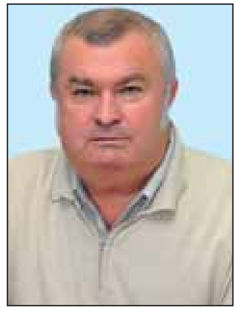

Ситников Борис Дмитриевич
Доцент кафедры прикладной математики и заместитель директора института экономики и менеджмента (ИЭМ) БГТУ им. В.Г. Шухова, преподаватель математики на региональных подготовительных курсах (РПК).

Графики функций

В заметке приводятся несколько примеров применения некоторых важных приёмов построения графиков функций, встречающихся в школьной программе.

Автор предполагает, что учащиеся знакомы с понятием функции и графиками элементарных функций: линейной функции – прямой $y = kx + b$, квадратичной функции – параболы $y = Ax^2 + Bx + C$, гиперболы $y = \frac{1}{x}$, основных тригонометрических функций $y = \sin x$, $\cos x$ и т.д.

1. Роль ОДЗ при построении графиков

Иногда при исследовании ОДЗ заданное выражение упрощается, а значит, и строить будет легче.

Пример 1. Постройте эскиз графика функции $y = \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1}$.

Решение. Преобразуем сначала заданное выражение:

$$y = \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1} = \frac{\sqrt{\left(x^2 - 2x + 1\right)x}}{x - 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{(x-1)^2}}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} \cdot |x - 1|}{x - 1} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x},\ x > 1, \\ -\sqrt{x},\ 0 \le x < 1. \end{array}\right.$$

Теперь видно, что функция определяется разными формулами на двух промежутках ОДЗ, но на каждом из них она является хорошо *известной* функцией. Строим эскиз – рис. 1.

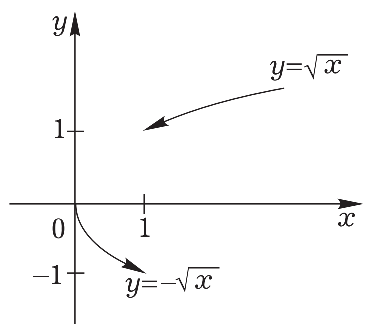

Рис. 1

Пример 2. Постройте эскиз графика функции $y = \arcsin \frac{x}{2\sqrt{x - 1}}$.

Решение. Найдём сначала область определения:

$$\left|\frac{x}{2\sqrt{x-1}}\right| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 4(x-1), \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \le 0, \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Итак, ОДЗ состоит из одной точки, значит, и график – одна точка: $y(x) \equiv y(2) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ – рис. 2.

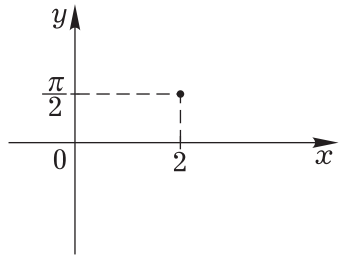

Рис. 2

2. Построение графиков дробно – линейных функций и сводящихся к ним

Построение будем основывать на четырёх основных преобразованиях:

1) если график функции $y = f(x)$ известен, то график функции $y = f(x) \pm a$, $a > 0$ получается сдвигом графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy вверх или вниз на a;

2) если график функции $y = f(x)$ известен, то график функции $y = f(x \pm a)$, $a > 0$ получается сдвигом графика $y = f(x)$ влево ($y = f(x+a)$) или вправо ($y = f(x-a)$) вдоль оси Ox на a;

3) $y = |f(x)|$ – оставляем верхнюю часть графика, а нижнюю отражаем симметрично относительно оси Ox;

4) $y = f(|x|)$ – функция чётная: $f(-x) = f(x)$. Построив график при $x \ge 0$, продолжаем его чётно на полуось $x \le 0$.

Пример 3. Постройте эскиз графика функции $y = \frac{x+2}{x-3}$.

Решение. Для построении графика дробно-линейной функции прежде всего надо выделить *целую* часть $y = \frac{x+2}{x-3} = \frac{(x-3)+3+2}{x-3} = 1 + \frac{5}{x-3}$. Теперь видно, что у графика вертикальная асимптота $x = 3$, а при $x \to \infty$ функция стремится к 1, т.е. при $x \to \infty$ у графика горизонтальная асимптота $y = 1$. «Продвинутые» школьники могут начать искать пределы при $x \to 3-0$ и при $x \to 3+0$, но это лишняя и не самая простая задача. Всё становится очевидным, когда мы увидели, что график функции $y = 1 + \frac{5}{x-3}$ (рис. 3) – это поднятая вверх на 1 и сдвинутая вправо на 3 обычная гипербола $y = \frac{5}{x}$ (рис. 4).

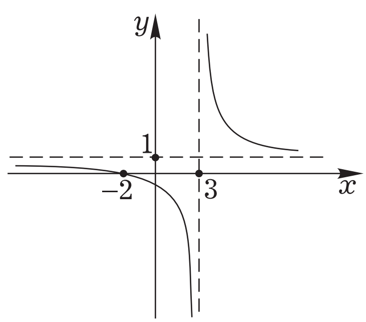

Рис. 3

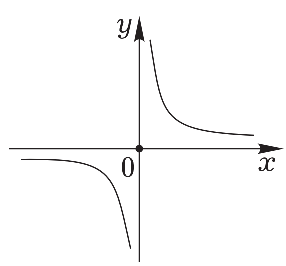

Рис. 4

Для «точности» можно на эскиз нанести некоторые точки, например:

$$y(0)=-\frac{2}{3},\quad y(2)=-4,\quad y(4)=6.$$

Пример 4. Постройте эскиз графика функции $y=\dfrac{15+2x}{3-2|x|}$.

Решение. При $x\geq 0$ график функции $y=\dfrac{15+2x}{3-2|x|}$ совпадает с графиком функции

$$y=\frac{15+2x}{3-2x}=-\frac{(2x-3)+3+15}{2x-3}=$$

$$=-1-\frac{18}{2x-3}.$$

Строим пунктиром гиперболу $y=-1-\dfrac{18}{2x-3}$ и обводим «жирно» ту часть, которая находится в правой полуплоскости, а остальную часть стираем – рис. 5. При $x\leq 0$ график функции $y=\dfrac{15+2x}{3-2|x|}$ совпадает с графиком функции

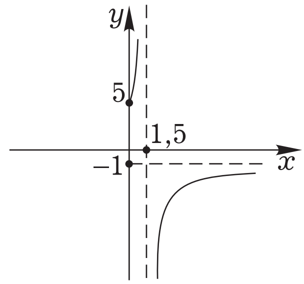

Рис. 5

$$y=\frac{15+2x}{3+2x}=1+\frac{12}{2x+3}.$$

Строим пунктиром гиперболу $y=1+\dfrac{12}{2x+3}$ и обводим «жирно» ту часть, которая находится в левой полуплоскости, а остальную часть стираем – рис. 6. Перенеся обе «жирные» кривые на один рисунок, получаем рис. 7. (Аккуратные учащиеся могут рисовать вспомогательные графики сразу на одном рисунке.)

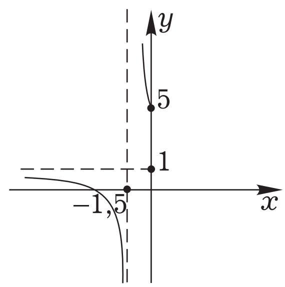

Рис. 6

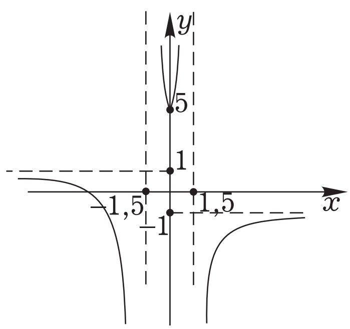

Рис. 7

Пример 5. Постройте эскиз графика функции $y=\left|\frac{11x-2}{4x-1}\right|$.

Решение. Выделим сначала целую часть:

$$y=\left|\frac{11x-2}{4x-1}\right|=\frac{11}{4}\left|\frac{x-\frac{2}{11}}{x-\frac{1}{4}}\right|=$$

$$=\frac{11}{4}\left|\frac{x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{2}{11}}{x-\frac{1}{4}}\right|=\left|\frac{11}{4}+\frac{3}{4(4x-1)}\right|.$$

Потом построим эскиз гиперболы $y=\frac{11}{4}+\frac{3}{4(4x-1)}$ – рис. 8, а затем отразим «отрицательную» часть относительно оси Ox. Это будет уже график функции $y=\left|\frac{11}{4}+\frac{3}{4(4x-1)}\right|$ – рис. 9.

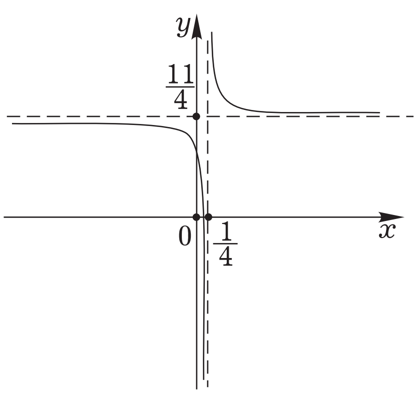

Рис. 8

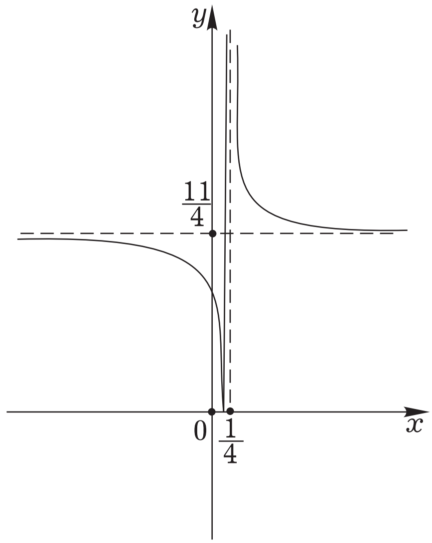

Рис. 9

Пример 6. Постройте эскиз графика функции $y=\left|\frac{2|x|-3}{3|x|-4}\right|$.

Решение. Функция $y=\left|\frac{2|x|-3}{3|x|-4}\right|$ – чётная. Поэтому удобно построить сначала эскиз для $x\geq 0$. В этом случае график заданной функции совпадает с графиком функции

$$y=\left|\frac{2x-3}{3x-4}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{3(3x-4)}\right|.$$

Построим пунктиром гиперболу $y=\frac{2}{3}-\frac{1}{3(3x-4)}$, обведём сначала «жирно» ту часть, расположенную в правой полуплоскости, где функция принимает неотрицательные значения. Затем в правой полуплоскости отразим отрицательные значения относительно оси Ox и обведём их тоже «жирно» – получаем график

$$y=\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{3(3x-4)}\right|$$

для $x \geq 0$. Теперь «отражаем» чётным образом график относительно оси Oy – получаем искомый график (рис. 10).

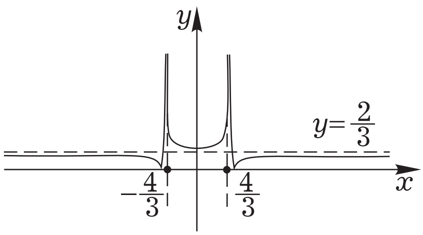

Рис. 10

Пример 7. Постройте эскиз графика функции $y = \left|\frac{1}{|x|-2}+1\right|$.

Решение. Это задача, совершенно аналогичная предыдущей, но решим её чуть-чуть по-другому.

Используя приведённые в самом начале преобразования, построим график

$$y = \left|\frac{1}{|x|-2}+1\right|$$

«поэтапно» – рис. 11-15:

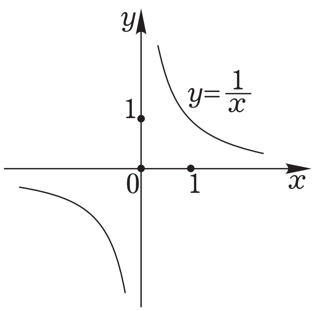

Рис. 11

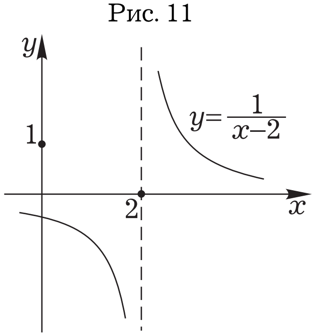

Рис. 12

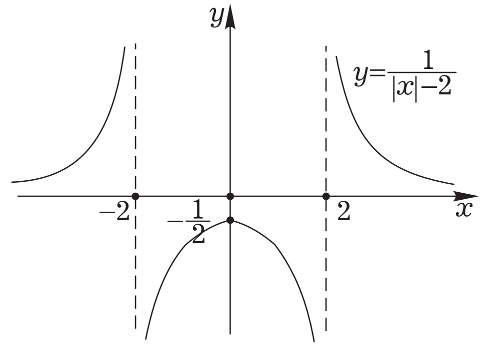

Рис. 13

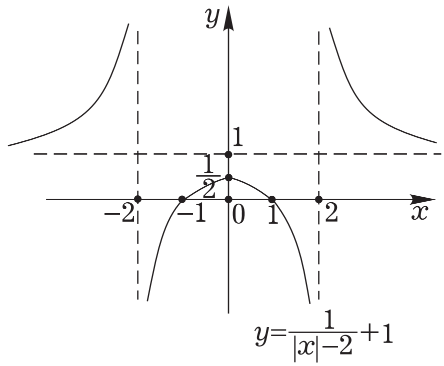

Рис. 14

и окончательно:

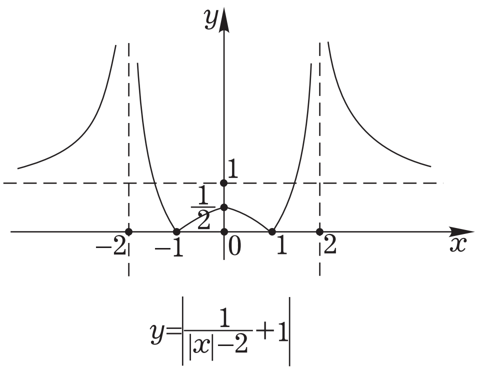

Рис. 15

3. Некоторые примеры построения произведения и частного двух функций

Пример 8. Постройте эскиз графика функции $y=\dfrac{13x^2-1}{x^2+1}$.

Решение. Преобразуем формулу:

$$y=\frac{13x^2-1}{x^2+1}=\frac{13\left(x^2+1-1\right)-1}{x^2+1}=$$

$$=13-\frac{14}{x^2+1}.$$

Теперь ясно, что $y=13$ – горизонтальная асимптота. Если кому-то не знаком график функции $y=-\dfrac{14}{x^2+1}$, то можно поступить следующим образом. Построим сначала параболу $y_1=x^2+1$. Теперь построим частное $y_2=-\dfrac{14}{y_1}=-\dfrac{14}{x^2+1}$. Построение начинаем с точки, в которой хорошо видно, какое значение имеет функция. В нашем случае очевидно, что функция $y_2=-\dfrac{14}{x^2+1}$ является чётной, а $y_2(0)=-14$. Затем при $x\neq 0$ функция $y_1=x^2+1$ монотонно и неограниченно возрастает от 1, тогда $y_3=\dfrac{14}{x^2+1}$ монотонно убывает от значения, равного 14, приближаясь к 0 при $x\to+\infty$. Тогда график функции $y_2=-\dfrac{14}{x^2+1}$ получается из y_3 отражением симметрично относительно оси Ox, а затем, «подняв» его на 13, получаем график заданной функции – рис. 16.

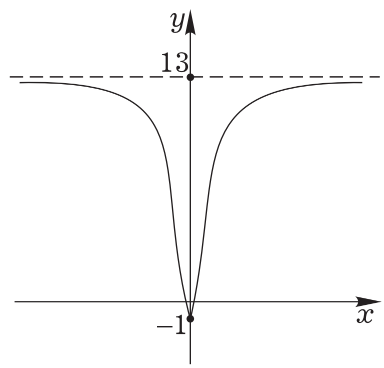

Рис. 16

Пример 9. Построить эскиз графика функции $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

Решение. Для построения такого графика удобно сначала построить график функции

$$y_1=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=$$

$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4},\ x\in R.$$

Заметим, что график дважды пересекает ось Ox, т.е. знаменатель заданной функции обращается в 0. Теперь произведём «деление». Начнём с «хорошей» точки – вершины параболы $y_1\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, тогда

$$y\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{y_1\left(\frac{5}{2}\right)}=-4\,.$$

При изменении x от 5/2 до 3 функция $y_1(x)$ монотонно возрастает от $-\frac{1}{4}$ до 0, значит, заданная функция $y(x)$ монотонно убывает от -4 до $-\infty$. При переходе через точку $x=3$ функция меняет знак, и при изменении x от 3 до $+\infty$ функция $y_1(x)$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, значит, заданная функция $y(x)$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0. Так как парабола симметрична относительно вертикали, проходящей через вершину, то график заданной функции получаем, отразив построенную часть симметрично относительно прямой $y=\frac{5}{2}$ – рис. 17.

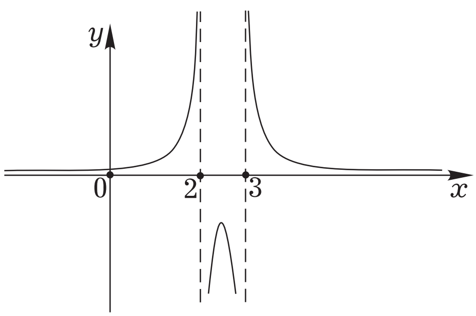

Рис. 17

Пример 10. Построить эскиз графика функции $y=x\sin x$.

Решение. При построении графика таких функций (произведение известной функции на синус или косинус – например, многочлена на синус или косинус) обратим внимание на следующие особенности заданной функции и её графика:

а) $y(x)=y(-x)$ – функция чётная,

б) там, где $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, точки нашего графика принадлежат графику функции $y=x$;

в) там, где $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+$ $+2\pi n$, точки нашего графика принадлежат графику функции $y=-x$,

г) в остальных точках $-x<x\sin x<$ $<x$, $x\in R$, т.е. точки графика расположены между точками графиков функций $y=x$ и $y=-x$;

д) функция обращается в 0 там, где $\sin x=0 \Leftrightarrow x=\pi n$.

Поэтому строим сначала графики функций $y=x$ и $y=-x$, затем расставляем характерные точки $(\pi n;0)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;1\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-1\right)$ и проводим через них непрерывную гладкую кривую – рис. 18.

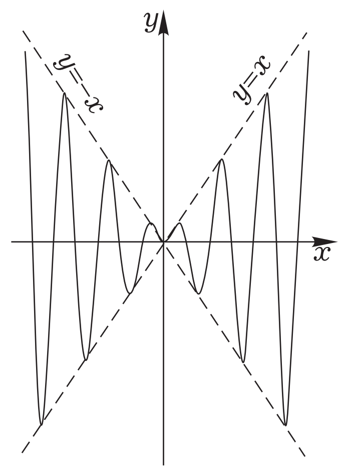

Рис. 18

Пример 11. Постройте эскиз графика функции $y=\sqrt{3x-x^2}$.

Решение. *Первый способ.* Можно сначала построить эскиз части параболы $y=3x-x^2=x(3-x)$ на отрезке, где значения неотрицательны, а затем эскиз заданной функции, «извлекая» квадратный корень из значений на параболе – рис. 19.

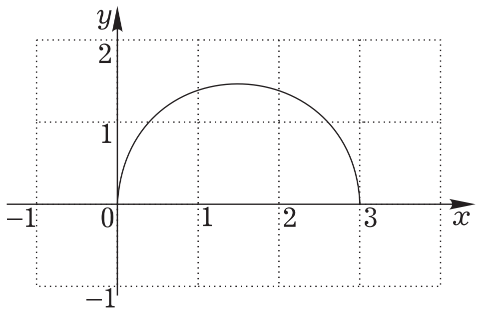

Рис. 19

Второй способ. Можно поступить по-другому. Заметим, что

$$y^2=3x-x^2 \Leftrightarrow x^2-3x+y^2=$$
$$=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2 -$$

окружность с центром в точке $\left(\frac{3}{2};0\right)$ и радиусом, равным $\frac{3}{2}$, а тогда $y=\sqrt{3x-x^2}$ – полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости.

Домашнее задание

1. Постройте эскиз графика функции $y=\frac{3x-1}{4x+1}$.

2. Постройте эскиз графика функции $y=\frac{x^3}{\pi^3}\cos x$.

Новости Новости Новости Новости Новости

Юбилейные часы

Швейцарские часовщики отмечают в этом году 40-летие первой в истории человечества (она произошла в 1969 г.) высадки человека на Луне выпуском 1969 штук особых часов, при изготовлении которых они максимально используют «космические» материалы. Корпус часов делают из фраг-ментов американского космического корабля «Аполлон-11», осуществившего эту высадку, циферблат выполняют в форме лунной поверхности с кратерами, из вещества с лунной пылью, в ремешки добавляют волокна из тканей, из которых состоят скафандры американских