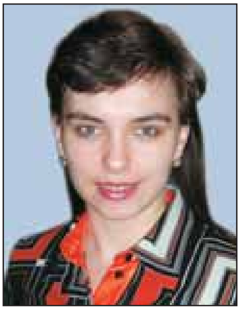


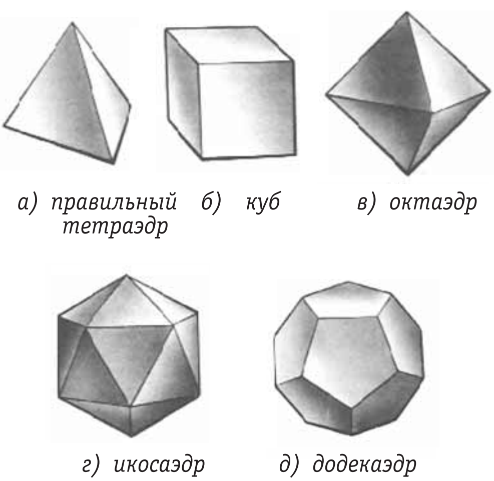
Иевлева Людмила Георгиевна
Учитель математики школы с лицейскими классами № 20 Юго-западного административного округа г. Москвы. Закончила МПГУ, имеет степень «Магистра образования». Является автором методических статей.

Теорема Эйлера и её приложения

I. История изучения теории многогранников

Теория многогранников – один из древнейших разделов математики. Многогранники выделяются своими интересными свойствами, красивыми формами, имеют богатую и древнюю историю. Многогранники были известны в древнем Египте и Вавилоне ещё за 3000 лет до н. э. Ярким примером являются знаменитые египетские пирамиды и самая известная из них – пирамида Хеопса.

Изучением многогранников начали заниматься ещё в VI – V веках до н. э. в Древней Греции, в так называемых философских школах. Одной из таких школ была Пифагорейская, основателем которой был знаменитый ***Пифагор*** (ок. 570 – 500 до н. э.). Именно школе Пифагора приписывают открытие существования пяти правильных выпуклых многогранников (рис 1.). Позже, другой древнегреческий философ ***Платон*** (427 –347 г.г. до н. э.) рассматривал эти пять правильных многогранников в своей космологической теории. Согласно этой теории, элементы первоосновы бытия – огонь, земля, воздух, вода – имели форму правильных многогранников, соответственно правильного тетраэдра, куба, октаэдра и икосаэдра.



а) правильный тетраэдр *б) куб* *в) октаэдр*

г) икосаэдр *д) додекаэдр*

Рис. 1

Правильный додекаэдр был моделью всей Вселенной. С тех пор правильные многогранники стали называться платоновыми телами.

Изучением многогранников занимался ***Архимед*** (ок. 287 – 212 до н. э.). В своей работе «О многогранниках» он подробно описывает многогранники, гранями которых являются правильные, но не одноимённые многоугольники, а в каждой вершине, как и у правильных многогранников, сходится одно и то же число рёбер. Это так называемые полуправильные многогранники, получившие название архимедовых тел. Великие художники ***Альбрехт Дюрер*** (1471 – 1528) и ***Леонардо да Винчи*** (1452 – 1519) занимались изучением многогранников, изображали их на своих полотнах. Например, на знаменитой гравюре А. Дюрера «Меланхолия» среди атрибутов геометрии и зодчества на переднем плане изображён додекаэдр. Леонардо да Винчи проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга монаха Луки Пачоли, которая называется «О божественной пропорции» (1509).

Теория многогранников получила развитие в трудах ***Леонарда Эйлера*** (1707 – 1783), которые оказали решающее влияние на многие разделы математики.

Восемнадцатый век в области математики – это век Эйлера. Нет, пожалуй, ни одной значительной области математики, в которой не оставил бы свой след один из величайших математиков, гений XVIII века Леонард Эйлер. Эйлер не был русским по рождению, однако мы с полным правом называем этого величайшего математика нашим отечественным учёным: более 30 лет он жил и работал в России. Он был приглашён в Петербургскую Академию в возрасте 20 лет, где нашёл все необходимые условия для большой научной деятельности и широкие возможности для публикации своих трудов.

Ставшая знаменитой его теорема о числе граней, вершин и рёбер выпуклого многогранника была доказана им в 1752 году. С теоремы Эйлера начинается развитие современной научной теории многогранников.

II. Выпуклые многогранники

Среди плоских и пространственных фигур выделяют ***выпуклые*** фигуры. Это такие фигуры, которые вместе с любыми двумя своими точками целиком содержат и соединяющий их отрезок. Так, на рисунке 2 среди плоских фигур выпуклыми являются фигуры *а* и *в*, фигуры *б, г, д* – невыпуклые.

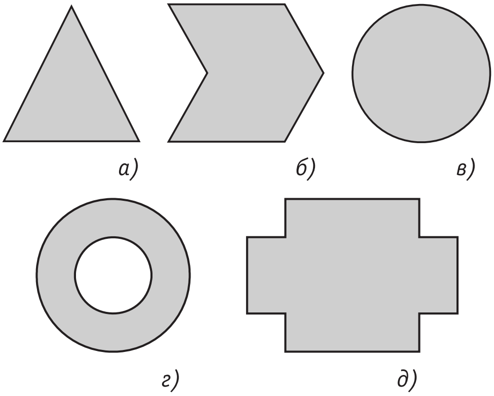


Рис. 2

Многогранник называется **выпуклым,** если он является выпуклой фигурой, то есть вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

Для многогранников справедливо другое – эквивалентное определение: многогранник называется выпуклым, если он весь лежит по одну сторону от плоскости любой его грани.

<u>*Задача*</u>. ***Укажите, какие из многогранников на рисунке 3 являются выпуклыми, а какие – невыпуклыми.***

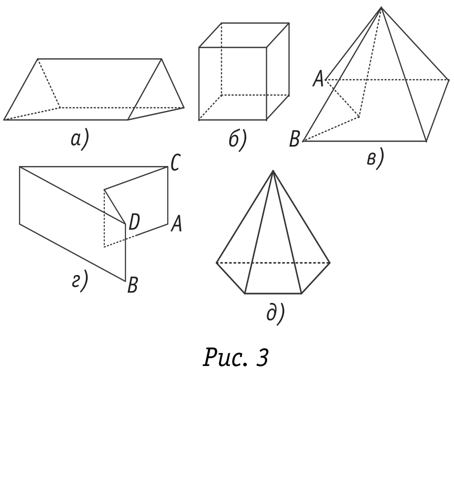


Рис. 3

<u>Решение.</u> Многогранник *в)* невыпуклый, так как не содержит, например, отрезок AB. Многогранник *г)* невыпуклый, так как не содержит, например, отрезок CD. По эквивалентному определению выпуклыми многогранниками являются *а, б, д*.

Выпуклые многогранники обладают необычными свойствами, самое яркое из которых формулируется в теореме Эйлера.

III. Теорема Эйлера и её доказательство

Попробуем установить зависимость между числом вершин, рёбер и граней в некоторых известных нам выпуклых многогранниках.

Рассмотрим, например, модели треугольной, четырёхугольной, пятиугольной пирамид (рис. 4), подсчитаем в них число граней, вершин и рёбер.

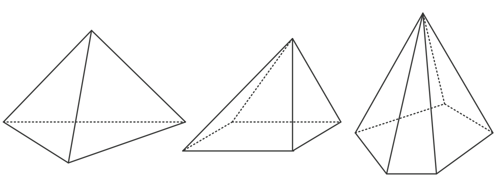


Рис. 4

Сведём наши наблюдения в таблицу:

Вид пирамиды	Число		
	Граней	Вершин	Рёбер
Треугольная	4	4	6
Четырёхугольная	5	5	8
Пятиугольная	6	6	10

Можно заметить, что сумма числа граней и числа вершин не просто больше числа рёбер, а больше на одинаковое во всех случаях число – на два. Если обозначим $В$ – число вершин, $Р$ – число рёбер, $Г$ – число граней, то для всех трёх рассмотренных фигур справедливо равенство $Г + В = Р + 2$, то есть:

«Сумма числа граней и вершин пирамиды равна числу её рёбер, увеличенному на два».

Рассмотрим другие известные нам многогранники: у куба число граней $Г = 6$, число вершин $В = 8$, число рёбер $Р = 12$ и $Г + В = Р + 2$; у треугольной призмы: $Г = 5$, $В = 6$, $Р = 9$ и $Г + В = Р + 2$.

Оказывается, это соотношение справедливо для произвольного выпуклого многогранника, только его записывают в виде $В – Р + Г = 2$.

Это свойство было доказано ***Леонардом Эйлером*** и получило название теоремы Эйлера.

<u>*Теорема Эйлера.*</u> ***Для любого выпуклого многогранника справедливо соотношение В – Р + Г = 2, где В – число вершин, Р – число рёбер, Г – число граней данного многогранника.***

Существует множество различных доказательств теоремы Эйлера. Рассмотрим самый распространённый способ доказательства, берущий своё начало в работе самого Эйлера и развитый в работе французского математика Огюста Коши (1789 – 1857) «Исследование о многогранниках» (1811).

<u>*Доказательство.*</u> Рассмотрим какой–нибудь многогранник $М$, у которого $В$ вершин, $Р$ рёбер, $Г$ граней (рис. 5 *а*).

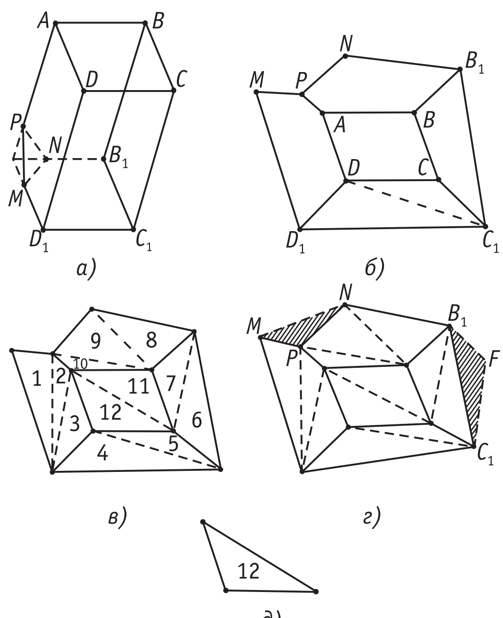


Рис. 5

Вырежем одну из граней этого многогранника ($B_1C_1D_1MPN$). Представим себе, что оставшаяся часть поверхности сделана из эластичного материала (например, резины) и растянем её на плоскость так, чтобы сохранилось число её рёбер, вершин и граней. Тогда на плоскости получится сетка (рис. 5 *б*). Обозначим число вершин сетки буквой *в*, число областей (граней) – *г*, число отрезков между вершинами – *р*. Очевидно, что *в* = *В*, *р* = *Р*, а число граней на единицу меньше, то есть *г* = *Г* – 1.

Докажем, что при некоторых преобразованиях сетки число *в* – *р* + *г* (*) не меняется. Рассмотрим следующие преобразования.

1. Проведём диагональ в некотором многоугольнике сетки, например, DC_1 (рис. 5 *б*). Соотношение (*) не изменится. Действительно, число вершин сетки не изменится, число граней увеличится на 1 и число рёбер увеличится на 1, то есть *в* – (*р* + 1) + (*г* + 1) = *в* – *р* + *г*. Поэтому проведём диагонали так, что сетка разбивается на треугольники (рис. 5 *в*).

2. Присоединим к сетке ещё один треугольник, например, треугольник B_1C_1F к отрезку B_1C_1) (рис. 5 *г*). В этом случае число *в* увеличится на 1, число *г* увеличится на 1, а число *р* увеличится на 2. Тогда (*в* + 1) – (*р* + 2) + (*г* + 1) = *в* – *р* + *г*, то есть выражение (*) не изменится.

3. Построим новый треугольник при входящем угле, например, треугольник *MPN* (рис. 5 *г*). Число *в* не изменится, число *г* увеличится на 1, число *р* увеличится на 1 и, значит, выражение (*) не изменится и в этом случае.

4. Число *в* – *р* + *г* не изменится и при обратной операции – последовательном уничтожении пограничных треугольников. Например, последовательно ликвидируем треугольники, помеченные номерами с 1 по 11 (рис. 5). Остаётся единственный треугольник с номером 12, у которого *в* = 3, *г* = 1, *р* = 3. Следовательно, имеем: *в* – *р* + *г* = 1.

После этого свернём сетку в первоначальную поверхность и добавим к ней удалённую грань. Так как *в* – *р* + *г* = 1, то *В* – *Р* + (*Г* – 1) = 1.

Окончательно, имеем: *В* – *Р* + *Г* = 2.

<u>*Задача*</u>**. *Гранями выпуклого многогранника являются только четырёхугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет: 1)* 12 *рёбер; 2)* 15 *рёбер? Ответьте на те же вопросы, если его гранями являются только треугольники.***

<u>*Решение.*</u> Обозначим число сторон в каждой грани через *a*. По условию *a* = 4. Так как каждое ребро принадлежит двум граням, то $2P = Г \cdot a$, откуда $Г = \frac{2P}{a}$. По теореме Эйлера можно выразить количество вершин:

$$В - Р + Г = 2,$$

$$В = 2 + Р - \frac{2P}{a}.$$

Тогда: 1) при *Р* = 12, *a* = 4 имеем

$$В = 2 + 12 - \frac{2 \cdot 12}{4} = 8.$$

То есть *Г* = 6; *В* = 8; *Р* = 12.

2) а при *Р* = 15, *a* = 4 имеем

$$В = 2 + 12 - \frac{2 \cdot 15}{4} = 6{,}5.$$

Такого многогранника не существует.

Аналогично проводится решение, если гранями выпуклого многогранника являются треугольники. В этом случае получатся следующие ответы:

1) $Г = 8$; $В = 6$; $Р = 12$.

2) $Г = 10$; $В = 7$; $Р = 15$.

Следующие задачи предлагается решить самостоятельно.

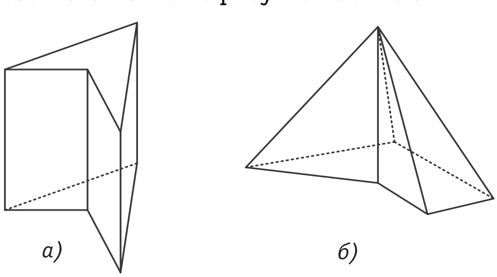
Задача. ***Из каждой вершины выпуклого многогранника выходят три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если Р = 12? Ответьте на этот же вопрос при условии, что из каждой вершины выходят четыре ребра.***

Задача. ***Дан выпуклый многогранник, все грани которого имеют 5, 6, 7 рёбер и в каждой вершине сходятся три ребра. Докажите, что число пятиугольных граней на 12 больше числа семиугольных.***

Теорему Эйлера в истории математики называют первой теоремой топологии – раздела геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек.

Такие свойства фигур называют топологическими. Именно таким свойством многогранников является теорема Эйлера. Многогранник можно как угодно деформировать, при этом рёбра и грани могут искривляться, однако их число, а следовательно, и соотношение Эйлера не меняются.

Леонард Эйлер доказал свою теорему для выпуклых многогранников. Позже было замечено, что формула Эйлера верна не только для выпуклых многогранников, но и для некоторых невыпуклых, например, для призмы и пирамиды, изображённых соответственно на рисунках 6 *а* и 6 *б*.



а) *б)*

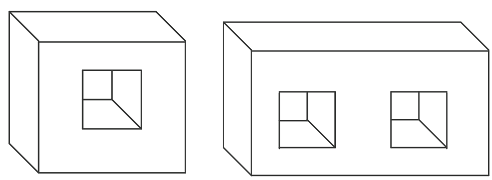
Рис. 6

Для случая *а*: $Г = 6$, $В = 8$, $Р = 12$. Таким образом, $В - Р + Г = 2$.

Для случая *б*: $Г = 6$, $В = 6$, $Р = 10$, то есть

$$В - Р + Г = 2.$$

Величина $В - Р + Г$ называется эйлеровой характеристикой многогранника. Многогранники, для которых $В - Р + Г = 2$, называются чаще всего простыми многогранниками или многогранниками нулевого рода. Если их поверхность сделать из резины и надуть, они «превратятся» в сферу. Более сложные многогранники (многогранники 1–го, 2–го и т.д. рода) – многогранники со сквозными «дырами»: одной, двумя и т.д. Например, многогранник первого рода (то есть многогранник с одной «дырой») и второго рода (то есть многогранник с двумя «дырами») изображены соответственно на рисунках 7 *а* и 7 *б*.



а) *б)*

Рис. 7

Можно показать, что для многогранников 1–го рода величина $В - Р + Г = 0$, а для многогранников 2–го рода $В - Р + Г = -2$

Верно утверждение, что увеличение рода многогранника на 1 влечёт уменьшение эйлеровой характеристики на 2. То есть для произвольного многогранника рода p справедливо соотношение:

$$В - Р + Г = 2 - 2p.$$

IV. Правильные многогранники

Воспользуемся теоремой Эйлера для разрешения одного важного вопроса, а именно о возможности существования правильных многогранников.

Определение. Выпуклый многогранник называется ***правильным***, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число рёбер.

В планиметрии существует бесконечно много видов правильных многоугольников.

Относительно многогранников дело обстоит иначе; действительно, опираясь на теорему Эйлера, можно установить такой факт.

<u>*Теорема.*</u> ***Существует не более пяти типов правильных многогранников.***

<u>*Доказательство.*</u> По определению правильного многогранника все его грани должны быть правильными, например, m – угольниками; в каждой его вершине сходится одинаковое число рёбер, например, n. При этом $m \geq 3$ и $n \geq 3$.

Подсчитаем число рёбер по граням. Все грани – m–угольники, число граней равно $Г$, тогда ($m \cdot Г$) даёт удвоенное число рёбер, так как каждое ребро прилегает к двум многоугольникам. Итак,

$$2P = m \cdot Г \quad \text{или} \quad Г = \frac{2P}{m}. \qquad (1)$$

Подсчитаем число рёбер по вершинам. В каждой вершине сходятся n рёбер, число вершин равно B, тогда ($n \cdot B$) даёт удвоенное число рёбер, так как каждое ребро соединяет две вершины. Получаем

$$2P = n \cdot B \quad \text{или} \quad B = \frac{2P}{n}. \qquad (2)$$

Согласно теореме Эйлера: $B - P + Г = 2$. Подставляя сюда выражения (1) и (2), получаем:

$$\frac{2P}{n} - P + \frac{2P}{m} = 2 \quad \text{или}$$

$$\left(\frac{2}{n} - 1 + \frac{2}{m}\right) \cdot P = 2. \qquad (3)$$

Так как $P > 0$, то $\frac{2}{n} - 1 + \frac{2}{m} > 0$.

Таким образом, для определения чисел m, n, B, $Г$, P имеем неравенство:

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{m} > 1, \quad m \geq 3, \quad n \geq 3. \qquad (4)$$

1. Возьмём $m = 3$ и $n = 3$ и подставим эти значения в равенство (3):

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 1\right) \cdot P = 2, \quad \frac{1}{3} \cdot P = 2, \quad P = 6.$$

По формулам (1) и (2) имеем: $Г = 4$, $B = 4$. Получили многогранник, у которого четыре треугольные грани, четыре вершины, шесть рёбер – это правильный тетраэдр (рис. 1 *а*).

2. Пусть $m = 4$, $n = 3$, тогда, пользуясь равенством (3), имеем:

$$\left(\frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{4}\right) \cdot P = 2, \quad \left(\frac{7}{6} - 1\right) \cdot P = 2, \quad P = 12.$$

Пользуясь равенствами (1) и (2), получаем: $B = 8$, $Г = 6$. Этот многогранник имеет шесть квадратных граней, восемь вершин с трёхгранными углами и двенадцать рёбер – это гексаэдр (рис. 1 *б*).

3. Пусть $m = 3$, $n = 4$. Тем же путём получаем, что $P = 12$, $B = 6$, $Г = 8$. Этот многогранник ограничен восемью треугольниками, имеет шесть вершин с четырёхгранными углами и двенадцать рёбер. Он называется октаэдр (рис. 1 *в*).

4. Пусть $m = 4$, $n = 4$. Но эти значения не подходят, так как $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$.

5. Пусть $m = 5$, $n = 3$, тогда из равенства (3) находим:

$$\left(\frac{2}{5} - 1 + \frac{2}{3}\right) \cdot P = 2,$$

$$P = 30.$$

Из равенств (1) и (2) получаем: $B = 20$, $Г = 12$. Этот многогранник имеет 12 пятиугольных граней, 20 вершин с трёхгранными углами, 30 рёбер. Это додекаэдр (рис. 1 *д*).

6. Пусть $m = 3$, $n = 5$, тогда $P = 30$, $B = 12$, $Г = 20$. Многогранник имеет двадцать треугольных граней, 12 вершин с пятигранными углами при них, 30 рёбер. Это икосаэдр (рис. 1 *г*).

7. Если $m = 3$, $n = 6$ или $n = 3$, $m = 6$, то $\frac{2}{m} + \frac{2}{n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{6} = 1$ и, значит, эти значения не годятся.

8. Не годятся сочетания: $m = 4$, $n = 5$ или $m = 5$, $n = 4$, так как

$$\frac{2}{m}+\frac{2}{n}=\frac{2}{5}+\frac{2}{4}=\frac{9}{10}<1.$$

Если дальше увеличивать числа m и n, сумма $\frac{2}{m}+\frac{2}{n}$ будет только уменьшаться. Поэтому дальнейшие «пробы» смысла не имеют.

Таким образом, могут существовать всего **5 *видов*** правильных многогранников. Результат наших исследований можно изобразить следующей таблицей.

Название многогранника	m	n	$В$	$Г$	$Р$
Правильный тетраэдр	3	3	4	4	6
Гексаэдр (куб)	4	3	8	6	12
Октаэдр	3	4	6	8	12
Додекаэдр	5	3	20	12	30
Икосаэдр	3	5	12	20	30

Почему именно такие названия получили правильные многогранники?

Это связано с числом их граней. Так, тетраэдр имеет четыре грани, в переводе с греческого «тетра» – четыре, «эдрон» – грань, вот и получается четырёхгранник – тетраэдр. Гексаэдр (или другое название – куб) имеет шесть граней, «гекса» – шесть; октаэдр – восьмигранник, «окто» – восемь; додекаэдр – двенадцатигранник, «додека» – двенадцать; икосаэдр – имеет двадцать граней, «икоси» – двадцать.

Правильным многогранникам посвящена последняя, XIII книга «Начал» Евклида.

V. Приложения теоремы Эйлера к решению задач

«Задача о трёх домиках и трёх колодцах»

При доказательстве теоремы Эйлера поверхность многогранника «растягивают» на плоскости. При этом грани и рёбра многогранника деформируются, но их число, а следовательно, и соотношение Эйлера не меняются. На плоскости при этом образуется сетка, состоящая из точек и отрезков или дуг, которые их соединяют. Такое множество точек и отрезков (или дуг) называется плоским ***графом***. Точки называются ***вершинами*** графа, а отрезки (или дуги) – ***рёбрами*** графа. Граф называется замкнутым, если нет ни одной вершины, из которой выходит только одна линия. Так граф на рис.8 – незамкнутый, а граф на рис.5 *б* – замкнутый. В последнее время графы и связанные с ними методы исследования органически пронизывают на разных уровнях едва ли не всю современную математику. Примерами графов могут служить схемы метрополитена, схемы автомобильных и железных дорог, планы выставок и т.д. Для плоских замкнутых графов очевидно справедлива формула Эйлера $В-Р+Г=2$.

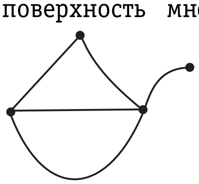


Рис. 8

Исторически сложилось так, что теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад. Одной из таких головоломок была задача о трёх домиках и трёх колодцах.

<u>*Задача.*</u> ***Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?***

<u>*Решение.*</u> Предположим, что это сделать можно. Изобразим дома буквами D_1, D_2, D_3, а колодцы – буквами $К_1$, $К_2$, $К_3$ (рис. 9).

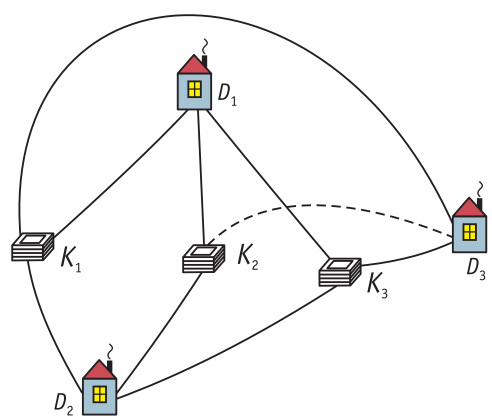


Рис. 9

Каждый домик соединим с каждым колодцем так, чтобы девять получившихся линий попарно не пересекались. Всякие две точки, изображающие дома или колодцы, будут соединены отрезками, которые, в силу теоремы Эйлера, разделят ограниченную ими часть плоскости на $9 - 6 + 2 = 5$ областей. Каждая из пяти областей ограничена четырьмя отрезками, так как, по условию, ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Поэтому число линий, ограничивающих эти пять областей, должно быть не меньше $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, а по условию их число равно 9. Получаем противоречие с условием. Следовательно, нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу.

В приведённой литературе можно найти и другие доказательства теоремы Эйлера, и её обобщения на многогранники p–го рода, и приложение теоремы Эйлера к теории графов.

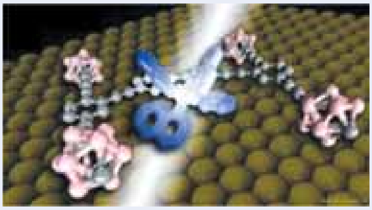
ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия для 10–11–х классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики. М.: Просвещение, 1994.
2. Бекламов Б.В. Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам Квант, 1974, № 10.
3. Березина Л.Ю. Графы и их применение. М.: Просвещение, 1979.
4. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. М.: Наука, 1982 Библиотечка «Квант», вып. 21.
5. Смирнова И.М. В мире многогранников. М.: Просвещение, 1995.
6. Фетисов А.И. Геометрия в задачах. Пособие для учащихся школ и классов с углублённым теоретическим и практическим изучением математики. М.: Просвещение, 1977.
7. Яковлев А.Я. Леонард Эйлер. М.: Просвещение, 1983.
8. Курант Р. и Роббинс Г. Что такое математика? Глава «Топология». М. 2001 г.

Новости Новости Новости Новости Новости

Мотор для наномобиля

Создав самый маленький в мире автомобиль, учёные из университета Раиса на достигнутом не остановились и приделали наномашине мотор.



Модифицированный наномобиль оснащён ротором, который при попадании на него света начинает вращаться и приводить машину в движение. Мотор и молекулярная рама были разработаны Беном Ферингой из Гронингенского университета в Нидерландах, а затем адаптированы под наномобиль.

Наномобиль состоит из жёсткого шасси и четырёх свободновращающихся алкиновых осей. Колеса из фуллерена-60, использовавшиеся в предыдущей модели машины, сильно взаимодействовали с ротором, поэтому их поменяли на сферические молекулы р-карборана.

Сейчас мотор уже установлен и настроен, и учёные проводят испытания автомобиля на ровной поверхности.