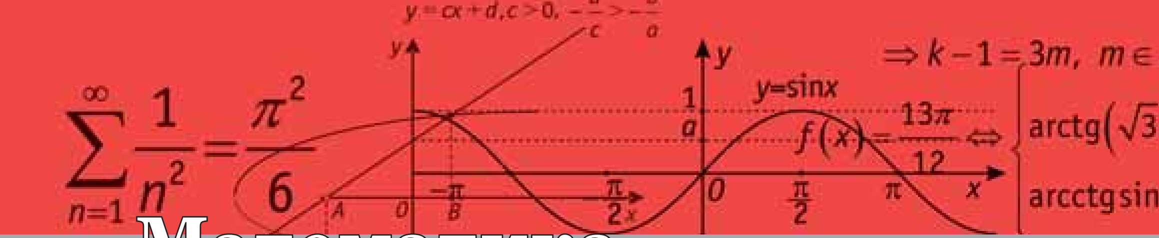

Колоскова Мария Евгеньевна
Аспирантка МГУ им. М.В. Ломоносова.
Преподаватель математики в школе им. А.Н. Колмогорова.

Принцип математической индукции

В настоящей статье содержатся различные задачи, основным инструментом решения которых является принцип (метод) математической индукции, который в широком его понимании состоит в переходе от частных наблюдений к универсальной, общей закономерности или общей формулировке. В таком толковании данный метод представляет собой один из основных приёмов проведения исследований в любой экспериментальной естественно-научной деятельности человека.

При решении задач метод математической индукции зачастую применяется тогда, когда нужно доказать некоторое утверждение для всех натуральных чисел.

Прежде чем сформулировать метод математической индукции в строгой математической форме, рассмотрим задачу.

Задача 1. В своей статье «Как я стал математиком» А.Н. Колмогоров пишет: «Радость математического «открытия» я познал рано, подметив в возрасте пяти-шести лет закономерность

$1=1^2,$

$1+3=2^2,$

$1+3+5=3^2,$

$1+3+5+7=4^2$ и так далее.

…В школе издавался журнал «Весенние ласточки». В нем моё открытие было опубликовано…».

Какое именно доказательство было приведено в этом журнале, мы не знаем, но началось всё с частных наблюдений. Сама гипотеза, которая наверняка возникла после обнаружения этих частных равенств, состоит в том, что формула

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

верна при любом заданном числе $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Для доказательства этой гипотезы достаточно установить два факта.

Первый факт заключается в том, что для $n=1$ (и даже для $n=2,\ 3,\ 4$) нужное утверждение верно. Второй – в том, что можно осуществить так называемый шаг индукции, который состоит в следующем: предположим, что утверждение верно при $n=k$, то есть что $1+3+5+...+(2k-1)=k^2$, и проверим, что тогда оно верно и для $n=k+1$. Имеем:

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=$$
$$=(1+3+5+...+(2k-1))+(2k+1)=$$
$$=k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Значит, доказываемое утверждение верно для всех значений n. Решение предыдущей задачи проводилось с помощью метода, или принципа математической индукции.

Принцип математической индукции заключается в следующем.

Утверждение справедливо для всякого натурального n, если:

1) *оно справедливо для* $n=1$ *и*

2) *из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального* $n=k$ *следует его справедливость при* $n=k+1$.

В приведённой выше форме двух шагов принцип математической индукции впервые появился в 1654 году в работе Блеза Паскаля «Трактат об арифметическом треугольнике», в которой индукцией доказывается простой способ вычисления числа сочетаний (биномиальных коэффициентов). Д. Пойа в книге [1] цитирует Б. Паскаля с небольшими изменениями.

Термин *индукция* происходит от латинского слова inductio (наведение), которое означает переход от единичного знания об отдельных предметах данного класса к общему выводу обо всех предметах данного класса, что, в свою очередь, является одним из основных методов познания.

Первый шаг называют *базисом*, или *базой* индукции, второй – *индуктивным переходом*, или *шагом индукции*. Второй шаг наиболее важен. Он включает в себя предположение (утверждение верно при $n=k$) и доказательство (утверждение верно при $n=k+1$). Сам параметр n называется параметром индукции.

На практике иногда утверждения справедливы не для всех натуральных n, а начиная с некоторого $n=n_0$. Поэтому первый шаг проверяется для $n=n_0$.

Решим следующие задачи, используя принцип математической индукции.

Задача 2. Рассмотрим всевозможные обыкновенные дроби с числителем 1 и любым (целым положительным) знаменателем:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5},...$$

Доказать, что для любого $n \geq 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей такого вида.

Решение. Проверим сначала данное утверждение при $n=3$, имеем:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

Следовательно, базовое утверждение выполнено.

Предположим теперь, что интересующее нас утверждение верно для k дробей, и докажем, что оно верно и для $(k+1)$ дробей. Другими словами, предположим, что существует представление

$$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{m},$$

в котором k слагаемых и все знаменатели разные. Докажем, что тогда можно получить представление единицы в виде суммы из $(k+1)$ дробей нужного вида.

Будем считать, что дроби убывают, то есть знаменатели (в представлении единицы суммой k слагаемых) возрастают слева направо так, что m – наибольший из знаменателей. Мы получим нужное нам представление в виде суммы $(k+1)$ дробей, если разобьём одну дробь, например, последнюю на две. Это можно сделать, так как

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}=\frac{1}{m(m+1)},$$

и поэтому

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m(m+1)}.$$

Кроме того, все дроби остались различными, так как m было наибольшим знаменателем, а

$$m+1>m \text{ и } m(m+1)>m.$$

Таким образом, нами установлено:

1) при $n=3$ данное утверждение верно;

2) если интересующее нас утверждение верно для k слагаемых, то оно верно и для $(k+1)$ слагаемых.

На этом основании мы можем заключить, что рассматриваемое утверждение верно для всех натуральных чисел, начиная с трёх. Более того, из приведённого доказательства следует и алгоритм отыскания нужного разбиения единицы. (Какой это алгоритм? Представьте самостоятельно число 1 в виде суммы четырёх, пяти, семи слагаемых.)

Задача 3. (Неравенство Бернулли). Докажите, что при $x>-1$ и при целом $n\geq 2$ справедливо неравенство $(1+x)^n\geq 1+nx$, причём знак равенства имеет место только при $x=0$.

Решение. Доказательство будем проводить по индукции.

1. *База индукции.* Убедимся в справедливости неравенства при $n=2$. Действительно,

$$(1+x)^2=1+2x+x^2\geq 1+2x,$$

причём знак равенства имеет место только при $x=0$.

2. *Шаг индукции.* Предположим, что для номера $n=k$ утверждение справедливо, то есть $(1+x)^k\geq 1+kx,\quad k\geq 2,$ причём знак равенства имеет место только при $x=0$.

Докажем, что оно верно и при $n=k+1$. Для этого умножим обе части предыдущего неравенства на положительное выражение $(1+x)$. Тогда

$$(1+x)^k(1+x)\geq(1+kx)(1+x),$$

$$(1+x)^{k+1}\geq 1+(k+1)x+$$

$$+kx^2\geq 1+(k+1)x,$$

причём знак равенства имеет место только при $x=0$.

Итак, на основании принципа математической индукции можно утверждать, что неравенство Бернулли справедливо для любого $n\geq 2$.

Рассмотрим задачу, в формулировке которой сначала нужно ввести два натуральных параметра, а затем провести индукцию по их сумме.

Задача 4. (Д. Успенский). Для любого треугольника ABC, у которого углы $\alpha=\angle CAB$, $\beta=\angle CBA$ соизмеримы, имеют место неравенства

$$\frac{AC}{AB} > \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \quad \frac{BC}{BA} > \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Решение. По условию углы α и β соизмеримы. Это означает, что указанные углы имеют общую меру δ, для которой $\alpha = p\delta$, $\beta = q\delta$ (без ограничения общности можно считать, что p, q – натуральные взаимно простые числа).

Воспользуемся методом математической индукции и проведём её по сумме $n = p + q$.

1. *База индукции.* При $n = p + q = 2$ имеем $p = 1$ и $q = 1$. Тогда треугольник ABC – равнобедренный и нужные неравенства очевидны: они следуют из неравенства треугольника.

2. *Шаг индукции.* Предположим теперь, что нужные неравенства установлены для $p + q = 2, 3, \ldots, k-1$, $k > 2$. Докажем, что неравенства справедливы и для $p + q = k$.

Пусть ABC – данный треугольник, у которого $p + q = k > 2$. Тогда стороны AC и BC не могут быть равными.

Пусть $AC > BC$. Построим теперь (рис. 1) равнобедренный треугольник ADC; имеем:

$$AC = DC \text{ и } 2AC > AD = AB + BD. \quad (1)$$

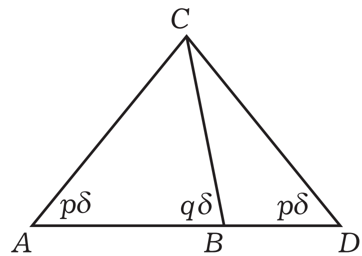

Рис. 1

Рассмотрим теперь треугольник BDC, углы которого также соизмеримы:

$$\angle DCB = (q-p)\delta, \quad \angle BDC = p\delta.$$

($\angle BDC = p\delta$ по построению, а

$$\angle DCB = 180^\circ - (\angle DBC + \angle BDC) =$$

$$= 180^\circ - ((180^\circ - \angle CBA) + \angle BDC) =$$

$$= 180^\circ - 180^\circ + q\delta - p\delta = (q-p)\delta.$$

Для треугольника BDC выполнено индуктивное предположение (так как $q - p + p = q < p + q = k$ при натуральных p и q), и поэтому

$$BD > \frac{q-p}{q}CD, \text{ или } BD > \frac{q-p}{q}AC. \quad (2)$$

Складывая (1) и (2), получаем:

$$2AC + BD > \frac{q-p}{q}AC + AB + BD,$$

и поэтому

$$\frac{AC}{AB} > \frac{q}{p+q} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Из того же треугольника BDC по предположению индукции заключаем, что

$$\frac{CB}{CD} > \frac{p\delta}{(q-p)\delta + p\delta} = \frac{p}{q}, \text{ или } \frac{CB}{CA} > \frac{p}{q}.$$

Учитывая предыдущее неравенство, заключаем, что

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC} > \frac{q}{p+q} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{p+q} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Таким образом, индуктивный переход получен и справедливость утверждения задачи следует из принципа математической индукции.

Замечание. Утверждение задачи остаётся в силе и в том случае, когда углы α и β не являются соизмеримыми. Конечно, в этом случае решение задачи становится более трудным.

Иногда приходится решать задачи, связанные с рекуррентными последовательностями. *Рекуррентными* называются такие последовательности, члены которых задаются индуктивно, то есть через предыдущие. При решении задач, связанных с такими последовательностями, часто используется следующая вариация принципа математической индукции.

Утверждение $P(n)$, где n – некоторое натуральное число, верно для всех натуральных $n \geq m$ $(m \in N)$, если выполнены два условия:

1) $P(n)$ справедливо при $n = m$ и $n = m + 1$;

2) для всякого натурального $k \geq m$ из справедливости $P(k)$ и $P(k+1)$ следует справедливость $P(k+2)$.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача 5. Доказать, что если $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ и для всякого натурального $n \geq 3$ имеет место соотношение

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2},$$

то $x_n = 2^{n-1} + 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Решение. Итак, в данной задаче рекуррентная последовательность $\{x_n\}$ единственным образом определяется заданием первых двух её членов.

База индукции. Она состоит из проверки двух утверждений: при $n = 1$ и $n = 2$. В обоих случаях утверждение справедливо по условию.

Шаг индукции. Предположим, что для $n = k$ и $n = k + 1$, $k \geq 1$ утверждение установлено, то есть

$$x_k = 2^{k-1} + 1, \quad x_{k+1} = 2^k + 1,$$

и докажем его справедливость для $n = k + 2$.

Имеем:

$$x_{k+2} = 3x_{k+1} - 2x_k =$$

$$= 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1,$$

что и требовалось доказать.

Задача 6. Докажите, что любые n прямых $(n \geq 2)$, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке, пересекаются ровно в $\frac{n(n-1)}{2}$ точках.

Решение.

База индукции. У двух непараллельных прямых точка пересечения одна, и утверждение верно.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение задачи верно для некоторого числа $n = k$ прямых, то есть что любые k прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке, пересекаются ровно в $\frac{k(k-1)}{2}$ точках. И докажем его для числа $n = k + 1$ прямых. По предположению индукции 1-я, 2-я,..., k-я прямые пересекаются в $\frac{k(k-1)}{2}$ точках. $(k+1)$-я прямая пересекается с каждой из этих k прямых ровно в одной точке. Следовательно, количество точек пересечения всех $k + 1$ прямых есть

$$\frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k^2 + k}{2} = \frac{(k+1)k}{2},$$

что и требовалось доказать.

Согласно принципу математической индукции, утверждение задачи верно для любого количества n

прямых $(n \geq 2)$, удовлетворяющих условию задачи.

Задача 7. n прямых делят плоскость на части. Доказать, что можно раскрасить эти части в белый и жёлтый цвета так, чтобы соседние части, имеющие общий отрезок границы, были разного цвета (как на рис. 2 при $n=4$).

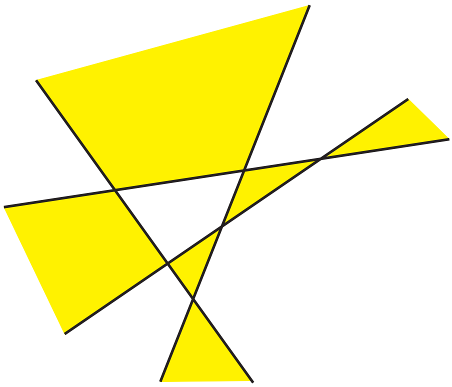

Рис. 2. Двухцветная раскраска

Решение. Воспользуемся индукцией по числу прямых. Итак, пусть n – число прямых, делящих нашу плоскость на части, $n \geq 1$.

База индукции. Если прямая одна $(n=1)$, то она делит плоскость на две полуплоскости, одну из которых можно раскрасить в белый цвет, а вторую в жёлтый, и утверждение задачи верно.

Шаг индукции. Чтобы доказательство индуктивного перехода было более понятно, рассмотрим процесс добавления одной новой прямой и раскраски. Если проведём вторую прямую $(n=2)$, то получим четыре части, которые можно раскрасить нужным образом, покрасив противоположные углы в один цвет. Посмотрим, что произойдёт, если мы проведём третью прямую. Она поделит некоторые «старые» части, при этом появятся новые участки границы, по обе стороны которых цвет один и тот же, например так (рис. 3).

Поступим следующим образом: с одной стороны от новой прямой поменяем цвета – белый сделаем жёл-

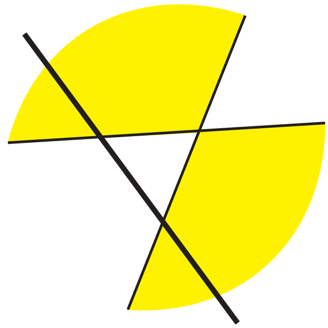

Рис. 3. Новая прямая

тым и наоборот; при этом те части, которые лежат по другую сторону от этой прямой, не перекрашиваем (рис. 4).

Тогда эта новая раскраска будет удовлетворять нужным требованиям: с одной стороны прямой она такой уже была (но с другими цветами), а с другой стороны она и была нужной. Для того чтобы части, имеющие общую границу, принадлежащую проведённой прямой, были окрашены в разные цвета, мы и перекрашивали части только с одной стороны от этой проведённой прямой.

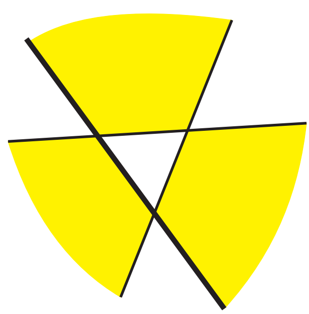

Рис. 4. Изменение цвета

Докажем теперь индуктивный переход. Предположим, что для некоторого $n=k$ утверждение задачи справедливо, то есть все части плоскости, на которые она делится этими k прямыми, можно раскрасить в белый и жёлтый цвета так, чтобы соседние части были разного цвета. Докажем, что тогда существует такая раскраска и для $n=k+1$ прямых. Поступим аналогично случаю перехода от двух прямых к трём. Проведём на плоскости k прямых. Тогда, по предположению индукции, полученную «карту» можно раскрасить нужным образом. Проведём теперь $(k+1)$-ю прямую и с одной стороны от неё поменяем цвета на противоположные. Таким образом, теперь $(k+1)$-я прямая всюду разделяет участки разного цвета, при этом «старые» части, как мы уже видели, остаются правильно раскрашенными. Согласно принципу математической индукции, задача решена.

Упражнения

1. Докажите, что

а) $S_1(n)=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

б) $S_2(n)=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=$

$$=(1+2+3+\ldots+n)^2.$$

2. Докажите неравенство Бернулли для n переменных:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\geq$$
$$\geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – числа одного и того же знака и все больше -1.

Указание. См. решение задачи 3 из основного текста статьи.

3. На сколько частей разбивают плоскость n прямых, каждые две из которых пересекаются и никакие три не имеют общей точки?

Указание. Если $k(n)$ – число частей для n прямых, то, добавив ещё одну $(n+1)$-ю прямую на «картинку» разбиения n прямыми, заметим, что эта новая прямая должна пересекать все n прямых. Тем самым, она сама разобьётся этими точками пересечения на $(n+1)$ частей и поэтому добавляет к «старому числу частей» $(n+1)$ «новых частей». Другими словами,

$$k(n+1)=k(n)+n+1.$$

Используя метод математической индукции, теперь нетрудно показать, что

$$k(n)=\frac{n^2+n+2}{2},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Литература

1. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Прекрасное отсутствие прогресса

После осмотра знаменитым английским писателем Д.Б. Шоу выставки часов её устроители спросили его:

– Какое впечатление выставка произвела на Вас?

– Не вижу никакого прогресса! Современные часы идут ничуть не быстрее, чем хронометры в годы моей юности.