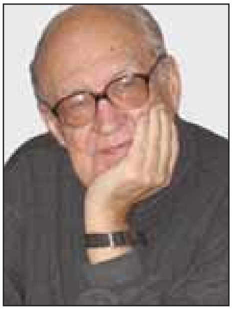


Тарасов Лев Васильевич
Кандидат физико-математических наук, профессор, автор ряда монографий и многих учебных пособий для студентов и школьников, автор инновационной образовательной технологии «Экология и диалектика».

Звездочёт, Падишах и... вероятность

В теории вероятностей есть, в частности, два фундаментальных правила – правило сложения вероятностей и правило умножения вероятностей. В данной статье эти правила не только объясняются, но и применяются в весьма непростых отношениях между Звездочётом и Падишахом – персонажами, придуманными автором.

На случай надейся, но сам не плошай –
вероятность исхода ты подсчитай.

*Современный математический вариант
старинной поговорки*

1. Звездочёт учит Падишаха складывать и умножать вероятности

Однажды Падишах сказал Звездочёту: «Я знаю, что такое вероятность. Например, при бросании игральной кости один шанс из шести, что выпадут три очка. Значит, вероятность выпадения трёх очков равна 1/6». «О Владыка, – заметил Звездочёт, – такова же вероятность того, что выпадет одно очко или любое другое число очков от одного до шести». «Это ясно, – сказал Падишах. – Но я слыхал, что вероятности иногда складывают, а иногда умножают. Как это понимать?».

И тогда Звездочёт взял в руку две игральных кости и задал вопрос: «Какова вероятность того, что при подбрасывании этих двух костей выпадут *одинаковые* очки?». «А какие одинаковые?» – спросил Падишах. «Всё равно какие, – сказал Звездочёт. – Это могут быть две единицы или две двойки, две тройки или две четвёрки, две пятёрки или две шестёрки. Впрочем, будем рассуждать не торопясь. Обозначим через P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 вероятности того, что при бросании каждой кости выпадет соответственно единица, двойка, тройка, четвёрка, пятёрка, шестёрка. Мы уже выяснили, что

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 1/6.$$

А теперь будем бросать две кости. Пусть исход A – выпали две единицы (вероятность наступления исхода $P(A)$), исход B – выпали две двойки (вероятность исхода $P(B)$), исход C – выпали две тройки (вероятность исхода $P(C)$), исход D – выпали две четверки (вероятность исхода $P(D)$), исход E – выпали две пятёрки (вероятность исхода $P(E)$), исход F – выпали две шестёрки (вероятность исхода $P(F)$). Нам безразлично, какой из этих шести исходов наступит. Поэтому можно воспольсзоваться **правилом сложения вероятностей**. Оно гласит: *вероятность того, что наступит какой-либо из нескольких исходов, равна сумме вероятностей этих исходов*. Таким образом, искомая вероятность P есть

$$P = P(A) + P(B) + P(C) + \\ + P(D) + P(E) + P(F).$$

Каждое из этих слагаемых вычисляется с использованием другого правила – **правила умножения вероятностей**. Оно гласит: *вероятность того, что наступят сразу несколько исходов, равна произведению вероятностей этих исходов*. Для наступления исхода A нужно, чтобы и одна, и другая кость выпали единицей. Значит, $P(A) = P_1 \cdot P_1 = 1/36$. Для наступления исхода B нужно, чтобы и одна, и другая кость выпали двойкой. Значит, $P(B) = P_2 \cdot P_2 = 1/36$ и т. д. Итак,

$$P = P_1 \cdot P_1 + P_2 \cdot P_2 + \ldots + P_6 \cdot P_6 = \\ = 6/36 = 1/6.»$$

«Всё понятно, – заявил Падишах. – Вероятность того, что наступит *или* один, *или* другой исход (произойдёт *или* одно, *или* другое событие), равна *сумме* вероятностей этих исходов (событий). А вероятность того, что произойдут *и* одно, *и* другое события, равна *произведению* вероятностей этих событий.»

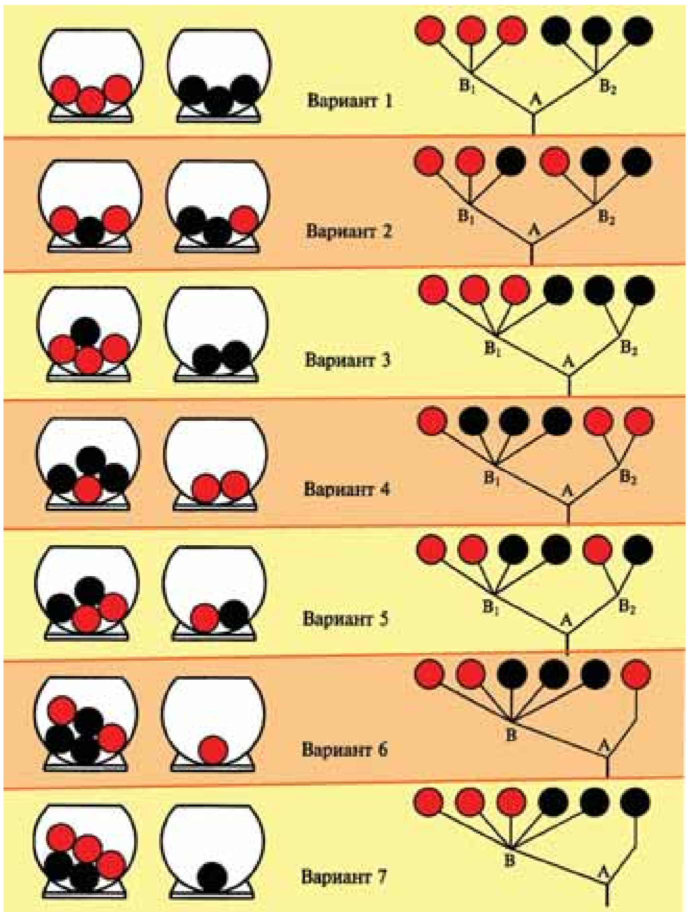
2. Звездочёт раскладывает шары по двум вазам

Однажды Падишах сильно разгневался на своего Звездочёта. Дело в том, что тот предсказал по звёздам наступление конца света через месяц. Но прошло три месяца – и ничего не случилось. Призвал Падишах Палача и повелел отрубить Звездочёту голову. Однако в последний момент смягчился: всё-таки хорошо, что Звездочёт ошибся, – и решил дать ему шанс спастись. Взял Падишах три красных и три черных шара и предложил Звездочёту распределить их любым образом по двум вазам из непрозрачного материала, а Палачу велел выбрать наугад одну из ваз и наугад вынуть из неё шар. Если тот окажется красным, Звездочёт будет помилован, а если чёрным – казнён.

«О Владыка! – взмолился Звездочёт. – Получается, что моя жизнь будет дважды зависеть от случая! Никто не ведает, какую вазу выберет Палач. Никто не ведает, какой шар подвернётся ему под руку!» «На случай надейся, но и сам не плошай, – усмехнулся Падишах. – Сообрази, как надо распределить шары по вазам, чтобы получить наибольшую вероятность спастись.» «Я вижу семь вариантов размещения трёх красных и трёх чёрных шаров по вазам», – сказал Звездочёт (рис. 1 *а*). «Вот и выбери из них тот, где вероятность вынуть красный шар наибольшая, – сказал Падишах. – Это исключительно в твоих интересах.»

Поможем Звездочёту спастись. Его варианты удобно представить в виде семи несложных «лабиринтов» (рис. 1 *б*), где красные кружки соответствуют красным шарам, а чёрные – чёрным; «выход» к красному кружку означает вынимание красного шара. Если Палач подойдёт, например, к левой вазе, то на схеме лабиринтов это отразит выбор пути $A \to B_1$ от развилки A. Выбор случаен; его вероятность равна $1/2$ (то же относится и к выбору пути $A \to B_2$).

Рассмотрим различные варианты и подсчитаем для каждого вероятность вынуть красный шар (вероятность выйти в лабиринте к одному из красных кружков). Обозначим вероятности этих вариантов через $P_1, P_2, \dots, P_7$.



а *б*

Рис. 1

Вариант 1. Если выбран путь $A \to B_1$, то выход к одному из красных кружков обеспечен. Если же выбран путь $A \to B_2$, то выход приведёт к чёрному кружку. Ясно, что $P_1 = 1/2$.

Вариант 2. Согласно правилу сложения вероятностей, вероятность P_2 есть сумма вероятностей двух исходов: исхода при подходе Палача к левой вазе (исхода при выборе пути $A \to B_1$) и исхода при подходе Палача к правой вазе (исхода при выборе пути $A \to B_2$). Для обозначения этих двух вероятностей будем использовать в данном и последующих вариантах буквы «л» (левая ваза) и «п» (правая ваза). Итак, $P_2 = P_2^{\text{л}} + P_2^{\text{п}}$. Далее воспользуемся правилом умножения вероятностей и запишем: $P_2^{\text{л}} = (1/2)\cdot(2/3)$ и $P_2^{\text{п}} = (1/2)\cdot(1/3)$. Таким образом, $P_2 = (1/2)\cdot(2/3)+(1/2)\cdot(1/3)=(1/2)$.

Вариант 3. $P_3^{\text{л}} = (1/2)\cdot(3/4)$ и $P_3^{\text{п}} = 0$ (при выборе правой вазы появление красного шара исключается). Таким образом,

$$P_3 = P_3^{\text{л}} = (1/2)\cdot(3/4) = 3/8.$$

Вариант 4. $P_4^{\text{л}} = (1/2)\cdot(1/4)$ и $P_4^{\text{п}} = (1/2)\cdot 1$ (мы написали тут единицу, чтобы подчеркнуть: при выборе правой вазы появление красного шара есть достоверное событие). Таким образом,

$$P_4 = (1/2)\cdot(1/4)+(1/2) = 5/8.$$

Вариант 5. $P_5^{\text{л}} = (1/2)\cdot(1/2)$ и $P_5^{\text{п}} = (1/2)\cdot(1/2)$. Итак,

$$P_5 = (1/4)+(1/4) = 1/2.$$

Вариант 6. $P_6^{\text{л}} = (1/2)\cdot(2/5)$ и $P_6^{\text{п}} = (1/2)\cdot 1$. Итак,

$$P_6 = (1/5)+(1/2) = 7/10.$$

Вариант 7. $P_7^{\text{л}} = (1/2)\cdot(3/5)$ и $P_7^{\text{п}} = 0$. Итак, $P_7 = 3/10$.

Мы видим, что Звездочёту *наиболее целесообразно* разместить шары по вазам в соответствии с вариантом 6, а *наименее целесообразен* вариант 7.

Конечно, не следует забывать, что речь идёт о *вероятности* события. А выбор Палачом того или иного шара всё равно *случаен*, так что вариант 6 (как и любой другой вариант) не даёт гарантии Звездочёту избежать казни.

Звездочёт умел подсчитывать вероятности, и он, конечно, разместил шары по вазам в соответствии с вариантом 6. И ему повезло: Палач вынул красный шар. Падишах был доволен – всё-таки ему жаль было терять Звездочёта.

3. Звездочёт пытается выйти из Лабиринта

Прошло некоторое время, и Падишах снова разгневался на своего Звездочёта. Теперь он приговорил того к пожизненному заключению. Несчастный Звездочёт бросился на колени и стал просить Падишаха либо помиловать его, либо казнить, потому что пожизненное заключение – это хотя и не смерть, но и жизнью считаться не может. «Я не Бог, чтобы выбирать между помилованием и казнью! – сказал Падишах. – Пусть этот выбор сделает случай!». И повелел своему Визирю: «Отправить осуждённого в особый Лабиринт! Если он сумеет выйти из него, станет свободным. Если не сумеет, окажется там замурованным и вскоре скончается». Визирь поклонился и спросил: «А сколько монет ему выдать?». Подумав, Падишах сказал: «Достаточно пяти монет».

Теперь пора объяснить, что такое особый Лабиринт и зачем нужны монеты тому, кого туда отправляют. В этом лабиринте (рис. 2) четыре комнаты: A, B, C, D. Входя в него, человек попадает в комнату A, а выйти из лабиринта можно только через комнату D. На рисунке видны изогнутые коридоры, соединяющие комнаты A и B, B и C, C и D. Из комнаты A вы можете попасть только в комнату B, а из комнаты B – либо назад в комнату A, либо в комнату C, причём заранее неизвестно, куда приведёт выбранный вами коридор. Маленькими кружками показаны 6 особых дверей (потому Лабиринт и назван «особым»), все они заперты. Каждую из них можно открыть (притом лишь на несколько секунд) только со стороны коридора, но не со стороны комнаты. Чтобы дверь приоткрылась, надо опустить монету в специальную щель. Вот для чего нужны монеты.

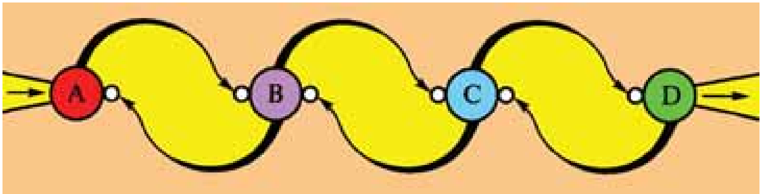


Рис. 2

Отправив Звездочёта в этот Лабиринт и снабдив его пятью монетами, Падишах тем самым дал ему шанс оказаться на свободе. Насколько он велик? Подсчитаем вероятность попадания осуждённого в комнату D и таким образом получения свободы.

Существуют три пути, позволяющие попасть в D тому, у кого есть пять монет: один путь с тремя переходами $A \to B$, $B \to C$, $C \to D$ (рис. 3 *а*) и два пути с пятью переходами: $A \to B$, $B \to A$, $A \to B$, $B \to C$, $C \to D$ (рис. 3 *б*), либо $A \to B$, $B \to C$, $C \to B$, $B \to C$, $C \to D$ (рис. 3 *в*). Числами указаны вероятности каждого перехода. В первом случае нужны, кроме везения, три монеты, а во втором и третьем – пять монет. Учитывая вероятности переходов, подсчитываем вероятности попасть в комнату D. Для первого пути эта вероятность равна $P_1 = 1 \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/4$ (с учётом правила умножения вероятностей), для второго $P_2 = 1 \cdot (1/2) \cdot 1 \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/8$, для третьего $P_3 = 1 \cdot (1/2) \times (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/16$.

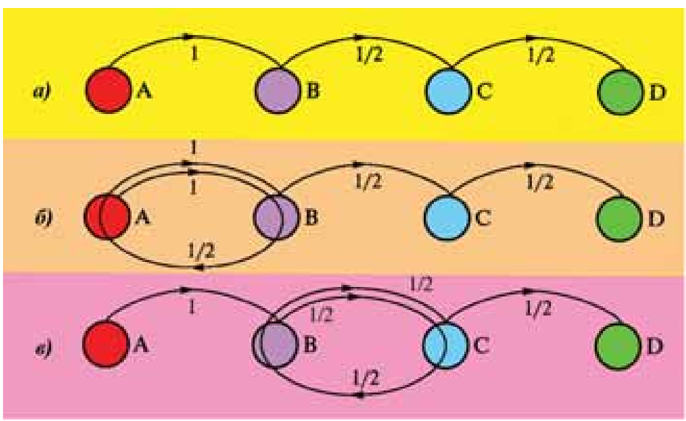


Рис. 3

Согласно правилу сложения вероятностей, вероятность P Звездочёту выйти из Лабиринта на свободу равна

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 1/4 + 1/8 + 1/16 = 7/16.$$

Если бы Звездочёту дали не пять, а больше монет, то возникли бы дополнительные возможные пути выхода из Лабиринта. Падишах в душе благоволил к своему Звездочёту. Поэтому он ещё раз подумал и приказал выдать Звездочёту семь монет. Предлагаем читателю самому подсчитать, какова стала вероятность спастись Звездочёту.