: первый пришёл через $\dfrac{25}{u}$ минут, а второй – через $\dfrac{25}{\upsilon}+\dfrac{1}{2u}$ минут после старта первого. Разность во времени равна

$$\frac{25}{u}-\left(\frac{25}{\upsilon}+\frac{1}{2u}\right)=\frac{49}{2u}-\frac{25\cdot 9}{10u}=$$

$$=\frac{49}{u}-\frac{45}{2u}=\frac{2}{u},$$

откуда следует, что вторым пришёл к финишу первый бегун, поэтому $u<1$.

3. Как теперь описать математически тот факт, что «один из зрителей, выходя со стадиона, видел бегунов рядом, а когда через 13 минут он вернулся, бегуны снова были рядом»? Это школьнику даётся труднее всего. На самом деле это означает, что за это время разность пройденных расстояний является целым числом кругов, т.е. $13(\upsilon-u)=13\cdot\dfrac{u}{9}$ является натуральным числом. Но так как $u<1$, то $13\cdot\dfrac{u}{9}<\dfrac{13}{9}<$ <2, а значит, $13\cdot\dfrac{u}{9}=1\Leftrightarrow u=\dfrac{9}{13}$, откуда следует, что разница во времени равна $\dfrac{2}{u}=\dfrac{26}{9}$.

Ответ. $\dfrac{26}{9}$.

§2. Движение по кругу в противоположных направлениях

Задача 8. (МГУ, 1999, биофак) Два велосипедиста стартуют одновременно из двух точек круговой велотрассы: первый из точки A, второй – из точки B

и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из их первых 15 встреч на трассе только третья и пятнадцатая состоялись в точке B. Найдите отношение скорости первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что к моменту их пятой встречи каждый проехал не менее одного круга.

Ответ. $\frac{7}{5}$.

Решение. Обозначим скорость первого велосипедиста буквой u, а второго – υ.

1. Из того, что из первых 15 встреч на трассе третья и пятнадцатая состоялись в точке B, следует, что за это время каждый из велосипедистов проехал целое число кругов, т.к. они выезжали из B и возвратились в B.

2. Первая встреча происходит в некоторой точке C_1, когда велосипедисты проезжают AC_1B. Вторая встреча происходит в некоторой точке C_2 – теперь велосипедисты вместе проезжают ровно один круг (рис.2). И так между любыми двумя последовательными встречами. Поэтому от 3-ей до 15-ой встречи вместе они проехали ровно 12 кругов: один – m, другой – n и $m+n=12$. Отсюда следует, что и отношение скоростей $\frac{u}{\upsilon}$ – это отношение $\frac{m}{n}$.

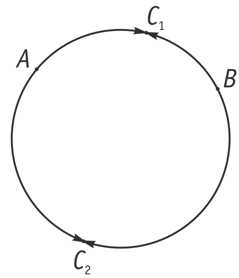

Рис.2

Представим число 12 в виде суммы двух натуральных чисел:

$$1+11,$$
$$2+10,$$
$$3+9,$$
$$4+8,$$
$$5+7,$$
$$6+6.$$

Видно, что две пары – это суммы взаимно простых чисел, а слагаемые в остальных парах содержат общий множитель. Рассмотрим сначала эти пары.

Если $\frac{m}{n}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, то до следующей встречи велосипедисты вместе проедут 6 кругов, а по условию, только третья и пятнадцатая состоялись в точке B.

Если $\frac{m}{n}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, то до следующей встречи велосипедисты вместе проедут 4 круга.

Если $\frac{m}{n}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, то до следующей встречи велосипедисты вместе проедут 3 круга.

Если $\frac{m}{n}=\frac{6}{6}=\frac{1}{1}$, то до следующей встречи велосипедисты вместе проедут 2 круга.

Если $\frac{m}{n}=\frac{1}{11}$, то до следующей встречи велосипедисты вместе проедут как раз 12 кругов, но, по условию, к моменту их пятой встречи каждый проехал не менее одного круга.

Остался один вариант: $\frac{m}{n}=\frac{5}{7}$. Отсюда следует, что или $\frac{u}{\upsilon}=\frac{5}{7}$, или $\frac{u}{\upsilon}=\frac{7}{5}$.

3. Обозначим буквой l часть круга AC_1B, $0<l<1$. Что происходит в момент 3-ей встречи со вторым велосипедистом? Он выехал из B и вернулся в этот момент в B – значит, он проехал целое число кругов, меньшее 3 (они вместе проехали $2<l+2<3$). Найдём это расстояние.

Если $\frac{u}{\upsilon}=\frac{7}{5}\Leftrightarrow\frac{\upsilon}{u}=\frac{5}{7}$, то он проехал $\frac{5}{7}(l+2)=1+\frac{3+5l}{7}$, условию удовлетворяет $l=\frac{4}{5}$.

Если $\frac{u}{\upsilon}=\frac{5}{7}\Leftrightarrow\frac{\upsilon}{u}=\frac{7}{5}$, то он проехал

$$\frac{7}{5}(l+2)=\frac{7l+14}{5}=2+\frac{4+7l}{5}$$

полных кругов, но это число не может быть и целым, и меньше 3. Следовательно, $\frac{u}{\upsilon}=\frac{7}{5}$.

Ответ. $\frac{7}{5}$.

Часть вторая. Прямолинейное движение

§1. Задачи, которые могут быть решены практически устно

При решении задач на прямолинейное движение обычно рисуется прямая, вдоль которой кто–то или что–то движется. В этой заметке при решении таких задач мы *отклонимся* от обычной схемы рассуждений.

Задача 9. (МГУ, 1978, психфак; ГФА) Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км от них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист? **Ответ**. 2.

Решение. Мы будем решать задачу не как всегда – не на оси «от A до B», а в *плоскости* $(t;s)$. Направим ось Os вдоль шоссе, по которому движутся наши «объекты».

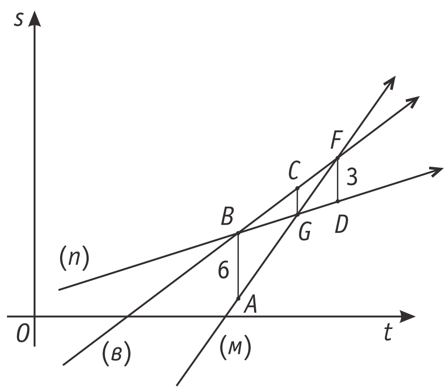

Рис. 3

Пешеход движется по прямой BD – у него самая маленькая скорость, а потому «его прямая» имеет самый маленький наклон к оси Ot, велосипедист движется по прямой BF и мотоциклист – по AF (рис.3). В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке B, мотоциклист был на расстоянии 6 км от них: $AB=6$. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста в точке F, пешеход отставал от них на 3 км – находился в точке D. Мотоциклист настиг пешехода в точке G, велосипедист в это время обогнал пешехода на «GC».

Видно, что треугольники ABG и FGD подобны с коэффициентом 2, треугольники FBD и CBG тоже подобны, но с коэффициентом 3/2, т. к.

$$\frac{BA}{FD}=\frac{6}{3}=\frac{BG}{GD}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{FD}{GC}=\frac{BD}{BG}=\frac{3}{2}\Rightarrow GC=\frac{2}{3}FD=2.$$

Как замечательно, что решение задачи получилось без введения каких бы то ни было неизвестных скоростей и моментов встречи участников движения! (Сравните с решениями этой задачи, предложенными в книге Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К. Задачи вступительных экзаменов по математике, Наука, 1986).

Ответ. 2.

Может быть, это единичный случай, когда задача на движение решается так просто чисто геометрически? Оказывается, нет. Рассмотрим ещё примеры.

Задача 10. (МГУ, 2006, олимпиада «Ломоносов») Игорь вышел из школы в 17^{00} и побежал домой, а через некоторое время из дома в школу пошёл его отец. Игорь прибежал домой через 4 минуты после выхода оттуда отца. Отец пришёл в школу в 17^{10} того же дня. Скорости Игоря и отца постоянны. Найдите, какую долю пути из школы пробежал Игорь до его встречи с отцом. **Ответ**. 5/7.

Решение. «Нарисуем» условия задачи в плоскости $(t;s)$: AF – движение Игоря, DC – движение отца; $DF=4$ мин, $AC=10$ мин (рис.4).

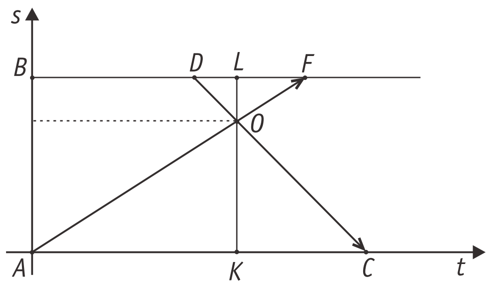

Рис. 4

Треугольник AOC подобен треугольнику DOF с коэффициентом 5/2, а тогда и

$\frac{OK}{OL}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{OK}{AB}=\frac{5}{7}$, т. е. Игорь до его встречи с отцом пробежал 5/7 всего пути.

Ответ. 5/7.

Задача 11. (Московский государственный университет дизайна и технологий) Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми равно 210 км. Первый автомобиль прибыл в B через 2 часа после момента встречи, а второй прибыл в A через 1,125 часа после момента встречи. Найдите сумму скоростей автомобилей. **Ответ**. 140.

Решение. «Нарисуем» условия задачи в плоскости $(t;s)$: AC – движение первого автомобиля, BD – движение второго автомобиля; $EC=2$, $FD=1{,}125$ (рис.5).

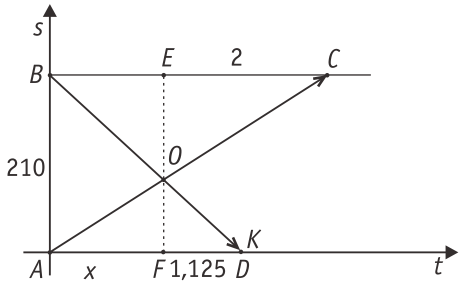

Рис.5

Пусть $BE = AF = x$ (часов) – время до встречи. Так как треугольник AOF подобен треугольнику EOC, а треугольник FOD подобен треугольнику BOE с одним и тем же коэффициентом подобия, равным отношению $FO:OE$, то

$$\frac{x}{2} = \frac{1,125}{x} \Leftrightarrow x^2 = 2,25 \Rightarrow x = 1,5.$$

Отсюда следует, что сумма скоростей равна $\frac{210}{1,5} = 140$, т.к. до встречи был пройден весь путь за 1,5 часа.

Ответ. 140.

Задача 12. (Московский строительный университет) Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B. Первый вышел из A, второй – из B. Они встретились через 3 часа. Найдите время, за которое первый прошёл расстояние от A до B, если первый пришёл в B на 2,5 часа позже, чем второй пришёл в A. **Ответ**. 5.

Решение. «Нарисуем» условия задачи в плоскости $(t;s)$: AF – движение первого пешехода, BD – движение второго пешехода; $AC = 3$, $GF = 2,5$ (рис.6).

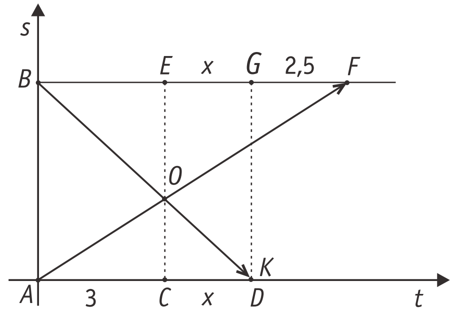

Рис.6

Так как треугольник AOC подобен треугольнику EOF, а треугольник COD подобен треугольнику BOE с одним и тем же коэффициентом подобия, равным отношению $OC:OE$, то

$$\frac{AC}{EF} = \frac{CD}{BE} \Leftrightarrow \frac{3}{x+2,5} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2,5x - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 + 25x - 90 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 + 25x - 90 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 13}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 2$. Первый прошёл расстояние от A до B за $3 + 2 = 5$ часов.

Ответ. 5.

Задача 13. (МГУ, 2004, мехмат) Дорога проходит последовательно через пункты A, B, C и D. Расстояние от B до C равно 12 км. Из A в D выехал с постоянной скоростью мотоциклист. Одновременно с ним из B в D отправились с постоянными скоростями пешеход и велосипедист. Когда мотоциклист догнал пешехода, велосипедист обгонял их на 6 км. В пункте C мотоциклист догнал велосипедиста и, доехав до D, сразу поехал обратно в A, встретившись с пешеходом во второй раз в C. Найдите расстояние между A и B, если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи мотоциклиста и пешехода в 4 раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда мотоциклист впервые догнал велосипедиста.

Ответ. 18.

Решение. «Нарисуем» условия задачи в плоскости $(t;s)$: AM – движение мотоциклиста, BV – движение велосипедиста, BP – движение пешехода; $BC=12$, $EF=6$, $AK=t$, $AL=4t$ (рис.7). Треугольник BCP подобен треугольнику HGP, с коэффициентом подобия, равным 4/3:

$$\frac{CP}{GP}=\frac{AL}{KL}=\frac{BC}{GH}=\frac{4t}{3t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{12}{GH}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow GH=9.$$

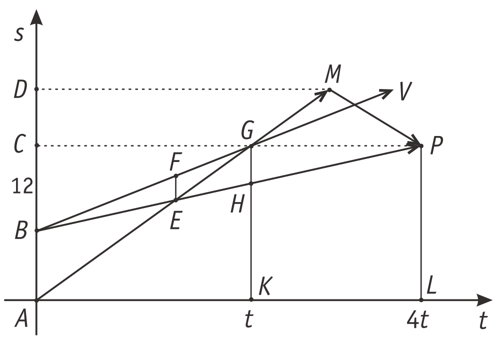

Рис.7

Треугольник GBH подобен треугольнику BFE с коэффициентом подобия, равным $\frac{GH}{EF}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=\frac{BH}{BE}$, поэтому $BE==2EH$ и коэффициент подобия треугольников ABE и HEG равен $\frac{BE}{EH}=\frac{2}{1}$:

$$\frac{BA}{GH}=\frac{BE}{EH}=\frac{2}{1}\Rightarrow BA=18.$$

Ответ. 18.

§2. Более сложные задачи

Идея рассмотрения условий задачи в плоскости, конечно, не всегда даёт такие потрясающие результаты. Однако построить картину в плоскости иногда полезно и тогда, когда задача графически так просто не решается, но анализ движения в этой плоскости может подсказать, какие уравнения и неравенства надо составить. Сама идея может быть использована не только для прямолинейного движения с постоянными скоростями, но и в задачах на «производительность».

Задача 14. (МГУ, 2003, биофак) Три бассейна D, F и G одинакового объёма заполняли водой из труб с постоянными скоростями. Бассейны D и G начали заполнять одновременно, а бассейн F позднее. Первым был заполнен бассейн D. Через 20 минут после начала заполнения бассейна F объём воды в нём сравнялся с объёмом воды в бассейне G. Бассейн F был заполнен через 80 минут после начала заполнения бассейнов D и G и за 40 минут до окончания заполнения бассейна G. Найдите, на сколько минут позже начали заполнять бассейн F, чем бассейны D и G, если известно, что бассейн F заполнялся в 5/3 раза быстрее бассейна D. **Ответ.** 40.

Традиционное решение задачи

Пусть бассейн F включили через t часов после D и G. Обозначим скорость заполнения бассейна D буквой u, а бассейна G – буквой υ, тогда скорость заполнения бассейна F равна $\frac{5u}{3}$. Через 20 минут после начала заполнения бассейна F объём воды в нём сравнялся с объёмом воды в бассейне G:

$$\frac{5u}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(t+\frac{1}{3}\right)\upsilon\Leftrightarrow\frac{5u}{9\upsilon}=\frac{1}{3}+t. \quad (1)$$

Бассейн F был заполнен через 80 минут после начала заполнения бассейна D:

$$V=\frac{5u}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}-t\right)$$

и за 40 минут до окончания заполнения бассейна G:

$$\frac{5u}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}-t\right)=\upsilon\cdot 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5u(4-3t)=18\upsilon\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{5u}{9\upsilon}(4-3t)=2\upsilon .$$

Подставим из (1) $\frac{5u}{9\upsilon}$:

$$(4-3t)\left(t+\frac{1}{3}\right)=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9t^2-9t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\frac{2}{3},\\ t=\frac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Для отбора корней воспользуемся условием того, что первым был заполнен бассейн D. Бассейн F заполнился через 80 минут после начала заполнения бассейна D, а из условий заполнения бассейна F видно, что $V=\frac{5u}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}-t\right)$, откуда следует, что бассейн D заполнится через $\frac{V}{u}=\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}-t\right)$ часов.

Если $t=\frac{2}{3}$ (или 40 мин), то

$\frac{V}{u}=\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{9}<\frac{4}{3}$ – всё в порядке.

Если $t=\frac{1}{3}$ (или 20 мин), то

$$\frac{V}{u}=\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}>\frac{4}{3},$$

т. е. бассейн F заполнится раньше, что противоречит условию задачи.

Ответ. 40.

Нетрадиционное решение задачи

Решение. «Нарисуем» условия задачи в плоскости $(t;y)$, в которой по оси Oy будем откладывать объём: OV – объём бассейнов, OD – наполнение бассейна D со скоростью u, OG – наполнение бассейна G со скоростью v, AF – наполнение бассейна F со скоростью $5/3u$, $AB=1/3$(часа), $VF=4/3$(часа), $FG=2/3$(часа). Обозначим искомую величину буквой x: $OA=x$ (рис.8).

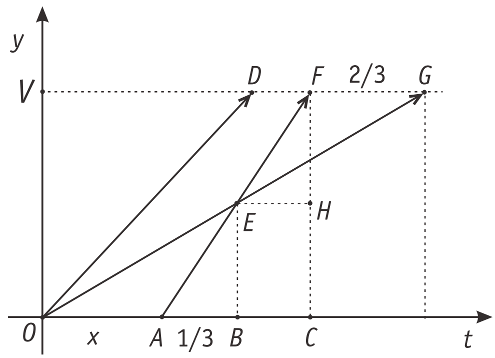

Рис.8

Воспользуемся подобием треугольников OEA и FEG, AEB и EFH:

$$\frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{AE}{EF}=\frac{AB}{EH}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x}{2}=\frac{1}{3-3x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-9x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3},\\ x=\frac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Выберем решение, исходя из условия, что первым был заполнен бассейн D.

Если $x=\frac{2}{3}$, то бассейн F заполнился за 2/3 часа: $\frac{5}{3}u\cdot\frac{2}{3}=u\cdot\frac{10}{9}$, т. е. бассейн D заполнится за $\frac{10}{9}$ часа и $\frac{10}{9}<\frac{4}{3}$ – условие задачи выполнено.

Если же $x=\frac{1}{3}$, то бассейн F заполнился за $4/3-1/3=1$ час, а тогда $\frac{5}{3}u\cdot 1=u\cdot\frac{5}{3}$,

т.е. бассейн D заполнится за $\frac{5}{3}$ часа, но $\frac{5}{3}>\frac{4}{3}$, что противоречит условию задачи.

Ответ. 40.

Следующая задача решается традиционно, но картинку движения мы нарисуем в плоскости, а не на прямой.

Задача 15. (МГУ, 1979, химфак) Пункты A, B, C удалены от пункта M соответственно на 60, 55, и 56 км. Одновременно из этих пунктов в пункт М вышли три пешехода: первый – из A, второй – из B, третий – из C. Первый прошёл весь путь с постоянной скоростью и прибыл в M на 2 часа раньше второго и третьего, прибывших одновременно. Второй пешеход, пройдя 40 км с той же скоростью, что и первый, сделал остановку на 1 час. Остаток пути он прошёл со скоростью, которая меньше скорости третьего пешехода на столько же, на сколько скорость третьего меньше скорости первого. Третий пешеход весь путь прошёл с постоянной скоростью. Определить скорости первого и третьего пешеходов. **Ответ.** 5; 4.

Решение. Пусть скорость первого пешехода равна υ км/ч, третьего – $(\upsilon-a)$ км/ч. Теперь все условия задачи можно нарисовать в плоскости $(t;s)$ – рис.9.

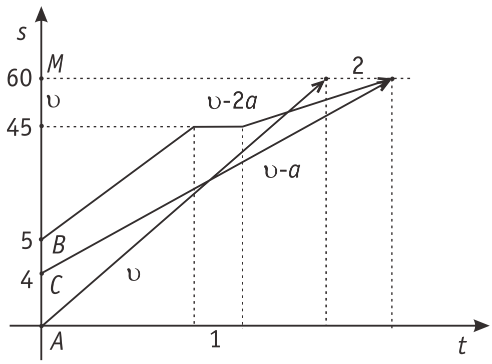

Рис.9

Условия задачи записываются в систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{60}{\upsilon}+2=\frac{56}{\upsilon-a},\\ \frac{40}{\upsilon}+1+\frac{15}{\upsilon-2a}=\frac{56}{\upsilon-a}.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{60}{\upsilon}+2=\frac{56}{\upsilon-a},\\ \frac{40+\upsilon}{\upsilon}+\frac{15}{\upsilon-2a}=\frac{60+2\upsilon}{\upsilon}.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\upsilon^2+4\upsilon-60a-2a\upsilon=0,\\ \upsilon^2+5\upsilon-40a-2a\upsilon=0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{\upsilon^2-\upsilon}{20},\\ \upsilon^2+5\upsilon-40a-2a\upsilon=0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\upsilon^2 - \upsilon}{20}, \\ \upsilon^2 + 9\upsilon - 70 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\upsilon^2 - \upsilon}{20}, \\ \upsilon = \dfrac{-9 \pm 19}{2}. \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \upsilon = 5, a = 1$. Отсюда следует, что скорость первого пешехода равна 5, а скорость третьего пешехода равна 4.

Уравнения для *данной* задачи также просто составляются обычным способом и совпадают с рассмотренными.

Ответ. 5; 4.

Задача 16. (МГУ, 2005, мехмат) Согласно расписанию автобус курсирует по маршруту из пункта A в пункт B и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из A в B он вынужден был сделать остановку, поэтому на обратном пути увеличил скорость на 25%. Приехав в A с 10-минутным отклонением от расписания, он уменьшил последнюю скорость на 24% и прибыл в B вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки (в минутах)? **Ответ.** 28.

Решение. В этой задаче мы составим обычные уравнения, но картинку нарисуем в плоскости, хотя никаких «подобий» использовать не будем. На взгляд автора, получилась очень ясная и понятная картина движения. По ней легко составлять уравнения. Конечно, можно было ограничиться и прямой.

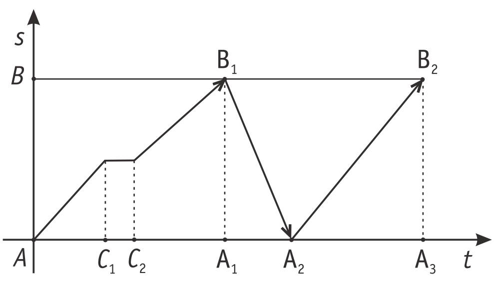

Рис.10

Не будем мудрить, введём обычные обозначения. Пусть υ – первоначальная скорость движения автобуса,

$t = \dfrac{AB}{\upsilon}$, $C_1C_2 = \Delta t$, тогда $AA_1 = t + \Delta t$,

$A_1A_2 = \dfrac{AB}{\frac{5}{4}\upsilon} = \dfrac{4}{5}t$, $A_2A_3 = \dfrac{AB}{\frac{5}{4}\upsilon \cdot 0{,}76} = \dfrac{20}{19}t$,

$AA_3 = 3t$. Запишем условия задачи математически:

$$\begin{cases} t + \Delta t + \dfrac{4}{5}t + \dfrac{20}{19}t = 3t, \\ \left| t + \Delta t + \dfrac{4}{5}t - 2t \right| = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta t = \dfrac{14}{5 \cdot 19}t, \\ \left| \Delta t - \dfrac{t}{5} \right| = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta t = \dfrac{14t}{5 \cdot 19}, \\ \left| \dfrac{t}{19} \right| = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta t = \dfrac{7}{15}, \\ t = \dfrac{19}{6}. \end{cases}$$

Итак, остановка продолжалась 7/15 часа, т. е. 28 минут.

Ответ. 28.

В последние годы на вступительных экзаменах в МГУ постоянно появляются на различных факультетах очень разные и интересные задачи на движение.

§3. Интересная задача

Приведём пример ещё одной задачи, в которой мы будем действовать традиционно, но постановка которой сильно отличается от обычно встречающихся.

Задача17. (МГУ, олимпиада «Ломоносов», 2005) Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин катались на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против – в общей сложности не менее, чем по 1 часу. В итоге лодка прошла весь путь в 40 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 10 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость её течения? **Ответ.** 8.

Решение. Пусть от A до B лодка плыла t часов, тогда от B до A она плывёт $\left(\frac{8}{3}-t\right)$ часов, причём, по условию

$$\begin{cases} t\ge 1, \\ \frac{8}{3}-t\ge 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1, \\ t\le \frac{5}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow 1\le t\le \frac{5}{3}.$$

Обозначим скорость лодки в стоячей воде буквой u, а скорость реки буквой υ, причём скорость реки может быть как положительным, так и отрицательным числом, т. к. направление течения неизвестно. Тогда условия задачи запишутся в виде:

$$\begin{cases} (u+\upsilon)t+(u-\upsilon)\left(\frac{8}{3}-t\right)=40, \\ (u+\upsilon)t-(u-\upsilon)\left(\frac{8}{3}-t\right)=10. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{25}{t}-\upsilon, \\ (u-\upsilon)\left(\frac{8}{3}-t\right)=15. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{25}{t}-\upsilon, \\ \left(\frac{25}{t}-2\upsilon\right)\left(\frac{8}{3}-t\right)=15. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{25}{t}-\upsilon, \\ \upsilon=\dfrac{20\left(\frac{5}{3}-t\right)}{3t\left(\frac{8}{3}-t\right)}. \end{cases}$$

Так как $t\le \frac{5}{3}$, то из формулы для υ следует, что $\upsilon\ge 0$, т. е. река течёт от A к B. Осталось найти максимально возможное значение для υ. Найдём производную функции

$$\upsilon(t)=20\cdot\frac{5-3t}{8\cdot t-3t^2}:$$

$$\upsilon'=20\cdot\frac{-3\left(8t-3t^2\right)-(5-3t)(8-6t)}{\left(8t-3t^2\right)^2}=$$

$$=-20\cdot\frac{9t^2-30t+40}{\left(8t-3t^2\right)^2}<0.$$

Производная отрицательна при всех t, значит, максимальное значение достигается при $t=1$ (по условию, $1\le t$), т.е.

$$\upsilon_{max}=\frac{60(5-3)}{8\cdot 3-(3)^2}=8.$$

Ответ. 8.

Заключение

Чтобы читатели смогли проверить эффективность рассмотренных (но вовсе не новых!) методов, предлагаем (чего обычно автор не делает) сделать несколько подобных задач самостоятельно.

1. (МГИК, 1998, Московский государственный институт коммерции) Из пункта A в пункт B в 9 ч отправился пешеход, а в 10 ч 30 мин – велосипедист. В 13 ч велосипедист догнал пешехода, а в 18 ч приехал в пункт B. Найдите, в котором часу в пункт B пришёл пешеход. **Ответ**. 21.

2 . (МГУ, 2006, олимпиада «Ломоносов») Пехотинец вышел из пункта A в пункт B в 10 ч, а через некоторое время из B в A выехал танкист и приехал в A в 14 ч того же дня. Скорости танкиста и пехотинца постоянны. Пехотинец пришёл в B через 6 часов после выезда оттуда танкиста. Найдите, какую часть пути из A в B прошёл пехотинец до его встречи с танкистом. **Ответ**.0,4.

3. (МГУ, 1978, психфак) По шоссе с постоянными скоростями движутся пешеход, а навстречу ему – велосипедист и мотоциклист. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был на расстоянии 8 км от них. В тот момент, когда мотоциклист встретил пешехода, велосипедист отставал от мотоциклиста на 4 км. На сколько километров мотоциклист будет обгонять велосипедиста в тот момент, когда пешеход встретится с велосипедистом? **Ответ**. 8.

4. (Приложение к «Кванту», 1993) Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а ещё через 30 мин – мотоциклист. Пешеход, мотоциклист и велосипедист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста? **Ответ**. 48.

5. (МГУ, 1992, ВМ и К) Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A по той же дороге выехал мотоциклист. Скорости автомобиля и мотоциклиста постоянны. Автомобиль до встречи с мотоциклистом находился в пути 7 ч 30 мин, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа. Мотоцикл прибыл в A в 23 ч, а автомобиль прибыл в B в 16 ч 30 мин. Найдите время отправления мотоцикла из города B. **Ответ**. 11.

6. (МГУ, 2003, биофак) Три мотоциклиста A, B и C участвовали в показательном заезде, двигаясь по трассе от старта до финиша с постоянными скоростями. Мотоциклисты A и C стартовали одновременно, а мотоциклист B спустя некоторое время. Первым к финишу пришёл мотоциклист A. Мотоциклист B через 1 час после своего старта догнал мотоциклиста C на трассе и прибыл на финиш через 4 часа после старта мотоциклистов A и C и за 2 часа до финиша мотоциклиста C. Найдите отношение скорости мотоциклиста A к скорости мотоциклиста C, если известно, что мотоциклист A двигался в 8/5 раза медленнее мотоциклиста B. **Ответ.** 15/8.