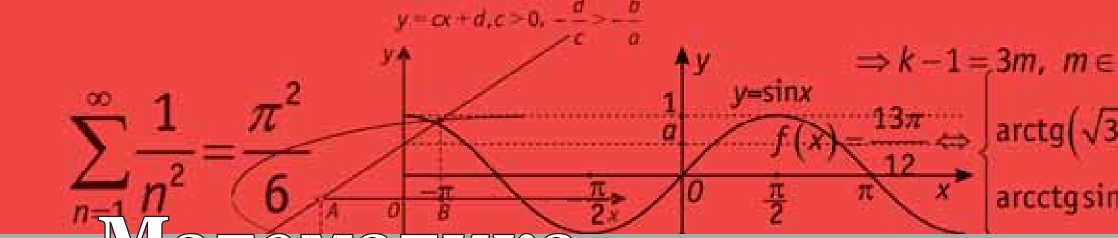

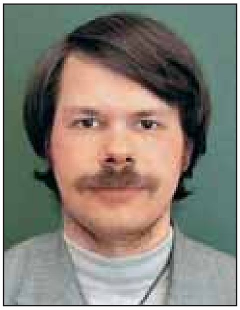

Шведов Олег Юрьевич
Кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник кафедры статистики и теории поля физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (МГУ). Лауреат премии Европейской Академии для молодых учёных СНГ и премии имени Н.Н. Боголюбова. Член методической комиссии и жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Извлекаем квадратный корень

При решении задач постоянно встречаются выражения, содержащие квадратные корни. В статье рассматриваются приближённые методы извлечения квадратного корня: перебор, последовательное определение цифр, линейное приближение, квадратичное приближение для квадратных корней из чисел, близких к единице. Полученные различными методами результаты вычисления квадратных корней сравниваются друг с другом.

1. Метод перебора

Нам требуется подобрать число $b=\sqrt{a}$, квадрат которого равен a. Первое, что приходит в голову, – перебрать числа 1, 2, ..., 9, 10, 20, 30, ... и, используя таблицу умножения, выбрать из данного списка два соседних числа, между квадратами которых располагается a. Тогда эти два соседних числа и будут границами интервала, в котором заключено число $\sqrt{a}$. Первая грубая оценка для $\sqrt{a}$ получена.

Наихудшую точность данный метод даёт в случае, если a попадает в интервал от 1 до 4, от 100 до 400 и т.д. Тогда нижняя и верхняя границы для $\sqrt{a}$ отличаются вдвое, что довольно много. Желательно поэтому, наряду с квадратами чисел из таблицы умножения, помнить еще, что $15^2=225$, и включить число 1,5 в рассматриваемый список. Получена грубая таблица квадратных корней (таблица 1).

Таблица 1

Грубая таблица квадратных корней

x	$\sqrt{x}$
0,09	0,3
0,16	0,4
0,25	0,5
0,36	0,6
0,49	0,7
0,64	0,8
0,81	0,9
1	1

2,25	1,5
4	2
9	3

Приведём некоторые примеры грубых оценок по таблице 1:

$$1<\sqrt{2}<1{,}5;\ 20<\sqrt{700}<30,$$

$$0{,}4<\sqrt{0{,}22}<0{,}5;\ 10<\sqrt{173}<15.$$

2. Последовательное определение цифр

Для более точного извлечения квадратного корня можно использовать метод последовательного определения цифр, изучению которого в дореволюционной школе отводилось значительное время: А.П. Киселёв в своем учебнике [1] посвящал данному алгоритму больше места, чем решению квадратных уравнений.

Опишем основную идею. Пусть a – число, из которого извлекается квадратный корень, а b_0 – приближённое значение корня ($a \simeq b_0^2$), содержащее, например, одну верную цифру. Требуется подобрать более точную (с большим числом значащих цифр) оценку b_0+b_1. Можно записать:

$$a \simeq (b_0+b_1)^2, \text{ или } a-b_0^2 \simeq 2b_0b_1+b_1^2. \quad (1)$$

Перебирая последовательно различные цифры, подбираем наибольшее из числа рассмотренных значение b_1, удовлетворяющее соотношению (1). Приведём пример использования алгоритма.

Задача 1. Определите две значащие цифры квадратных корней $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{22}, \sqrt{42}, \sqrt{173}, \sqrt{497}$.

Решение. Имеем: $\sqrt{2}=(1+b_1)$, где в качестве b_1 можно выбрать числа 0; 0,1; 0,2; ... ; 0,9. Тогда

$$1=2b_1+b_1^2.$$

Если подобрать $b_1=0{,}5$, то правая часть равенства окажется больше единицы; при $b_1=0{,}4$ – меньше единицы. Поэтому

$$\sqrt{2}\begin{cases}>1{,}4\\<1{,}5\end{cases}.$$

Аналогично получим:

$$\sqrt{7}=2+b_1 \Leftrightarrow 3=4b_1+b_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_1\begin{cases}>0{,}6\\<0{,}7\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{7}\begin{cases}>2{,}6\\<2{,}7\end{cases}.$$

$$\sqrt{22}=4+b_1 \Leftrightarrow 6=8b_1+b_1^2.$$

$$b_1\begin{cases}>0{,}6\\<0{,}7\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{22}\begin{cases}>4{,}6\\<4{,}7\end{cases}.$$

$$\sqrt{42}=6+b_1 \Leftrightarrow 6=12b_1+b_1^2 \Leftrightarrow$$

$$b_1\begin{cases}>0{,}4\\<0{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{42}\begin{cases}>6{,}4\\<6{,}5\end{cases}.$$

$$\sqrt{173}=10+b_1 \Leftrightarrow 73=20b_1+b_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_1\begin{cases}>3\\<4\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{173}\begin{cases}>13\\<14\end{cases}.$$

$$\sqrt{497}=10+b_1 \Leftrightarrow 97=40b_1+b_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_1\begin{cases}>2\\<3\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{497}\begin{cases}>22\\<23\end{cases}.$$

Задача 2. Определите три значащие цифры квадратного корня $\sqrt{2}$.

Решение. Имеем: $\sqrt{2}=1+0{,}4+b_2$, где в качестве b_2 можно выбирать числа 0; 0,01; 0,02; 0,03; ... ; 0,09. Тогда

$$2-(1+0{,}4)^2=2{,}8b_2+b_2^2.$$

Учтём, что разность

$$2-(1+0{,}4)^2=0{,}04$$

рассчитывалась при решении задачи 1, отсюда

$$0{,}04=2{,}8b_2+b_2^2 \Leftrightarrow b_2\begin{cases}>0{,}01\\<0{,}02\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2}\begin{cases}>1{,}41\\<1{,}42\end{cases}.$$

Рассмотренный алгоритм выглядел на бумаге следующим образом (таблица 2):

- записывали число a и приближённое значение квадратного корня b_0;

- под числом a последовательно записывали b_0^2 и $a - b_0^2$;
- слева от числа $a - b_0^2$ записывали $2b_0 + b_1$, под ним b_1; под числом $a - b_0^2$ записывали $(2b_0 + b_1)b_1$ и
$$a - b_0^2 - (2b_0 + b_1)b_1 = a - (b_0 + b_1)^2;$$
- аналогично оформляли последующие этапы вычисления.

Таблица 2

Запись алгоритма последовательного определения цифр числа $\sqrt{a}$; расчёт $\sqrt{2}$ по данному алгоритму

$\begin{array}{r\|l} a & b_0 \\ -b_0^2 & \\ \hline a-b_0^2 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|r\|l} & a & b_0+b_1 \\ & -b_0^2 & \\ \hline 2b_0+b_1 & a-b_0^2 & \\ \times b_1 & -(2b_0+b_1)b_1 & \\ \hline & a-(b_0+b_1)^2 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|r\|l} & a & b_0+b_1+b_2 \\ & -b_0^2 & \\ \hline 2b_0+b_1 & a-b_0^2 & \\ \times b_1 & -(2b_0+b_1)b_1 & \\ \hline 2(b_0+b_1)+b_2 & a-(b_0+b_1)^2 & \\ \times b_2 & -(2(b_0+b_1)+b_2 & \end{array}$
$\begin{array}{r\|l} 2 & 1 \\ -1 & \\ \hline 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|r\|l} & 2{,}00 & 1{,}4 \\ & -1{,}00 & \\ \hline 2{,}4 & 1{,}00 & \\ \times 0{,}4 & -0{,}96 & \\ \hline & 0{,}04 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|r\|l} & 2{,}0000 & 1{,}41 \\ & -1{,}0000 & \\ \hline 2{,}4 & 1{,}0000 & \\ \times 0{,}4 & -0{,}9600 & \\ \hline 2{,}81 & 0{,}0400 & \\ \times 0{,}01 & -0{,}0281 & \\ \hline & 0{,}0119 & \end{array}$

3. Уточнение грубой оценки: линейное приближение

Для извлечения квадратного корня можно использовать и другой алгоритм, требующий для получения той же точности меньшего объёма вычислений. Алгоритм основан на использовании тождества:

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a^*}}{a - a^*} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a^*}}, \qquad (2)$$

позволяющего существенно уточнить оценку квадратного корня.

Тождество (2) следует применять, взяв в качестве a число, из которого извлекается квадратный корень, а в качестве a^* – ближайшее к a число, квадратный корень из которого известен. Применив тождество (2), следует использовать грубую оценку для $\sqrt{a}$ из предыдущего раздела.

Задача 3. Вычислите приближённо с помощью таблицы 1 и формулы (2) квадратные корни $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{22}$, $\sqrt{42}$, $\sqrt{173}$, $\sqrt{497}$.

Решение.

- Вычислим $\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{2,25}-\sqrt{2}}{2,25-2}=\frac{1}{\sqrt{2,25}+\sqrt{2}}\begin{cases}>\dfrac{1}{3}\\[2mm] <\dfrac{1}{1,25}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2}>1,5-\dfrac{0,25}{2,5}=1\dfrac{2}{5},\\[2mm] \sqrt{2}<1,5-\dfrac{0,25}{3}=1\dfrac{5}{12}.\end{cases}$$

- Вычислим $\sqrt{7}$:

$$\frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{9-7}=\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}\begin{cases}>\dfrac{1}{6}\\[2mm] <\dfrac{1}{5}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{7}>3-\dfrac{2}{5}=2\dfrac{3}{5},\\[2mm] \sqrt{7}<3-\dfrac{2}{6}=2\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

- Вычислим $\sqrt{22}$:

$$\frac{\sqrt{25}-\sqrt{22}}{25-22}=\frac{1}{\sqrt{25}+\sqrt{22}}\begin{cases}>\dfrac{1}{10}\\[2mm] <\dfrac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{22}>5-\dfrac{3}{9}=4\dfrac{2}{3},\\[2mm] \sqrt{22}<5-\dfrac{3}{10}=4\dfrac{7}{10}.\end{cases}$$

- Вычислим $\sqrt{42}$:

$$\frac{\sqrt{42}-\sqrt{36}}{42-36}=\frac{1}{\sqrt{42}+\sqrt{36}}\begin{cases}>\dfrac{1}{13}\\[2mm] <\dfrac{1}{12}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{42}>6+\dfrac{6}{13}=6\dfrac{6}{13},\\[2mm] \sqrt{42}<6+\dfrac{6}{12}=6\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

- Вычислим $\sqrt{173}$:

$$\frac{\sqrt{225}-\sqrt{173}}{225-173}=\frac{1}{\sqrt{225}+\sqrt{173}}\begin{cases}>\dfrac{1}{30}\\[2mm] <\dfrac{1}{25}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{173}>15-\dfrac{48}{25}=13\dfrac{2}{25},\\[2mm] \sqrt{173}<15-\dfrac{48}{30}=13\dfrac{2}{5}.\end{cases}$$

- Вычислим $\sqrt{497}$:

$$\frac{\sqrt{497}-\sqrt{400}}{497-400}=\frac{1}{\sqrt{497}+\sqrt{400}}\begin{cases}>\dfrac{1}{50}\\[2mm] <\dfrac{1}{40}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{497}>20+\dfrac{97}{50}=21\dfrac{47}{50},\\[2mm] \sqrt{497}<20+\dfrac{97}{40}=22\dfrac{17}{40}.\end{cases}$$

Проиллюстрируем алгоритм на примере квадратных корней из чисел, являющихся полными квадратами.

Задача 4. Вычислите приближённо с помощью таблицы 1 и формулы (2) квадратные корни $\sqrt{677329}$, $\sqrt{7360369}$.

Решение.

- Вычислим $\sqrt{677329}$:

$$\frac{\sqrt{677329}-\sqrt{640000}}{677329-640000}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{677329}+\sqrt{640000}}\Leftrightarrow\begin{cases}>\dfrac{1}{1700}\\[2mm] <\dfrac{1}{1600}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{677329}>800+\dfrac{37,329}{1,7}=821,9,\\[2mm] \sqrt{677329}<800+\dfrac{37,329}{1,6}=823,4.\end{cases}$$

- Вычислим $\sqrt{7360369}$:

$$\frac{\sqrt{9000000}-\sqrt{7360369}}{9000000-736369}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9000000}+\sqrt{7360369}}\begin{cases}>\dfrac{1}{6000}\\[2mm] <\dfrac{1}{5000}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7360369} > 3000 - \dfrac{1639{,}631}{5} = 2672, \\ \sqrt{7360369} < 3000 - \dfrac{1639{,}631}{6} = 2727. \end{cases}$$

Отметим, что точные значения квадратных корней из задачи 4 равны 823 и 2713. Задача 4 показывает, что метод с использованием таблицы 1 может дать даже на первом шаге две-три значащие цифры.

Полученным неравенствам можно дать геометрическую интерпретацию. Для этого решим следующую задачу.

Задача 5. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=\sqrt{x}$ в точке $(a;\sqrt{a})$. Покажите, что график функции $y=\sqrt{x}$ располагается ниже касательной.

Решение. Среднее геометрическое чисел $\sqrt{a}$ и $\dfrac{x}{\sqrt{a}}$, равное $\sqrt{x}$, не может превышать их среднего арифметического:

$$\sqrt{a} < \frac{x+a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{a} + \frac{x-a}{2\sqrt{a}},$$

причём равенство достигается только при $x=a$. Таким образом, график функции $y=\sqrt{x}$ располагается не выше прямой $y=\sqrt{a}+\dfrac{x-a}{2\sqrt{a}}$, имея с ней одну общую точку $(a;\sqrt{a})$. Следовательно, данная прямая является касательной; её угловой коэффициент равен $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Проиллюстрируем теперь на рис. 1 полученное в задаче 1 неравенство для $\sqrt{7}$. Участок графика функции $y=\sqrt{x}$, заключённый в области $4<x<9$, располагается выше хорды – отрезка, соединяющего точки $(4;2)$ и $(9;3)$, но ниже касательной, проведённой к графику в точке $(9;3)$. Поскольку угловые коэффициенты хорды и касательной равны соответственно $\dfrac{1}{5}$ и $\dfrac{1}{6}$, график функции $y=\sqrt{x}$ пересекает прямую $x=7$ в точке, лежащей между $(7;3-\dfrac{2}{5})$ и $(7;3-\dfrac{2}{6})$. Отметим, что использованная нами процедура замены графика некоторой функции на прямую линию называется линейным приближением данной функции.

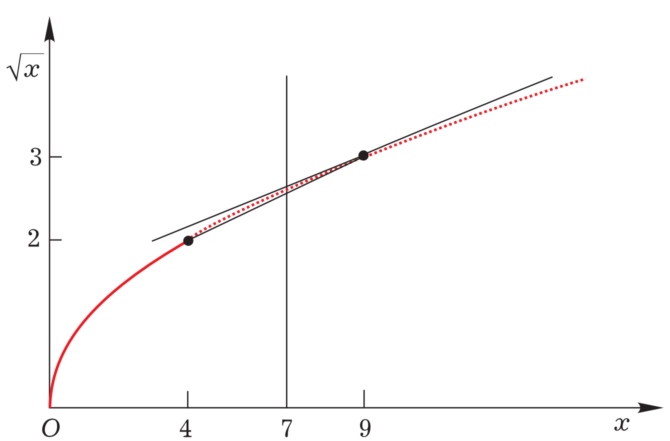

Рис. 1. Графическая интерпретация оценки для квадратного корня

4. Использование более точной таблицы квадратных корней

Чтобы увеличить точность извлечения квадратного корня по формуле (2), можно составить более подробную таблицу чисел, квадратный корень из которых известен: в первую очередь следует заполнять промежутки между соседними числами, отношение которых достаточно большое. Например, можно использовать таблицу 3, в которой значение $\sqrt{2,25}=1,5$ для краткости опущено.

Задача 6. Вычислите приближённо с помощью таблицы 3 и формулы (2) квадратные корни $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{22}$, $\sqrt{42}$, $\sqrt{173}$, $\sqrt{497}$, $\sqrt{677329}$ и $\sqrt{7360369}$.

Решение. Границы интервала значений для $\sqrt{42}$ и $\sqrt{677329}$ не отличаются от вычисленных по таблице 1. Рассчитаем остальные квадратные корни.

Таблица 3

Подробная таблица квадратных корней

x	$\sqrt{x}$
0,09	0,3
0,1225	0,35
0,16	0,4
0,2025	0,45
0,25	0,5
0,3025	0,55
0,36	0,6
0,49	0,7
0,64	0,8
0,81	0,9
1	1
1,21	1,1
1,44	1,2
1,96	1,4
2,56	1,6
3,24	1,8
4	2
4,84	2,2
5,76	2,4
7,84	2,8
9	3

- Вычислим $\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1,96}}{2-1,96}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1,96}}\left\{\begin{array}{l}>\dfrac{1}{3}\\[2mm]<\dfrac{1}{2,8}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2}>1,4+\dfrac{0,04}{3}=1\dfrac{31}{75},\\[2mm]\sqrt{2}<1,4+\dfrac{0,04}{2,8}=1\dfrac{29}{70}.\end{array}\right.$$

- Вычислим $\sqrt{7}$:

$$\frac{\sqrt{7,84}-\sqrt{7}}{7,84-7}=\frac{1}{\sqrt{7,84}+\sqrt{7}}\left\{\begin{array}{l}>\dfrac{1}{5,6}\\[2mm]<\dfrac{1}{5,2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{7}>2,8-\dfrac{0,84}{5,4}=2\dfrac{83}{130},\\[2mm]\sqrt{7}<2,8-\dfrac{0,84}{5,6}=2\dfrac{13}{20}.\end{array}\right.$$

- Вычислим $\sqrt{22}$:

$$\frac{\sqrt{25}-\sqrt{22}}{25-22}=\frac{1}{\sqrt{25}+\sqrt{22}}\left\{\begin{array}{l}>\dfrac{1}{9,5}\\[2mm]<\dfrac{1}{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{22}>4,5-\dfrac{1,75}{9,5}=4\dfrac{13}{19},\\[2mm]\sqrt{22}<4,5-\dfrac{1,75}{9}=4\dfrac{25}{36}.\end{array}\right.$$

- Вычислим $\sqrt{173}$:

$$\frac{\sqrt{196}-\sqrt{173}}{196-173}=\frac{1}{\sqrt{196}+\sqrt{173}}\left\{\begin{array}{l}>\dfrac{1}{28}\\[2mm]<\dfrac{1}{26}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{173}>14-\dfrac{23}{26}=13\dfrac{3}{26},\\[2mm]\sqrt{173}<14-\dfrac{23}{28}=13\dfrac{5}{28}.\end{array}\right.$$

- Вычислим $\sqrt{497}$:

$$\frac{\sqrt{497}-\sqrt{484}}{497-484}=\frac{1}{\sqrt{497}+\sqrt{484}}\begin{cases} >\dfrac{1}{46} \\ <\dfrac{1}{44} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{497}>22+\dfrac{13}{46}=22\dfrac{13}{46}, \\ \sqrt{497}<22+\dfrac{13}{44}=22\dfrac{13}{44}. \end{cases}$$

- Вычислим $\sqrt{7360369}$:

$$\frac{\sqrt{7840000}-\sqrt{7360369}}{7840000-7360369}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{7840000}+\sqrt{7360369}}\begin{cases} >\dfrac{1}{5600} \\ <\dfrac{1}{5400} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{7360369}>2800-\dfrac{479{,}631}{5{,}4}=2711, \\ \sqrt{7360369}<2800-\dfrac{479{,}631}{5{,}6}=2715. \end{cases}$$

5. Извлечение квадратного корня из числа, близкого к единице: квадратичное приближение

Предположим, что $\sqrt{a}$ приближённо равен b_0. Поскольку

$$\sqrt{a}=b_0\sqrt{\frac{a}{b_0^2}},$$

для уточнения значения $\sqrt{a}$ надо уметь оценивать квадратный корень из числа $\dfrac{a}{b_0^2}$, близкого к единице.

Задача 7. Используя таблицу 3, получите приближённые формулы для $\sqrt{1-z}$ при $0<z<0{,}19$ и $\sqrt{1+z}$ при $0<z<0{,}21$.

Решение. Имеем

$$\frac{\sqrt{1+z}-\sqrt{1}}{(1+z)-1}=\frac{1}{\sqrt{1+z}+1}\begin{cases} >\dfrac{1}{2{,}1} \\ <\dfrac{1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{1+z}>1+\dfrac{z}{2{,}1}, \\ \sqrt{1+z}<1+\dfrac{z}{2}. \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{1}-\sqrt{1-z}}{1-(1-z)}=\frac{1}{\sqrt{1-z}+1}\begin{cases} >\dfrac{1}{2} \\ <\dfrac{1}{1{,}9} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{1-z}<1-\dfrac{z}{2}, \\ \sqrt{1-z}>1-\dfrac{z}{1{,}9}. \end{cases}$$

Таким образом, при малых z *справедлива приближённая формула:*

$$\sqrt{1+z}\simeq 1+\frac{z}{2}. \qquad (3)$$

Метод извлечения квадратного корня, основанный на использовании приближённой формулы (3), описан в [2].

При малых z можно получить более точную по сравнению с задачей 7 оценку погрешности формулы (3).

Задача 8. Оцените разность правой и левой частей приближённой формулы (3).

Решение. Обозначим через α

близкое к единице отношение:

$$2\frac{(1+\frac{z}{2})-\sqrt{1+z}}{(1+\frac{z}{2})^2-(1+z)}=\frac{2}{(1+\frac{z}{2})+\sqrt{1+z}}=\alpha.$$

Тогда

$$(1+\frac{z}{2})-\sqrt{1+z}=\alpha\frac{z^2}{8}.$$

Для параметра α на основе таблицы 3 получим оценку:

$$\begin{aligned}&\frac{10}{11}<\alpha<1 \text{ при } 0<z<0{,}2,\\ &1<\alpha<\frac{10}{9} \text{ при } -0{,}19<z<0.\end{aligned} \qquad (4)$$

Из задачи 8 вытекает приближённая формула:

$$\sqrt{1+z}=1+\frac{z}{2}-\alpha\frac{z^2}{8}, \qquad (5)$$

α удовлетворяет неравенствам (4).

В формуле (5) функция $\sqrt{1+z}$ приближённо заменяется на квадратичную по z функцию – используется квадратичное приближение.

Приведём примеры вычислений по формуле (5).

Задача 9. Вычислите приближенно с помощью таблицы 3 и формулы (5) квадратные корни

$$\sqrt{2},\ \sqrt{7},\ \sqrt{22},\ \sqrt{42},\ \sqrt{173},\ \sqrt{497},\ \sqrt{677329},\ \sqrt{7360369}.$$

Решение.

- Вычислим $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}=1{,}4\sqrt{\frac{2}{1{,}4^2}}=1{,}4\sqrt{1+\frac{1}{49}}=$$

$$=1{,}4\left(1+\frac{1}{98}-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{1}{49}\right)^2\right);\ \frac{10}{11}<\alpha<1.$$

- Вычислим $\sqrt{7}$:

$$\sqrt{7}=2{,}8\sqrt{\frac{7}{2{,}8^2}}=2{,}8\sqrt{1-\frac{3}{28}}=$$

$$=2{,}8\left(1-\frac{3}{56}-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{3}{28}\right)^2\right);\ 1<\alpha<\frac{10}{9}.$$

- Вычислим $\sqrt{22}$:

$$\sqrt{22}=4{,}5\sqrt{\frac{22}{4{,}5^2}}=4{,}5\sqrt{\frac{88}{81}}=4{,}5\sqrt{1+\frac{7}{81}}=$$

$$=4{,}5\left(1+\frac{7}{162}-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{7}{81}\right)^2\right);\ \frac{10}{11}<\alpha<1.$$

- Вычислим $\sqrt{42}$:

$$\sqrt{42}=6\sqrt{\frac{42}{6^2}}=6\sqrt{1+\frac{1}{6}}=$$

$$=6\left(1+\frac{1}{12}-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{1}{6}\right)^2\right);\ \frac{10}{11}<\alpha<1.$$

- Вычислим $\sqrt{173}$:

$$\sqrt{173}=14\sqrt{\frac{173}{14^2}}=14\sqrt{1-\frac{23}{196}}=$$

$$=14\left(1-\frac{23}{2\cdot196}-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{23}{196}\right)^2\right);\ 1<\alpha<\frac{10}{9}.$$

- Вычислим $\sqrt{497}$:

$$\sqrt{497}=22\sqrt{\frac{497}{22^2}}=22\sqrt{1+\frac{13}{484}}=$$

$$=22\left(1+\frac{13}{2\cdot484}-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{13}{484}\right)^2\right);\ \frac{10}{11}<\alpha<1.$$

- Вычислим $\sqrt{677329}$:

$$\sqrt{677329}=800\sqrt{\frac{677329}{800^2}}=$$

$$=800\sqrt{1+\frac{3{,}7329}{64}}=$$

$$=800\left(1+\frac{3{,}7329}{2\cdot64}-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{3{,}7329}{64}\right)^2\right);$$

$$\frac{10}{11}<\alpha<1.$$

- Вычислим $\sqrt{7360369}$:

$$\sqrt{7360369}=2800\sqrt{\frac{7360369}{2800^2}}=$$

$$=2800\sqrt{1-\frac{0,479631}{7,84}}=$$

$$=2800\left(1-\frac{0,479631}{2\cdot 7,84}-\frac{\alpha}{8}\left(\frac{0,479631}{7,84}\right)^2\right);$$

$$1<\alpha<\frac{10}{9}.$$

Отметим, что для перевода обыкновенных дробей из задачи 9 в десятичные всё-таки желательно иметь доступ к микрокалькулятору, выполняющему операции сложения, вычитания, умножения и деления.

Метод задачи 9 можно применять и в совокупности с формулой (2) и таблицей 1: сначала найти приближённо квадратный корень $\sqrt{a}\simeq b_0$ не по таблице 3, а методом задачи 1; затем – использовать формулу (5) для $\sqrt{a/b_0^2}$.

6. Сравнение методов

Границы интервалов для значений квадратных корней, найденных разными методами, приведены в таблице 4. Видно, что с помощью формулы (2) и таблицы 1 мы получили в среднем две верные цифры квадратного корня, по таблице 3 – три цифры, по формуле (5) – 4-5 цифр. «Платой» за точность метода является бóльший объём вычислений.

Список литературы

1. А.П. Киселёв. Алгебра. Часть первая. М.: Физматлит, 2006.

2. Я.И. Перельман. Занимательная алгебра. Занимательная геометрия. М.: АСТ, 2006.

Таблица 4

Границы интервалов для квадратных корней, полученных с помощью таблиц 1 и 3, и результаты вычисления квадратных корней на микрокалькуляторе

Исследуемый квадратный корень	Границы диапазона значений квадратного корня, рассчитанного приближённо			Значение квадратного корня, полученное нажатием клавиши «$\sqrt{\ }$» на микрокалькуляторе
	По таблице 1 и формуле (2)	По таблице 3 и формуле (2)	По таблице 3 и формуле (5)	
$\sqrt{2}$	1,400-1,417	1,4133-1,4143	1,414212-1,414220	1,4142135
$\sqrt{7}$	2,60-2,67	2,638-2,650	2,6455-2,6460	2,64575
$\sqrt{22}$	4,66-4,70	4,684-4,695	4,6902-4,6907	4,69042
$\sqrt{42}$	6,46-6,50	6,46-6,50	6,4791-6,4811	6,48074
$\sqrt{173}$	13,04-13,40	13,11-13,18	13,151-13,155	13,1529
$\sqrt{497}$	21,94-22,43	22,282-22,296	22,2934-22,2937	22,29350
$\sqrt{677329}$	821,9-823,4	821,9-823,4	822,990-823,022	823
$\sqrt{7360369}$	2672-2727	2711-2715	2712,89-2713,05	2713