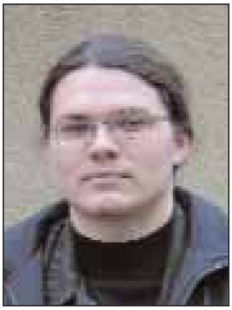

Трушин Борис Викторович
Преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), учитель средней физико-математической школы №5 г. Долгопрудного, член жюри Московской областной олимпиады школьников по математике, аспирант МФТИ.

Принцип Дирихле

Принципом Дирихле традиционно называют следующее утверждение: *если в 50 клетках сидит 51 кролик, то по крайней мере в одной клетке сидят не менее двух кроликов.*

Действительно, пусть это утверждение неверно, тогда в каждой клетке сидит не более одного кролика, и, следовательно, в 50 клетках — не более 50 кроликов, а их должно быть 51. Получили противоречие.

В более математической терминологии принцип Дирихле звучит так: *если $n+1$ элемент разбит на n множеств, то по крайней мере одно множество содержит не менее двух элементов.*

Посмотрим, как можно применить принцип Дирихле при решении задач.

Задача 1. Докажите, что среди любых шести целых чисел найдутся два, разность которых кратна 5.

Решение. При делении целого числа на 5 возможны пять различных остатков: 0, 1, 2, 3 или 4. Но у нас шесть чисел, значит, среди них обязательно найдутся два с одинаковыми остатками. Если мы рассмотрим их разность, то она будет давать при делении на 5 остаток 0, то есть будет делиться на 5.

Задача 2. Сто человек сидят за круглым столом, причём более половины из них —мужчины. Докажите, что какие-то двое мужчин сидят друг напротив друга.

Решение. Разобьём всех присутствующих на 50 пар людей, сидящих друг напротив друга. Таким образом, у нас получается 50 пар («клетки»), в которые нужно рассадить не менее 51 мужчины («кролики»). Из принципа Дирихле следует, что в одной из этих пар-«клеток» оба человека — мужчины-«кролики».

Задача 3. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа -1, 0, 1. Докажите, что какие-то две из восьми сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.

Решение. Каждая из этих восьми сумм может принимать лишь семь разных значений: от -3 до 3, значит, по принципу Дирихле какие-то две суммы совпадут.

Задача 4. Какое наибольшее число ладей можно поставить на шахматную доску так, чтобы никакие две из них не били друг друга?

Решение. Восемь ладей поставить можно, например, по диагонали из a1 в h8. Докажем, что более восьми ладей, не бьющих друг друга, поставить нельзя. На одной горизонтали не может стоять больше одной ладьи — иначе они будут бить друг друга. Значит, ладей можно поставить не больше, чем горизонталей у доски, а их восемь. Следовательно, больше восьми ладей поставить на доску нельзя.

Задача 5. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматную доску так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

Решение. Разобьём доску на 16 квадратиков, как показано на рисунке 1 .В каждом квадратике может стоять не более одного короля. Значит, больше 16 королей расставить нельзя. Одна из расстановок 16 королей приведена на рисунке 2 .

Рассмотрим несколько задач, для решения которых, кроме принципа Дирихле, необходимы некоторые дополнительные идеи.

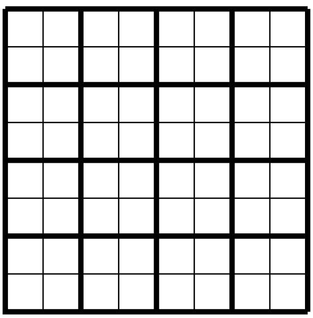

Рис. 1

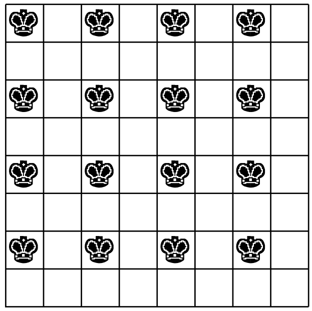

Рис. 2

Задача 6. Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 2006.

Решение. Рассмотрите первые 2007 степеней двойки — 2, 4, 8, 16, ..., 2^{2007}. Их остатки при делении на 2006 могут принимать одно из 2006 значений — 0, 1, 2, ..., 2005. Из принципа Дирихле следует, что какие-то две степени имеют одинаковые остатки. Значит, разность этих чисел имеет остаток нуль и, следовательно, делится на 2006.

Задача 7. Существует ли натуральное число, состоящие лишь из нулей и единиц, делящееся на 2006?

Решение. Рассмотрим числа

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \ldots,\ \underbrace{111\ldots11}_{2007\text{ единиц}}.$$

Поскольку чисел 2007, то какие-то два из них будут иметь одинаковые остатки при делении на 2006 и, следовательно, разность этих чисел будет делиться на 2006. Но их разность имеет вид 111...11000...00, т.е. состоит только из нулей и единиц.

Задача 8. Докажите, что в любой компании есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

Решение. Пусть в компании n человек. Тогда у каждого человека может быть от 0 до $n-1$ знакомых. Таким образом, количество знакомых может принимать n различных значений:

0, 1, 2, ..., $n-1$. Поэтому если бы все n человек имели различное число знакомых, то в компании присутствовало бы по одному человеку, имеющему 0, 1, 2, ..., $n-1$ знакомых. Однако, если в компании есть человек, имеющий $n-1$ знакомого, то он знаком со всеми, и следовательно, в компании не может быть человека, который совсем не имеет знакомых. Полученное противоречие показывает, что в любой компании найдутся два человека с одинаковым числом знакомых.

Задача 9. На складе имеется п о200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причём среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

Решение. В каждом размере каких-то сапог меньше — либо правых, либо левых (иначе, если в каком-то из размеров левых и правых сапог поровну — по 100 штук, то мы уже смогли найти 100 годных пар). Выпишем эти типы сапог по размерам. Какой-то тип, например, левый, повторится по крайней мере дважды, например, в 41 и 42 размерах. Но так как количество левых сапог этих размеров суммарно не меньше 100 (иначе получится, что левых сапог 43 размера более 200, что невозможно), то мы имеем не менее 100 годных пар обуви этих размеров.

Перейдём теперь к обобщённому принципу Дирихле. На языке *кроликов* и *клеток* его можно записать так: *если в десяти клетках сидит 51 кролик, то по крайней мере в одной клетке сидят не менее шести кроликов.*

Доказательство аналогично обычному принципу Дирихле. Действительно, если в каждой клетке с и д имене шести кроликов, то во всех десяти клетках кроликов не более 50 — противоречие.

В математических терминах это выглядит так: *если $nk+1$ элемент разбит на n множеств, то по крайней мере одно множество содержит не менее $k+1$ элемента.*

Задача 10. Имеется 101 пуговица одного из 11 цветов. Докажите, что либо среди этих пуговиц найдутся 11 пуговиц одного цвета, либо 11 пуговиц разных цветов.

Решение. Предположим, что среди данных пуговиц нет 11 пуговиц разных цветов. Тогда каждая пуговица окрашена в один из 10 цветов. Если пуговиц каждого цвета не более десяти, то всего пуговиц не более 100, и это противоречит условию. Таким образом, пуговиц какого-то одного цвета не менее 11, ч т о и нужно было доказать.

Задача 11. Докажите, что из любых семи натуральных чисел можно выбрать три числа, сумма которых делится н ат р и .

Решение. По принципу Дирихле из семи чисел можно выбрать три, дающие одинаковые остатки при делении на 3 (так как имеется лишь три различных остатка — 0, 1 и 2). Их сумма делится н а3.

Задача 12. Какое наибольшее число коней можно поставить на шахматную доску так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

Решение. Разобьём доску на 8 прямоугольников 2×4, как показано на рисунке 3 .

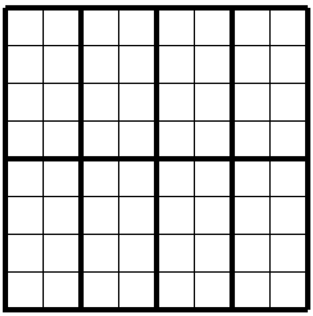

Рис. 3

1	2
3	4
2	1
4	3

Рис. 4

В каждом прямоугольнике 2×4 может стоять не более четырёх коней. Действительно, разобьём клетки прямоугольника 2×4 на пары, как показано на рисунке 4, тогда на клетках с одинаковыми номерами не могут одновременно стоять кони. Значит, более $8 \cdot 4 = 32$ коня расставить не удастся. На рисунке 5 приведён пример, как можно расставить 32 коня.

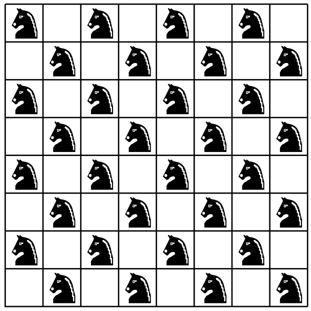

Рис. 5

Задача 13. Дано восемь различных натуральных чисел, не превосходящих 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.

Решение. Всего различных разностей может быть 14 — от 1 до 14 — это 14 «клеток», в которые мы будем сажать «кроликов» — разности между парами данных нам натуральных чисел. Мы имеем 28 пар (каждое число участвует в семи парах, и в каждой паре участвует два числа, следовательно всего $8 \cdot 7/2 = 28$ пар), но их можно рассадить по 14 «клеткам» так, что в каждой «клетке» будет сидеть ровно два «кролика». Однако заметим, что в «клетке» с номером 14 может сидеть не более одного «кролика», ведь число 14 можно записать как разность двух натуральных чисел, не превосходящих 15, лишь одним способом: $14 = 15 - 1$. Значит, в оставшихся 13 «клетках» сидят не менее 27 «кроликов», и применение обобщённого принципа Дирихле даёт нам желаемый результат.