



**Шишлянникова Алимпида Васильевна**  
*учитель математики средней общеобразовательной школы №1 г. Губкинского ЯНО.*

## О числе корней уравнения, содержащего знак модуля

В процессе работы с математическими задачами иногда возникает необходимость в составлении уравнений с наперёд заданным числом корней. Если квадратное уравнение с нужным числом решений многие запишут без раздумий, то составить уравнение вида

$$\begin{aligned} &|x - a_1| + |x - a_2| + \\ &+ |x - a_3| + \dots + |x - a_n| = m \end{aligned} \quad (1)$$

с заданным числом корней сможет не каждый.

Однако и для этих уравнений можно сформулировать правило по определению числа решений.

Пусть для определённости в уравнении (1)

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n-1} < a_n.$$

Выясним, как зависит число корней уравнения от соотношения между числами  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $m$ .

Графически левая часть уравнения (1) представляет собой ломаную двух типов (рис. 1, если  $n$ -чётное, и рис. 2, если  $n$ -нечётное). Число реше-

ний определяется числом пересечений графика с прямой  $y = m$ .

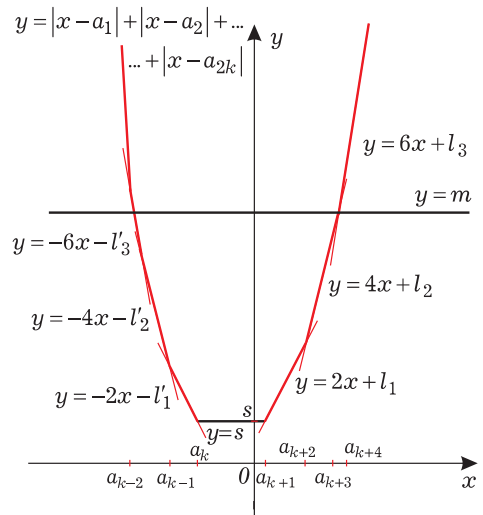


Рис. 1

Если  $n = 2k$ , то число корней определяется значением величины  $s = a_{2k} + a_{2k-1} + a_{2k-2} + \dots + a_{k+1} - (a_k + a_{k-1} + \dots + a_1)$ ,

то есть разницей между суммами  $k$  больших и  $k$  меньших чисел  $a_n$ . Графически  $s$  – координата точки пересечения графика с осью  $Oy$ .

При  $t = s$   $x \in [a_k; a_{k+1}]$ ,  
 $t < s$  корней нет ( $x \in \emptyset$ ),  
 $t > s$  два корня.

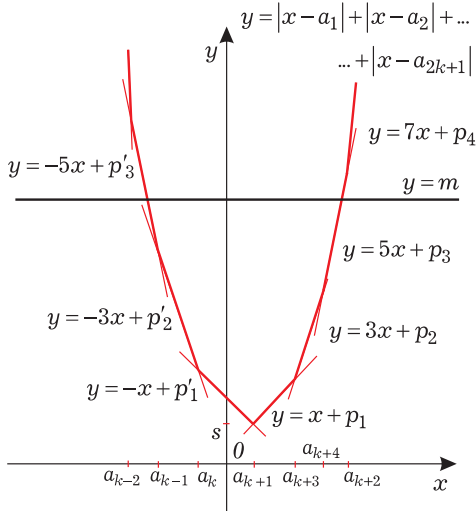


Рис. 2

Если  $n = 2k + 1$ , то число корней определяется значением величины

$$s = a_{2k+1} + a_{2k} + a_{2k-1} + \dots + a_{k+2} - (a_k + a_{k-1} + \dots + a_1),$$

то есть разницей между суммами  $k$  больших и  $k$  меньших чисел  $a$ , без учёта  $a_{k+1}$ . Графически  $s = y(a_{k+1})$ , где

$$y(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{2n+1}|.$$

При  $t = s$  один корень ( $x = a_k + 1$ ),  
 $t < s$  корней нет ( $x \in \emptyset$ ),  
 $t > s$  два корня.

Практическое использование этого результата может быть следующим:

♦ можно определять число корней, не решая самого уравнения;



♦ выбрав произвольно числа  $a_n$  в левой части уравнения (1), можно по значению  $s$  легко подобрать число  $t$  таким образом, чтобы уравнение имело наперед заданное число корней.

**Примеры.** Определить число корней уравнения при всех значениях  $t$ .

1)  $|x - 7| + |x + 10| = t$

Пусть  $a_1 = -10$ ,  $a_2 = 7$  ( $a_1 < a_2$ ), тогда  $s = a_2 - a_1 = 7 - (-10) = 17$ .

При  $t = 17$   $x \in [-10; 7]$ ,

$$t < 17 \quad x \in \emptyset,$$

$$t > 17 \quad \text{два корня.}$$

2)  $|x - 2| + |x + 3| + |x - 5| = t$

Пусть  $a_1 = -3$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 5$  ( $a_1 < a_2 < a_3$ ), тогда

$$s = a_3 - a_1 = 5 - (-3) = 8.$$

При  $t = 8$   $x = a_2 = 2$  один корень,

$$t < 8 \quad x \in \emptyset,$$

$$t > 8 \quad \text{два корня.}$$

3)  $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x - 7| = t$

Пусть  $a_1 = -3$ ,  $a_2 = -2$ ,  $a_3 = -1$ ,  $a_4 = 7$  ( $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ), тогда

$$s = a_4 + a_3 - (a_2 + a_1) =$$

$$= 7 + (-1) - (-2 + (-3)) = 11.$$

При  $t = 11$   $x \in [a_2; a_3]$ , т.е.  $x \in [-2; -1]$ ,

$$m < 11 \quad x \in \emptyset,$$

$$m > 11 \quad \text{два корня.}$$

$$4) |x+3| + |x-6| + |x-5| +$$

$$+ |x+2| + |x+1| = m$$

Пусть  $a_1 = -3$ ,  $a_2 = -2$ ,  $a_3 = -1$ ,  $a_4 = 5$ ,

$a_5 = 6$  ( $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ ), тогда

$$s = a_5 + a_4 - (a_2 + a_1) = 6 + 5 - (-3 - 2) = 16.$$

При  $m = 16$   $x = a_3 = -1$  один корень,

$$m < 16 \quad x \in \emptyset,$$

$m > 16$  два корня.



## Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

- ◆ Почтовые голуби тормозят развитие Интернета в Зимбабве.
- ◆ Однажды на лекции...  
Профессор объясняет теорему:  
– Представьте стеклянный шар. Вообще-то, не обязательно стеклянный. А, впрочем, можно обойтись и без шара...
- ◆ На экзамене по физике. Профессор (П) и студент (С).  
П: Что такое электрический ток?  
С: Не знаю...  
П: А подумать?  
С: Знал, забыл, блин...  
П: Это количество электрического заряда, проходящего через проводник в единицу времени. Тогда другой вопрос: что такое заряд?  
С: Тоже забыл, вчера зря допоздна учил...  
П: А что такое время?  
С: И это забыл!  
П: Идите и вспомните – кроме Вас этого никто не знал!