

**Трушин Борис Викторович**

Преподаватель кафедры высшей математики
Московского физико-технического института,
учитель средней физико-математической школы №5 г. Долгопрудный,
член жюри Московской областной олимпиады школьников по
математике, аспирант МФТИ.

Лев против Дрессировщика

Давайте рассмотрим достаточно интересную задачу с несколько неожиданным ответом.

Разъярённый Лев и Дрессировщик находятся на круглой зарешеченной арене. В начальный момент Дрессировщик стоял в центре круга, а Лев сидел на расстоянии полурадиуса от него. Сможет ли Дрессировщик бежать по арене так, чтобы Лев не смог настигнуть его, если их скорости равны по модулю? При этом считаем, что Лев и Дрессировщик – это две точки на круге, и Лев настигает Дрессировщика лишь в том случае, если эти точки совпадают.



Попробуем получше разобраться, в чём заключается задача. Ясно, что если бы всё происходило в чистом поле, и не было преграды в виде зарешеченного края арены, то Дрессировщику удалось бы скрыться ото Льва. Для этого ему было бы достаточно бежать по прямой в сторону, противоположную первоначальному положению Льва. А тут, вроде бы, Дрессировщику и бежать-то некуда! Кажется, что как бы он ни бегал, Лев всегда сможет «прижать» его к краю и съесть... Однако не всё так просто.

Также понятно, что если бы у Льва скорость была бы хоть немного больше, чем у Дрессировщика, то Лев бы его нагнал даже в поле. Для этого ему было бы достаточно сначала добежать до того места, где первоначально находился Дрессировщик, а потом бежать, повторяя его траекторию движения.

В нашем же случае, когда движение ограничено краем арены, не ясно, сумел бы Дрессировщик бесконечно долго бегать ото Льва, даже если бы его скорость несколько превышала скорость Льва.

Однако, если допустить, что ответ состоит в том, что всё-таки Лев поймает Дрессировщика, то совсем не понятно, как же это доказать! Ведь необходимо описать стратегию, которой должен следовать Лев в зависимости от поведения Дрессировщика. Не похоже, чтобы это было очень легко сделать... В некотором смысле описывать способ «убегания» проще, нежели стратегию «догоняния». Давайте попробуем всё же как-нибудь спасти Дрессировщика от Льва...

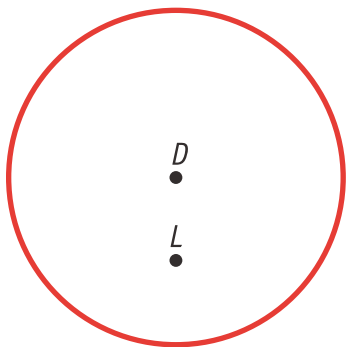


Рис. 1.

Пусть радиус круга арены равен R , и в начальный момент времени Лев и Дрессировщик находятся в точках L и D соответственно (рис. 1). Пусть сначала Дрессировщик побежит по прямой, в направлении, противоположном к расположению Льва. Но очень долго он так бежать не сможет и через некоторое время упрётся в край арены. Пусть таким образом он пробежал некоторый отрезок длины r_1 и оказался в точке D_1 . Чему равна длина этого отрезка, мы пока задумываться не будем. Ясно, что к этому моменту времени Лев не догнал Дрессировщика. Пусть Лев находится теперь в некоторой точке L_1 (рис. 2).

Теперь Дрессировщику надо повернуть и побежать под некоторым углом к первоначальному направлению. Под каким же? Давайте попробуем побежать под прямым углом (это, по крайней мере, удобно в плане вычисления конечного расстояния

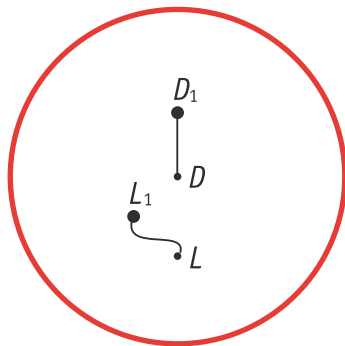


Рис. 2.

до центра круга, которое никогда не должно превышать R). Но перпендикулярно первоначальному направлению можно бежать в две разные стороны... Какую же выбрать? Ясно, что для того, чтобы заведомо не встретиться со Львом, Дрессировщику не следует бежать в ту же полуплоскость относительно прямой DD_1 , где находится точка L_1 . Значит, он должен побежать в другую. Например, в нашем случае (рис. 3) ему следует бежать направо. При этом, если так получилось, что точка L_1 лежит на прямой DD_1 , то Дрессировщик может бежать как в ту, так и в другую сторону.

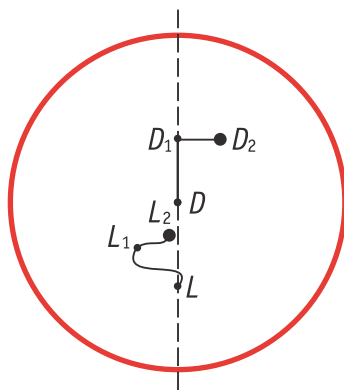


Рис. 3.

Пусть таким образом он добежал до некоторой точки D_2 , преодолев расстояние r_2 , а Лев к этому моменту оказался в точке L_2 (рис. 3). Понятно, что Лев пока ещё не догнал Дрессировщика. Давайте найдём теперь, как далеко от центра круга

уже удалился Дрессировщик. Так как треугольник DD_1D_2 прямоугольный, то длину гипотенузы DD_2 можно найти по теореме Пифагора:

$$DD_2^2 = DD_1^2 + D_1D_2^2.$$

То есть

$$DD_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2},$$

где через r_1 и r_2 обозначены длины отрезков DD_1 и D_1D_2 соответственно.

Таким образом, для того, чтобы Дрессировщик к этому моменту ещё не упёрся в край арены, достаточно выполнения неравенства

$$r_1^2 + r_2^2 < R^2.$$

Добежав до точки D_2 , Дрессировщик опять должен повернуть. Вот только куда? Давайте попробуем, как и в первый раз, повернуть так, чтобы новое направление движения было перпендикулярно прямой DD_2 , и, опять же, подскажем Дрессировщику бежать в ту полуплоскость относительно прямой DD_2 , которая не содержит точки L_2 (рис. 4). Пусть Дрессировщик пробежал таким образом отрезок длины r_3 и оказался в точке D_3 . Длину отрезка DD_3 найдём по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника DD_2D_3 :

$$DD_3 = \sqrt{DD_2^2 + D_2D_3^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}.$$

А значит, если верно неравенство

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 < R^2,$$

то Дрессировщик пока ещё не добежал до края арены.

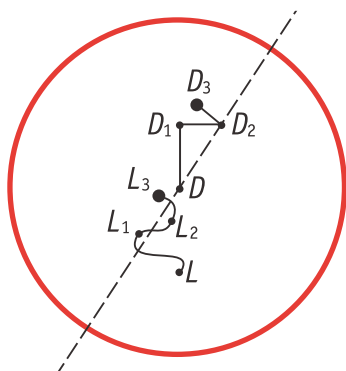


Рис. 4.

Продолжая рассуждать далее таким же образом, мы получим следующее. Пусть Дрессировщик аналогичным образом пробежал уже n отрезков с длинами $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ и оказался в точке D_n , а Лев находится в точке L_n и пока ещё не догнал Дрессировщика. Покажем, что Дрессировщик сможет таким же образом пробежать по крайней мере ещё один отрезок. Проведём прямую DD_n и направим Дрессировщика перпендикулярно этой прямой в ту полуплоскость, в которой нет Льва (рис. 5). Пусть Дрессировщик пробежит так отрезок D_nD_{n+1} длины r_{n+1} .

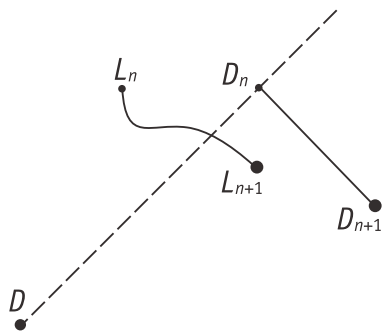


Рис. 5.

Убедимся, что Лев не сможет догнать Дрессировщика, пока тот бежит по отрезку D_nD_{n+1} . Допустим, он догнал Дрессировщика в некоторой точке A отрезка D_nD_{n+1} (рис. 6), тогда путь, который пробежал Лев, не меньше длины отрезка L_nA , который в свою очередь не меньше отрезка BA , где B – точка пересечения прямых L_nA и DD_n . Но отрезок BA не меньше D_nA , который пробежал Дрессировщик. То есть

$$L_nA \geq BA \geq D_nA,$$

поэтому Лев смог бы догнать Дрессировщика только в том случае, если бы оба неравенства обратились в равенства. Но первое неравенство становится равенством только в том случае, если точка L_n лежит на прямой DD_n (то есть точки L_n и B совпадают), а второе – только в случае,

когда B и D_n – одна и та же точка. Откуда получаем, что Лев смог бы догнать Дрессировщика только, если бы точки L_n и D_n совпали, а мы предположили, что это не так.

В итоге Дрессировщик удалился от центра арены на расстояние

$$DD_{n+1} = \sqrt{DD_n^2 + D_n D_{n+1}^2}.$$

Из соображений, изложенных ранее, ясно, что

$$DD_4 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2},$$

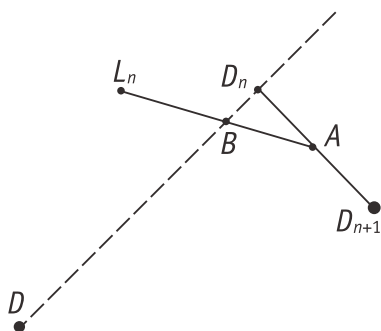


Рис. 6.

$$DD_5 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2},$$

...

$$DD_n = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2},$$

поэтому

$$DD_{n+1} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 + r_{n+1}^2}.$$

Продолжая рассуждать далее таким же образом, мы получим, что Дрессировщик сможет пробежать бесконечно много отрезков, не будучи съеденным Львом. Означает ли это, что Лев никогда не догонит Дрессировщика? Вообще говоря, нет! Чтобы лучше понять это, вспомним парадокс (апорию) Зенона про Ахиллеса и черепаху.

Ахиллес и черепаха стоят на одной дороге на некотором расстоянии друг от друга. Они одновременно начинают движение в одном направлении. Казалось бы, что Ахиллес быстро догонит черепаху. Однако Зенон «доказывает», что Ахиллес никогда

не сможет её догнать. Рассуждает он следующим образом. Прежде чем Ахиллес догонит черепаху, ему сначала необходимо пробежать отрезок пути до того места, где первоначально находилась черепаха, но за это время черепаха успеет проползти какое-то (пусть и очень малое) расстояние. Пока Ахиллес преодолевает его, черепаха успевает проползти ещё некоторое расстояние. Ахиллес пробегает и его, а черепаха успевает проползти ещё чуть-чуть... и так далее до бесконечности!



Так при каком же условии Дрессировщик сможет бегать сколь угодно долго? Для этого необходимо, чтобы последовательность чисел

$$r_1, r_2, r_3, \dots$$

была такой, что для любого числа M найдётся k такое, что

$$r_1 + r_2 + \dots + r_k > M.$$

При этом Дрессировщик всё время должен находиться внутри арены, а это означает, что для любого k

$$DD_k^2 = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_k^2 < R^2.$$

На математическом языке эти два условия записываются следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i = \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} r_i^2 < R^2.$$

Последовательностей с такими свойствами много. Самая известная из них – последовательность чисел, обратных к натуральным:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad r_k = \frac{1}{k}, \quad \dots$$

она образует так называемый *гармонический ряд*.

Давайте сначала докажем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty.$$

Для этого оценим сумму первых 2^n членов (где n – некоторое натуральное число):

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} &= \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16} \right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Оценим каждое из выражений, заключённых в скобки, отдельно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16} &> \\ &> \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}_{8 \text{ слагаемых}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots \\ \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n} &> \\ &> \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1} \text{ слагаемых}} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Откуда имеем

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} &> \\ &> 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{n+2}{2}. \end{aligned}$$

А это и означает, что если мы возьмём достаточно много слагаемых, то сумма может стать сколь угодно большой.

Теперь покажем, что сумма

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

ограничена.

Для доказательства этого утверждения нам понадобится одно неравенство:

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{n^2} &< \\ &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{(k-1)k} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n} \right) = \\ &= 2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \dots \\ &\dots + \left(-\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} \right) - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

На самом деле можно показать, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

но нам такая точность не требуется.

На этом интересном свойстве гармонического ряда основан один «парадокс». Рассмотрим бесконечную последовательность квадратов (рис. 7) со сторонами один метр, полметра, треть метра, четверть метра, ..., $\frac{1}{k}$ метра, ...

Пусть у нас есть карандаш, которым можно обрисовать квадрат по контуру и кисть с краской, которой можно закрасить квадрат целиком. Давайте попробуем обвести контуры всех рассматриваемых квадратов карандашом. Для этого нам потребуется провести линии, суммарная длина которых равна сумме периметров всех квадратов. Но

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{i} = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty.$$

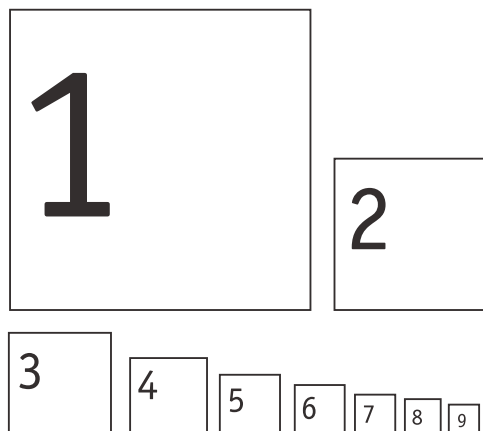


Рис. 7.

Поэтому обрисовать все квадраты нам точно не удастся!

Однако из того, что сумму площадей этих квадратов можно оценить сверху

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < 2 \text{ м}^2,$$

мы получаем, что для того, чтобы окрасить все квадраты, нам понадобится нанести менее, чем два квадратных метра краски.

Получается довольно интересный факт: *обвести по контуру квадраты мы не можем, а вот окрасить целиком вполне способны!*

Но вернёмся теперь к нашему Дрессировщику. Из рассуждений, изложенных выше, мы получаем, что если взять последовательность

$$r_i = \frac{R}{2^i},$$

то во-первых,

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i = \frac{1}{2R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty,$$

а во-вторых,

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i^2 = \frac{R^2}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \frac{2R^2}{4} = \frac{R^2}{2} < R^2.$$

Таким образом, Дрессировщик действительно сможет бегать ото Льва бесконечно долго и при этом не покидать пределов арены!

