Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ. Окончила МГУ, имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».

Эффективные методы решений некоторых показательных и логарифмических неравенств

Часть 2.

§3. Сложная экспонента $y(x)=a(x)^{f(x)}$

Прежде чем рассматривать неравенства, содержащие сложную экспоненту, выясним, что такое сложная экспонента.

Рассмотрим выражение $y(x)=a(x)^{f(x)}$.

В школе встречаются уравнения и неравенства, содержащее это выражение. Способы их решения декларируются, но ничего не сказано, почему они именно таковы. Это не очень вписывается в школьный курс математики – ведь способы решения всех других классических уравнений и неравенств обосновываются ссылками на те или другие свойства функций, в них входящих.

Сейчас многие школьники сдают ЕГЭ. Решения задания серии С надо оформить примерно так, как оформляются медальные работы: необходимо обосновать решение, причём оценка существенно зависит от правильности и полноты обоснования. Но что напишет школьник, решая, например, уравнение $x^{x^2}=x^{x+2}$ или неравенство $x^{x^2}\geq x^{x+2}$?

Часто школьники (и учителя) объясняют своё решение, ссылаясь на монотонность показательной функции. Но это не показательная функция, т. к. основание переменно! А можно ли продифференцировать, например, x^x?

А можно ли построить график функции $y=x^{x^2}$? Если да, то как? Про свойства функции $y(x)=a(x)^{f(x)}$ ничего не известно. Поэтому начнём с определения.

По определению, полагают, что для любого $c>0, c\neq 1$

$$\boxed{a(x)^{f(x)}=c^{f(x)\log_c a(x)}}$$

Областью определения сложной экспоненты является множество X, на котором $a(x)>0$. Эта функция уже не является просто показательной или степенной, её свойства зависят от свойств $a(x)$, $f(x)$. Из определения теперь чётко следует, что это всё-таки показательная функция. Но это сложная показательная функция, потому что в показатель входит не только показатель заданного выражения, но и его основание.

Функцию $y(x)=a(x)^{f(x)}$ называют *сложной экспонентой*. Сложная экспонента классическими свойствами показательной функции уже не обладает (например, не является монотонной функцией в области определения), но, как всякая показательная функция, принимает только *положительные* значения.

Сложная экспонента является непрерывной функцией там, где непрерывны $a(x)$ и $f(x)$, и дифференцируемой там, где дифференцируемы $a(x)$ и $f(x)$. Ясно также, по каким правилам дифференцируется сложная экспонента. Можно строить график, если это необходимо.

Построим, например, график функции $y=x^{x^2}$. Так как $D(y)=(0;+\infty)$, то прежде всего необходимо найти два предела:

$\lim\limits_{x\to+0} x^{x^2} = \lim\limits_{x\to+0} e^{x^2\ln x} = 1$, т.к. $\lim\limits_{x\to+0} x^2\ln x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\ln x} = +\infty.$$

Теперь найдём производную:

$$y' = \left(x^{x^2}\right)' = \left(e^{x^2\ln x}\right)' =$$

$$= e^{x^2\ln x}\left(2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x}\right) = xe^{x^2\ln x}(2\ln x+1).$$

Найдём критические точки в области определения:

$$y'=0 \Leftrightarrow xe^{x^2\ln x}(2\ln x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Расставим знаки производной (рис. 1)

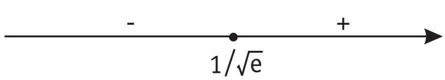

Рис. 1

Ясно, что точка $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ – точка минимума,

$$y_{\min} = y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{2e}}.$$

Строим эскиз графика (рис.2)

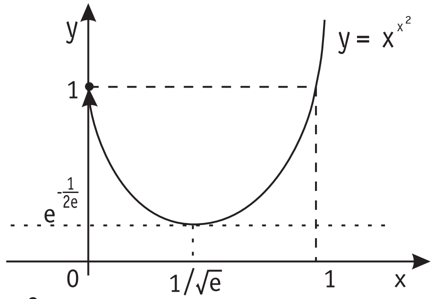

Рис. 2

Заметим, что при $x\in(0;1)$ функция не монотонна!

§4. Уравнения вида $a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)}$ и $a(x)^{f(x)}=g(x)$

Рассмотрим теперь уравнение

$a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)}$. ОДЗ: $a(x)>0$.

Воспользуемся определением сложной экспоненты:

$a(x)^{f(x)}=10^{f(x)\lg a(x)}$, $a(x)^{g(x)}=10^{g(x)\lg a(x)}$,

тогда $a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 10^{f(x)\lg a(x)}=10^{g(x)\lg a(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)\lg a(x)=g(x)\lg a(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg a(x)\big(f(x)-g(x)\big)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg a(x)=0,\\ f(x)=g(x)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a(x)=1,\\ f(x)=g(x).\end{array}\right.$$

Следовательно,

$$\boxed{a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a(x)=1,\\ f(x)=g(x).\end{array}\right. \text{ в ОДЗ}}$$

Соотношение $a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)\lg a(x)=g(x)\lg a(x)$ в ОДЗ (12)

показывает, что равносильное уравнение получается таким же, как если бы его *про-*

логарифмировали как «обычную» степень по допустимому основанию. Именно поэтому этот равносильный переход обычно называют *логарифмированием* уравнения $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$.

Запишем полное условие равносильности:

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(x)=1, \\ \begin{cases} a(x)>0, \\ f(x)=g(x). \end{cases} \end{array}\right. \quad (13)$$

Вот мы и получили те уравнения, которые фигурируют в литературе.

Пример 14. Решите уравнение $x^{4\lg(x-1)} \cdot (x-1)^{3\lg x} = x$.

♦Запишем ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x-1>0. \end{cases}$

Прологарифмируем в ОДЗ обе части уравнения по основанию 10:

$$x^{4\lg(x-1)} \cdot (x-1)^{3\lg x} = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lg(x-1)\lg x + 3\lg x \lg(x-1) = \lg x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x(7\lg(x-1)-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 0, \\ \lg(x-1)=\dfrac{1}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=1+\sqrt[7]{10}. \end{array}\right.$$

Учтём ОДЗ и получим, что $x = 1+\sqrt[7]{10}$.

Ответ: $1+\sqrt[7]{10}$.♦

Пример 15. Решите уравнение $x^{x^2+2} = x^{x+4}$.

♦Воспользуемся условием равносильности (13):

$$x^{x^2+2} = x^{x+4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ \begin{cases} x>0, \\ x^2+2=x+4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ \begin{cases} x>0, \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ \begin{cases} x>0, \\ x=\dfrac{1\pm 3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: 1; 2. ♦

Замечание 1.

Обратите внимание на то, что происходит после подстановки в уравнение отрицательного корня $x=-1$ или числа 0: $(-1)^3=(-1)^3$ и $(0)^2=(0)^4$ — получаем соотношения, которые мы считаем тождествами. Тогда числа –1 и 0 являются решениями заданного уравнения? Этот факт приводит в замешательство и учащихся, которые это заметили, и учителей. Но дело в том, что, если ничего не сказано о том, каким может быть x, а, значит, 3 может быть выражено рациональным числом $\frac{6}{2}$ или $\frac{9}{3}$, то должно быть: $\sqrt{(-1)^6} = \sqrt[3]{(-1)^9}$, т. е. 1 = -1! А это уже так называемый софизм. Именно поэтому рациональная степень не определена для отрицательных чисел. В школьной программе изучаются функции, определенные и непрерывные, как правило, на интервалах, а $x=-1$ является изолированной точкой, т. к. в любой «соседней» точке $y=x^{x^2+2}$ уже не существует. Что касается точки $x=0$, то в данном примере это граничная точка области определения, и оказалось, что

$$\lim_{x\to+0} x^{x^2+2} = \lim_{x\to+0} e^{(x^2+2)\ln x} = 0 = 0^2.$$

Однако в общем случае это не всегда так. Числа –1 и 0 не принято считать решениями данного уравнения.

Пример 16. Решите уравнение $x^{x^2+4x+5} = x^{3x^2-5x-40}$.

♦Воспользуемся условием равносильности (13):

$$x^{x^2+4x+5} = x^{3x^2-5x-40} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ \begin{cases} x>0, \\ x^2+4x+5=3x^2-5x-40 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ \begin{cases} x>0, \\ 2x^2-9x-45=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ \begin{cases} x>0, \\ x=\dfrac{9\pm 21}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{15}{2} \end{array}\right.$$ **Ответ:** 1; 7,5.♦

Замечание 2.

Для значений $x=-1$ и $x=-3$ получаем: $(-1)^2=(-1)^{-32}$, $(-3)^2=(-3)^2$. Эти значения не принадлежат области определения сложной экспоненты, поэтому они не являются решениями уравнения. Ведь мы не решаем уравнение $a^x=-8$, потому что показательная функция не определена при $a<0$. Однако мы решаем уравнение $a^n=-8$, где заранее известно, что n-число целое, т. к. операция возведения в целую степень отлична от операции возведения в рациональную степень! А этот факт связан с тем, что $a^3\neq a^{\frac{12}{4}}$: левая часть существует при любом a, а правая — при $a\geq 0$. Вспомним, что и $\sqrt[3]{-2}\neq(-2)^{\frac{1}{3}}$ потому, что, если определить $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ и для $a<0$, то окажется, что $(-2)^{\frac{1}{3}}=(-2)^{\frac{2}{6}}$.

Алгоритмам нахождения таких чисел в школе не обучают – поэтому их искать не надо. Если же школьник указал некоторые из них, то его нельзя «карать» за это, т. к. рассматриваемая тема находится за рамками школьного учебника.

§5. Неравенства, содержащие сложную экспоненту

Рассмотрим неравенство

$a(x)^{f(x)}>a(x)^{g(x)}$. ОДЗ: $a(x)>0$.

Воспользуемся определением сложной экспоненты, взяв в качестве c число e (можно взять любое другое допустимое число), а затем условием равносильности (1) и правилом 3:

$$a(x)^{f(x)}>a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow e^{f(x)\ln a(x)}>e^{g(x)\ln a(x)}$$
$$\Leftrightarrow (e-1)\big(f(x)\ln a(x)-g(x)\ln a(x)\big)>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(f(x)-g(x)\big)\ln a(x)>o \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)>o.$$

Итак, мы получили новое условие равносильности:

$$a(x)^{f(x)}>a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)>0 \text{ в ОДЗ} \qquad (14)$$

или полное условие равносильности для строгого неравенства:

$$a(x)^{f(x)}>a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(x)>0, \\ \big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)>0. \end{cases} \qquad (15)$$

Полученное попутно соотношение

$$a(x)^{f(x)}>a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)\ln a(x)-g(x)\ln a(x)>0 \qquad (16)$$

показывает, что равносильное неравенство получается при «логарифмировании» заданного неравенства так же, как будто показатель является числом. Этот равносильный переход называют логарифмированием.

Условие равносильности для нестрогого неравенства имеет вид:

$$a(x)^{f(x)}\geq a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(x)>o, \\ \big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)\geq o. \end{cases} \qquad (17)$$

Все условия равносильности верны для обоих знаков.

Заметим, что из выведенных условий равносильности следуют стандартные способы, рассматривающие отдельно случаи, когда основание больше или меньше единицы. При применении условий равносильности это не имеет значения. Кроме того, если $a(x), f(x), g(x)$ – рациональные функции, то за **ОДИН ШАГ** мы перешли к классическому варианту метода интервалов.

Отсюда ещё следует замечательное правило, которое уже намного упростит решение сложных неравенств, содержащих в качестве множителя разность

$$a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}.$$

Правило 4

> Знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения
> $$\big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big) \text{ в ОДЗ.}$$

Это правило даёт возможность просто решать, например, неравенство вида $h(x)\left(a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}\right) \ge 0 \ (\le 0)$.

Так как в силу правила 4 знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $\big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)$ в ОДЗ, то:

> $$h(x)\left(a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \qquad (18)$$
> $$\Leftrightarrow h(x)\big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big) \ge 0 \text{ в ОДЗ.}$$

Или полное условие равносильности:

> $$h(x)\left(a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$
> $$\Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ h(x)\big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big) \ge 0. \end{cases} \qquad (19)$$

В частности, если $a(x) \equiv 1$, то получаем

Правило 5

> Знак разности $a(x)^{f(x)} - 1$ совпадает со знаком произведения $\big(a(x)-1\big)f(x)$ в ОДЗ.

Пример 17. Решите неравенство

$$\left(4^{x^2-1} - 3\cdot 4^{-x^2}\right)^{x^2-3} \ge \left(4^{x^2-1} - 3\cdot 4^{-x^2}\right)^{3x+7}.$$

♦Найдём сначала ОДЗ:

$$4^{x^2-1} - 3\cdot 4^{-x^2} > 0 \Leftrightarrow 4^{2x^2} > 12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 > \log_4 12 \Leftrightarrow x^2 > \log_4\sqrt{12} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\sqrt{\log_4\sqrt{12}}\right) \cup \left(\sqrt{\log_4\sqrt{12}}; +\infty\right).$$

Теперь воспользуемся условием равносильности (14):

$$\left(4^{x^2-1} - 3\cdot 4^{-x^2}\right)^{x^2-3} \ge \left(4^{x^2-1} - 3\cdot 4^{-x^2}\right)^{3x+7} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{4^{x^2}}{4} - \frac{3}{4^{x^2}} - 1\right)\left(x^2 - 3 - 3x - 7\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{4^{2x^2} - 4\cdot 4^{x^2} - 12}{4}\right)\left(x^2 - 3x - 10\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(4^{x^2} - 6\right)\left(4^{x^2} + 2\right)(x+2)(x-5) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \log_4 6\right)(x+2)(x-5) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{\log_4 6}\right)\left(x + \sqrt{\log_4 6}\right)(x+2)(x-5) \ge 0 \Leftrightarrow$$

(с учётом ОДЗ, рис.3)

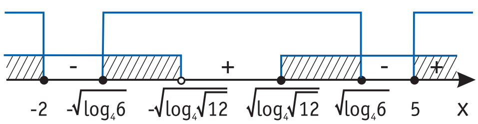

Рис. 3

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\sqrt{\log_4 6}; -\sqrt{\log_4\sqrt{12}}\right) \cup$$
$$\cup \left(\sqrt{\log_4\sqrt{12}}; \sqrt{\log_4 6}\right] \cup [5; +\infty).$$

Ответ:

$$(-\infty; -2] \cup \left[-\sqrt{\log_4 6}; -\sqrt{\log_4\sqrt{12}}\right) \cup$$
$$\cup \left(\sqrt{\log_4\sqrt{12}}; \sqrt{\log_4 6}\right] \cup [5; +\infty). ♦$$

§6. Неравенства, содержащие логарифм с переменным основанием

Рассмотрим выражение $y(x)=\log_{a(x)} f(x)$. По определению для любого $c>0$, $c\neq 1$

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x)=\frac{\log_c f(x)}{\log_c a(x)}}$$

т. е. $\log_{a(x)} f(x)$ – это частное двух логарифмов, и областью определения является множество X, на котором $f(x)>0$, $a(x)>0, a(x)\neq 1$.

Из определения следует, что логарифм с переменным основанием

$$y(x)=\log_{a(x)} f(x)$$

является непрерывной функцией там, где непрерывны $a(x)$ и $f(x)$, и дифференцируемой там, где дифференцируемы $a(x)$ и $f(x)$. Ясно также, по каким правилам она дифференцируется. Можно, если возникнет необходимость, строить график.

Рассмотрим неравенство

$$\log_{a(x)} f(x)>\log_{a(x)} g(x),$$

где $f(x)>0, g(x)>0,\ a(x)>0, a(x)\neq 1$.

По определению

$$\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)=\frac{\lg f(x)-\lg g(x)}{\lg a(x)},$$

и так как в силу правил 2 и 3, знак разности $\lg f(x)-\lg g(x)$ совпадает со знаком разности $f(x)-g(x)$, а знак $\lg a(x)$ совпадает со знаком разности $a(x)-1$, то получаем новое правило.

Правило 6

Знак разности $\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения $\big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)$ в ОДЗ.

Отсюда следует еще одно условие равносильности:

$$\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)>0 \text{ в ОДЗ.} \quad (20)$$

Заметим, что из (20) автоматически следует, что $a(x)\neq 1$, поэтому при решении *строгих* неравенств условие $a(x)\neq 1$ в ОДЗ можно опустить и так записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ:

$$\log_{a(x)} f(x)<\log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(x)>0, \\ f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ \big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)<0. \end{cases} \quad (21)$$

Для нестрогого неравенства условие равносильности, включающее ОДЗ, выглядит иначе:

$$\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(x)>o, \\ a(x)\neq 1, \\ f(x)>o, \\ g(x)>0, \\ \big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)\geq o. \end{cases} \quad (22)$$

Если $g(x)\equiv 1$, то получим неравенство вида $\log_{a(x)} f(x)>0$, для которого предыдущие условия принимают частный вид.

Правило 7

Знак $\log_{a(x)} f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-1)$ в ОДЗ.

Условия равносильности имеют вид:

$$\begin{aligned}&\log_{a(x)} f(x)>o\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow(a(x)-1)(f(x)-1)>0\end{aligned}\quad \text{в ОДЗ.}\qquad (23)$$

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ:

$$\log_{a(x)} f(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}a(x)>0,\\f(x)>0,\\(a(x)-1)(f(x)-1)>0.\end{cases}$$

Для нестрогого неравенства это условие выглядит по-другому:

$$\log_{a(x)} f(x)\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}a(x)>0,\\a(x)\ne 1,\\f(x)>0,\\(a(x)-1)(f(x)-1)\ge 0.\end{cases}$$

Преимущество и красота приведённых условий равносильности состоит в том, что мы за один шаг освободились от логарифмов и переменных оснований, и теперь, если основание логарифма и подлогарифмическое выражение являются рациональными функциями, можно воспользоваться классическим методом интервалов.

Заметим, что все условия равносильности формально точно такие же, как и для логарифмов с постоянным основанием, а потому легко запоминаются.

Как показывает практика, не всегда удобно пользоваться полными условиями равносильности. Это происходит, если входящие в условия равносильности неравенства громоздки. Тогда удобно отделить нахождение ОДЗ от решения основного неравенства, как мы иногда и будем делать.

Правила 6 и 7 дают возможность намного проще и красивее решать неравенства, содержащие разность

$\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)$ или $\log_{a(x)} f(x)$

или их произведение в виде множителей, например,

$h(x)\left(\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\right)>0$.

Так как, в силу правила 6, знак разности $\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ, то

$$\begin{aligned}&h(x)\left(\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\right)>0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow h(x)(a(x)-1)(f(x)-g(x))>0.\end{aligned}\qquad (26)$$

Запишем полное условие равносильности:

$$\begin{aligned}&h(x)\left(\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\right)>0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow\begin{cases}a(x)>0,\\f(x)>0,\\g(x)>0,\\h(x)(a(x)-1)(f(x)-g(x))>0.\end{cases}\end{aligned}\qquad (27)$$

Для нестрогого неравенства условие другое:

$$\begin{aligned}&h(x)\left(\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\right)\ge 0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow\begin{cases}a(x)>0,\\a(x)\ne 1,\\f(x)>0,\\g(x)>0,\\h(x)(a(x)-1)(f(x)-g(x))\ge 0.\end{cases}\end{aligned}\qquad (28)$$

Пример 18. (МГУ, 1998, мехмат) Решите неравенство $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2+x-2\right)\le 0$.

♦ Воспользуемся полным условием равносильности (25): $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2+x-2\right)\le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+2}{5x-1}>0, \\ \dfrac{2x+2}{5x-1}\ne 1, \\ 10x^2+x-2>0, \\ \left(\dfrac{2x+2}{5x-1}-1\right)\left(10x^2+x-2-1\right)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{1}{5};+\infty\right), \\ x\ne 1, \\ x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{2}{5};+\infty\right), \\ \dfrac{(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{5}\right)}{x-\frac{1}{5}}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty).$$ (рис.4)

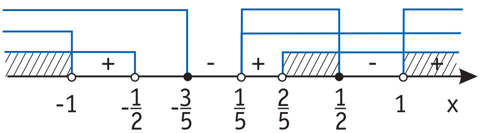

Рис. 4

Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty)$. ♦

Пример 19. (МГУ,1979, биофак) Решите неравенство $\log_{(x+1)}\left(x^2+x-6\right)^2\ge 4$.

♦ Приведём неравенство к стандартному виду и воспользуемся полным условием равносильности (22):

$$\log_{(x+1)}\left(x^2+x-6\right)^2\ge 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{(x+1)}\left(x^2+x-6\right)^2\ge \log_{(x+1)}(x+1)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0, \\ x+1\ne 1, \\ x^2+x-6\ne 0, \\ (x+1-1)\left(\left(x^2+x-6\right)^2-(x+1)^4\right)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\ne 0, x\ne 2, \\ x(-6-x-1)\left(2x^2-5+3x\right)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\ne 0,\ x\ne 2, \\ x(x+7)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)(x-1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\ne 0,\ x\ne 2, \\ x\in[0;1] \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(0;1].$$

Ответ: $(0;1]$. ♦

Вот, например, как изящно решается не самое простое неравенство.

Пример 20. Решите неравенство

$$\left(2^{3x^2-14x-1}-2^{-x^2-2x-6}\right)\log_{\left(\frac{1}{4}-3x\right)}\left(1-x^2\right)\le 0.$$

♦ Найдём сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}-3x>0, \\ \dfrac{1}{4}-3x\ne 1, \\ 1-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{1}{12}, \\ x\ne -\dfrac{1}{4}, \\ -1<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-1; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{12}\right)$$

Воспользуемся правилами 1 и 7:

$$\left(2^{3x^2-14x-1} - 2^{-x^2-2x-6}\right)\log_{\left(\frac{1}{4}-3x\right)}\left(1-x^2\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2 - 14x - 1 + x^2 + 2x + 6\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{4} - 3x - 1\right)\left(1 - x^2 - 1\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2 - 12x + 5\right)x^2\left(\frac{1}{4} + x\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{4} + x\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

(с учётом ОДЗ, рис. 5) $x \in \left(-1; -\frac{1}{4}\right) \cup \{0\}$.

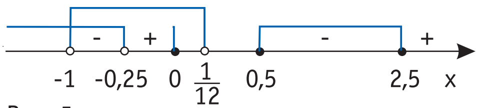

Рис. 5

Ответ: $x \in \left(-1; -\frac{1}{4}\right) \cup \{0\}$. ♦

Пример 21. Решите неравенство

$$\frac{(x+1)\log_{x^2-3}(4x+7)}{\sqrt{x^2+x+1} - x - 2} < 0.$$

♦Воспользуемся полным условием равносильности (27):

$$\frac{(x+1)\log_{x^2-3}(4x+7)}{\sqrt{x^2+x+1} - x - 2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+7>0, \\ x^2-3>0, \\ \dfrac{(x+1)\left(x^2-3-1\right)(4x+7-1)}{x^2+x+1-x^2-4x-4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{7}{4}; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right), \\ \dfrac{(x+1)(x-2)(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(с учётом ОДЗ, рис.6)

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{7}{4}; -\sqrt{3}\right) \cup (2; +\infty).$$

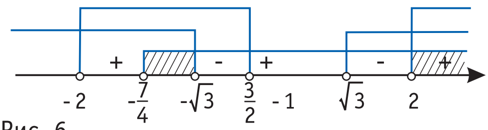

Рис. 6

Ответ:

$$\left(-\frac{7}{4}; -\sqrt{3}\right) \cup (2; +\infty)\ . ♦$$

Пример 22. (МФТИ, 1994) Решите неравенство

$$\log_8\left(\frac{1}{3} - x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3} - x\right) > \log_2 \frac{\left(\frac{1}{3} - x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x + \frac{1}{3}\right)^2}}$$

♦Неравенство громоздко, поэтому ОДЗ найдём отдельно. Найдём сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - x > 0, \\ 2x + \frac{1}{3} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right), \\ x \ne -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right).$$

Преобразуем неравенство к стандартному виду:

$$\log_8\left(\frac{1}{3} - x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3} - x\right) > \log_2 \frac{\left(\frac{1}{3} - x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x + \frac{1}{3}\right)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3} - x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3} - x\right) > \log_2\left(\frac{1}{3} - x\right) -$$

$$-\frac{2}{3}\log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right| \Leftrightarrow \quad \log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right| \times$$

$$\times\left(\log^2_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)-3\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)+2\right)>0$$

$$\Leftrightarrow\ (\text{т. к. } t^2-3t+2=(t-1)(t-2))\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)-1\right)\times$$

$$\times\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)-2\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)-\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\times$$

$$\times\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)-\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2\right)>0\Leftrightarrow$$

(В ОДЗ, в силу правил 6 и 7)

$$\Leftrightarrow\left(\left|2x+\frac{1}{3}\right|-1\right)^3\left(\left(\frac{1}{3}-x\right)-\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{3}-x-4x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}\right)>0\Leftrightarrow$$

(т. к. $\left(\frac{1}{3}-x\right)>0$ в ОДЗ)

$$\Leftrightarrow\left(\left|2x+\frac{1}{3}\right|-1\right)\left(\left|\frac{1}{3}-x\right|-\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\times$$

$$\times\left(36x^2+21x-2\right)<0\Leftrightarrow$$

$$\left(2x+\frac{1}{3}-1\right)\left(2x+\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}-x-2x-\frac{1}{3}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{3}-x+2x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{12}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)^3\left(x-\frac{1}{12}\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(0;\frac{1}{12}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right).$$

Учтём ОДЗ (рис. 7)

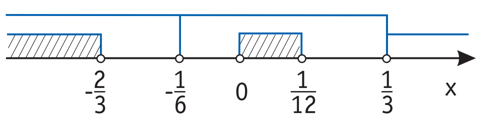

Рис. 7

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(0;\frac{1}{12}\right)$. ♦

Пример 23. (МФТИ, 2004) Решите неравенство

$$\frac{\log_{x^2}4}{\sqrt{\frac{1}{6}+\log_{x^6}(1-x)}-\sqrt{\frac{1}{2}}}\geq\frac{\sqrt{6}}{\log_2(1-x)-\log_4 x^4}.$$

♦ Найдём сначала ОДЗ:

$$\begin{cases}1-x>0,\\ x\neq 0,\\ x\neq\pm1,\\ 1+6\log_{x^6}(1-x)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1),\\ 1+2\log_{x^2}(1-x)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1),\\ \log_{x^2}x^2(1-x)^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1),\\ \left(x^2-1\right)\left(x^2(1-x)^2-1\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1),\\ (x-1)(x+1)\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-x+1\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1),\\ (x+1)\left(x^2-x-1\right)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1),\\ (x+1)\left(x^2-x-1\right)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)\cup(0;1).$$

Теперь все логарифмы приведём к одному основанию, затем воспользуемся правилами 6 и 7:

$$\frac{\log_{x^2}4}{\sqrt{\frac{1}{6}+\log_{x^6}(1-x)}-\sqrt{\frac{1}{2}}}\geq\frac{\sqrt{6}}{\log_2(1-x)-\log_4 x^4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{6}\log_{x^2}2}{\sqrt{1+2\log_{x^2}(1-x)}-\sqrt{3}}\geq\frac{\sqrt{6}\log_{x^2}2}{\log_{x^2}(1-x)-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_{x^2}2\left(\frac{\sqrt{1+2\log_{x^2}(1-x)}+\sqrt{3}-1}{\log_{x^2}(1-x)-1}\right)\geq 0\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \log_{x^2} 2\left(\frac{1}{\log_{x^2}(1-x)-\log_{x^2} x^2}\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2-1\right)(2-1)}{\left(x^2-1\right)\left(1-x-x^2\right)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-1<0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Учтём ОДЗ и получим:

$$x\in\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-1\right)\cup\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Ответ:

$$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-1\right)\cup\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right). \blacklozenge$$

Пример 24. (Воронежский государственный технический университет) Решите неравенство $\log_{(x+1)}\sqrt{x^2-5x+4}\leq\log_{(x+1)}|1-x|$.

♦Воспользуемся полным условием равносильности (23):

$$\log_{(x+1)}\sqrt{x^2-5x+4}\leq\log_{(x+1)}|1-x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+1>0,\\ x+1\neq 1,\\ x^2-5x+4>0,\\ |1-x|\neq 0,\\ (x+1-1)\left(\sqrt{x^2-5x+4}-|1-x|\right)\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x>-1,\\ x\neq 0,\\ x\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty),\\ x\left(\left(\sqrt{x^2-5x+4}\right)^2-|1-x|^2\right)\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(4;+\infty),\\ x\left(x^2-5x+4-x^2+2x-1\right)\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(4;+\infty),\\ x(x-1)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(4;+\infty),\\ x\in(-\infty;0]\cup[1;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(4;+\infty).$$

Ответ: $(-1;0)\cup(4;+\infty)$. ♦

Пример 25 . (МИРЭА) Решите неравенство $\log_{\frac{13x+1}{15x-1}}|x|\geq\log_{\frac{14x+1}{16x-1}}|x|$.

♦ Приведём всё к общему знаменателю и воспользуемся несколько раз правилами 6 и 7:

$$\log_{\frac{13x+1}{15x-1}}|x|\geq\log_{\frac{14x+1}{16x-1}}|x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg|x|}{\lg\frac{13x+1}{15x-1}}\geq\frac{\lg|x|}{\lg\frac{14x+1}{16x-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg|x|\left(\lg\frac{14x+1}{16x-1}-\lg\frac{13x+1}{15x-1}\right)}{\lg\frac{13x+1}{15x-1}\lg\frac{14x+1}{16x-1}}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq 0,\\ \dfrac{(|x|-1)\left(\dfrac{14x+1}{16x-1}-\dfrac{13x+1}{15x-1}\right)}{\left(\dfrac{13x+1}{15x-1}-1\right)\left(\dfrac{14x+1}{16x-1}-1\right)}\geq 0,\\ \dfrac{14x+1}{16x-1}>0,\\ \dfrac{13x+1}{15x-1}>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq 0,\\ x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{14}\right)\cup\left(\dfrac{1}{16};+\infty\right),\\ x\in\left(-\infty;\dfrac{-1}{13}\right)\cup\left(\dfrac{1}{15};+\infty\right),\\ \dfrac{(x-1)(x+1)\left(2x^2-2x\right)}{(-2x+2)^2}\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{15};1\right) \cup (1;+\infty), \\ x(x+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty;-1) \cup \left(\frac{1}{15};1\right) \cup (1;+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;-1) \cup \left(\frac{1}{15};1\right) \cup (1;+\infty)$. ♦

Литература

Колесникова С. И. Математика. Интенсивный курс подготовки к Единому государственному экзамену. М.: Айрис – пресс, 2004.

Колесникова С. И. Математика. Решение сложных задач Единого государственного экзамена. М.: Айрис – пресс, 2005.

ОДНАЖДЫ НА ЛЕКЦИИ

Это множество не из области определения, а из области фантастики.

А сейчас я сделаю аморальнейшую вещь – отождествлю отрезок с его длиной.

Это не интеграл, а иероглиф.

А теперь обведём это в красивую траурную рамочку.

А это – так называемая бухая переменная.

Это общеизвестно мне.

Смысл теоремы в общих словах звучит так: если я Таню назову Ваней, то от этого она вряд ли станет мальчиком.

А теперь буду говорить словами.

Зная фамилию, имя, отчество этой оси...

Логарифмирование – это оскорбление действием.

Вы должны знать это настолько хорошо, чтобы даже в гробу шептать на ухо любимой девушке: «Модуль суммы меньше либо равен сумме модулей...»

Душевно-открытое множество.

Этот незатейливый интеграл Фурье.

Единственное полезное, что можно извлечь из этой формулы – это знак равенства.

Я люблю студентов, как некоторые любят кошек и собак.

Вы думаете, я занудствую? Да, я занудствую! И дальше буду занудствовать!

Мир так устроен по определению.