



Дворянинов Сергей Владимирович

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики и
информатики Самарского государственного
университета и кафедры
естественно-математического
образования
Самарского института повышения

Анализ функций и алгебраические задачи

В статье рассматриваются задачи, решение которых основано на изучении свойств функций, в них входящих. Подобные задачи часто встречаются на различного рода экзаменах и олимпиадах.

1. Найдите наименьшее целое значение функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 5 - \frac{4 + x^2 - 4x}{x - 2}.$$

Решение. После сокращения дроби получается более простая формула для функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 5 - (x - 2).$$

Выделяя точный квадрат, получим

$$f(x) = (x - 2)^2 + 3. \quad (1)$$

И здесь тех, кто решал подобные задачи на экзамене, подстерегала опасность: надо было ни в коем случае не забыть, что $x = 2$ не входит в область определения данной функции. Поэтому наименьшее целое значение функции не 3, как это следует из формулы (1), а 4. Вывод ясен: целесообразно с самого начала указывать область определения функции!

2. Сколько целых значений принимает функция $f(x) = x - 3 + \frac{2x - 2}{x - 1}$ на промежутке $-2 < x \leq 3$?

Ответ. 4. И здесь после сокращения дроби следует помнить, что для функции $f(x) = x - 1$ аргумент $x \neq 1$.

3. Найдите нули функции

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5 - \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

Ответ. 4. Здесь после сокращения дроби и приведения подобных приходим к уравнению $x^2 - 5x + 4 = 0$, у которого следует найти корни, не равные 1.

4. Решите уравнение

$$3x^2 + \left(\sqrt{6 - 2x^2}\right)^2 = \\ = \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{3}x - 6}\right)^2 - \sqrt{3}x + 12.$$

Решение. Если дважды применить тождество $(\sqrt{a})^2 = a$, которое справедливо при неотрицательных a , то уравнение примет вид $x^2 + 6 = x^2 + 6$. И здесь есть опасность ошибочного вывода о том, что решением уравнения является любое число. Это неверно! Следует помнить, что каждое подкоренное выражение должно быть неотрицательным. В результате приходим к системе двух условий:

$$\begin{cases} |x| \leq \sqrt{3}, \\ x \leq -2\sqrt{3} \text{ или } x \geq \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Отсюда следует, что единственным корнем уравнения может быть только число $\sqrt{3}$. Проверка показывает, что это действительно корень.

Задачи 5–6 решаются с использованием множества значений некоторых функций.

5. Решите уравнение

$$(\sqrt{x+7}+1)^2 = 4 - \sqrt{6-5x-x^2}.$$

Здесь с самого начала найдём область допустимых значений и получим отрезок $-6 \leq x \leq 1$. А дальше следует сравнить множество значений обеих частей уравнения. Правая часть не превосходит 4. Левая часть уравнения определяет функцию, которая возрастает, следовательно, при $x = -6$ получается её наименьшее значение, равное 4. Отсюда следует, что единственным корнем уравнения может быть только число -6 . Проверка показывает, что это действительно так.

6. Решите уравнение

$$2(x-7)^2 = 2 - \sqrt{6+5x-x^2}.$$

Ответ. 6.

Укажем основные этапы решения этого уравнения. Область допустимых значений – отрезок $[-1; 6]$. На этом отрезке квадратичная функция $y = 2(x-7)^2$ убывает, поэтому её наименьшее значение получается при $x = 6$, и оно равно 2. Совершенно очевидно, что любое значение правой части уравнения не превосходит двух. Отсюда следует, что единственным корнем уравнения может быть только число 6.

Следующая задача решена двумя способами.

7. Найдите все значения x , которые удовлетворяют неравенству

$$x^2 + 2a < (2a+1)x$$

при любом значении параметра a , принадлежащем промежутку $(3; 5)$.

Решение. Сначала найдём корни вспомогательного квадратного уравнения

$$x^2 - (2a+1)x + 2a = 0.$$

Имеем $x_1 = 1$, $x_2 = 2a$. Из условия следует, что $2a > 1$, поэтому решением неравенства является интервал $1 < x < 2a$. Теперь следует найти пересечение всех таких интервалов, получаемых при данных значениях параметра. Для этого рассмотрим множество всех правых границ этих интервалов – это множество точек составляет интервал $(6; 10)$. Искомое пересечение интервалов состоит из точек, лежащих правее общей левой границы всех интервалов и лежащих левее любой правой границы. Ясно, что это пересечение есть промежуток $(1; 6]$, который и является решением задачи.

Эта задача имеет ещё одно интересное решение. Перепишем данное неравенство $x^2 - (2a+1)x + 2a < 0$ и рассмотрим его левую часть как *линейную функцию, зависящую от аргумента a* . Необходимым и достаточным условием отрицательности этой функции, т.е. функции

$$f(a) = (2-2x)a + x^2 - x$$

на интервале $3 < a < 5$ является одновременное выполнение условий $f(3) \leq 0$ и $f(5) \leq 0$, причём одновременно равенства выполняться не должны (в последнем случае функция тождественно равна нулю). Имеем:

$$\begin{cases} x^2 - 11x + 10 \leq 0, \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 10, \\ 1 \leq x \leq 6, \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 6.$$

Отсюда получаем **ответ:** $x \in (1; 6]$. Обратите внимание: при $x = 1$ оба неравенства этой системы обращаются

ся в равенства, поэтому это значение в ответ не входит.

Итак, умение увидеть линейную функцию $f(a)$ позволяет решить предыдущую задачу нетрадиционным образом. В следующем задании из практики вступительных экзаменов это обстоятельство является самым главным.

8. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$3x + |2x - |2x - a|| = 8|x + 3|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = 8|x + 3| - 3x - |2x - |2x - a||.$$

Любое освобождение от знаков абсолютной величины приводит к линейной функции, т. е. при любом a графиком этой функции является ломаная линия.

Если $x \leq -3$, то угловой коэффициент соответствующего звена ломаной $-8 - 3 \pm 2 \pm 2$ отрицателен и функция убывает.

Если $x \geq -3$, то угловой коэффициент $8 - 3 \pm 2 \pm 2$ положителен и функция возрастает.

Следовательно, наличие корней уравнения равносильно неравенству $f(-3) \leq 0$. Последнее неравенство означает, что

$$9 - |-6 - |-6 - a|| \leq 0, \quad 3 - |6 + a| \leq 0, \\ |6 + a| \geq 3.$$

Отсюда $6 + a \geq 3$ или $6 + a \leq -3$.

Ответ. $(-\infty; -9] \cup [-3; +\infty)$.

Рассмотрим ещё две задачи 9–10, сводящиеся к линейным уравнениям.

9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|(a^2 - 9)x - 1| + |3x - 1| = 2x - a$ имеет бесконечно много корней.

Решение. При освобождении от знака модуля получается линейное уравнение вида

$$(\pm(a^2 - 9) \pm 3 - 2)x = -a \pm 1 \pm 1.$$

Обратите внимание: выбор знаков в левой части уравнения согласован с выбором знаков в правой части. Всего имеется четыре варианта. В каждом из них получается линейное уравнение вида $Ax = B$, которое имеет бесконечно много решений лишь тогда, когда $A = 0$ и $B = 0$. Таким образом, искомыми значениями a являются лишь те, для которых по крайней мере одно из четырёх уравнений имеет бесконечно много решений, т. е. те значения параметра, при которых в уравнении коэффициент при неизвестном и правая часть уравнения равны нулю. Отсюда получаем четыре системы

1. $(a^2 - 9) + 3 - 2 = 0, \quad -a + 1 + 1 = 0;$
2. $(a^2 - 9) - 3 - 2 = 0, \quad -a + 1 - 1 = 0;$
3. $-(a^2 - 9) + 3 - 2 = 0, \quad -a - 1 + 1 = 0;$
4. $-(a^2 - 9) - 3 - 2 = 0, \quad -a - 1 - 1 = 0.$

Первые три системы решений не имеют, четвёртая система имеет единственное решение $a = -2$. Это значение параметра – единственный кандидат на решение задачи. При этом значении параметра имеем уравнение

$$|5x + 1| + |3x - 1| = 2x + 2,$$

которому удовлетворяет любое число из отрезка $\left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]$.

Ответ. -2 .

Аналогичным способом решается и следующая задача.

10. Найдите все значения параметра p , при каждом из которых уравнение

$$|p(2 - x) - x + 3| + |5 - 3x| = 4 + \sqrt{8 - p} - 2x$$

имеет бесконечно много корней.

Ответ. 4.