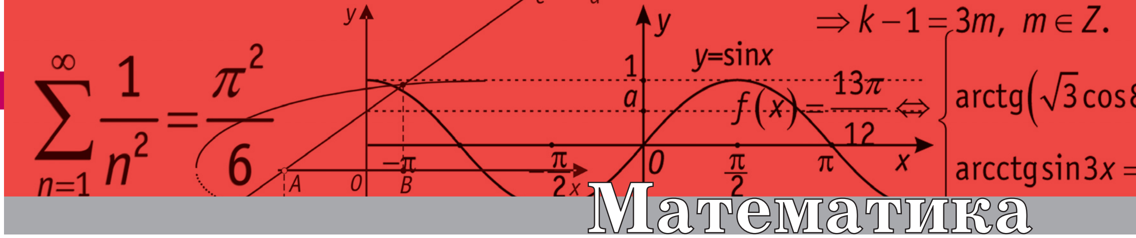

Пукас Юрий Остапович
Учитель математики МАОУ
«Гимназия города Троицка» г. Москва.

Звенья одной цепочки

По мнению Сергея Евгеньевича Рукшина, часто удаётся построить цепочку возрастающих по сложности задач, изложенных в такой последовательности, что, двигаясь по этой цепочке, учащийся сможет самостоятельно разобраться в завершающей трудной задаче, которую ранее без подсказки учителя он не смог бы решить.

Разобранные в статье задачи посвящены поиску рекуррентных соотношений. Половина этих задач встретилась недавно, поэтому тема рекуррентных соотношений довольно актуальна.

1. (V Соросовская олимпиада-1998) Сколькими способами из чисел 1, 2, 3, ..., 11 можно выбрать несколько чисел так, чтобы среди выбранных не было трёх идущих подряд?

Решение. Если догадаться искать рекуррентную формулу для подсчёта количества указанных способов в зависимости от длины ряда чисел (а мне в своё время это не пришло в голову), то дальнейшее решение не представляет труда. Обозначим через $f(n)$ количество способов выбрать из чисел 1, 2, 3, ..., n набор из нескольких чисел (возможно, не содержащий ни одного числа), в котором нет трёх идущих подряд чисел. Понятно, что $f(1) = 2$ (мы или берём 1, или ничего не берём),

$$f(2) = 2^2 = 4,\ f(3) = 2^3 - 1 = 7$$

(здесь мы не имеем права выбрать все три числа).

Допустим, что для ряда последовательных чисел 1, 2, 3, ..., $n - 1$ нам известны величины $f(k)$ для всех натуральных $k \le n - 1$. При добавлении в ряд нового числа n при подсчёте количества способов $f(n)$ возможны три различные ситуации.

Во-первых, новое число не включается в выборку. Понятно, что таких способов $f(n - 1)$. Во-вторых, выбрав число n, мы не включаем в выборку

число $n - 1$. Таких способов $f(n - 2)$. Если же мы берём два последних числа, то уже нельзя включать в выборку число $n - 2$. Получается, что таких способов $f(n - 3)$. Следовательно,

$$f(n) = f(n - 1) + f(n - 2) + f(n-3).$$

Теперь последовательно вычисляем:

$f(4) = 13$, $f(5) = 24$, $f(6) = 44$,

$f(7) = 81$, $f(8) = 149$, $f(9) = 274$,

$f(10) = 504$, $f(11) = 927$.

Ответ. 927.

2. («Покори Воробьёвы горы»-2012) Мария Ивановна – строгая учительница по алгебре. Она ставит в журнал только двойки, тройки и четвёрки, причём никогда не ставит одному ученику две двойки подряд. Известно, что она поставила Вовочке 6 оценок за четверть. Сколькими различными способами она могла это сделать?

Решение. Понятно, что эту задачу надо решать так же, как предыдущую, ведь они разбираются в одной статье! Но ученикам 7 – 8 классов, участвовавшим в олимпиаде «Покори Воробьёвы горы-2012», додуматься до рекуррентного подсчёта было непросто. Конечно, малое количество оценок, выставленных Вовочке, оставляло возможность прямого подсчёта количества различных способов, но это количество достаточно велико, скоро мы в этом убедимся. По аналогии с предыдущей задачей обозначим искомое количество способов через $f(6)$. Первая оценка может быть любой, поэтому $f(1) = 3$. Теперь найдём $f(2)$. Если первая оценка не 2, а 3 или 4, то вторая оценка может быть любой, таких способов 6. Ещё возможны варианты 2, 3 и 2, 4, поэтому $f(2) = 8$. Заметим, что Мария Ивановна может поставить 3 или 4 после любой отметки, а двойку только после тройки или четвёрки. Следовательно, набор из n отметок можно получить, приписав 3 или 4 к любому набору длины $n - 1$, а также приписав к набору длины $n - 2$ либо пару отметок 32, либо 42. Теперь, получив формулу

$$f(n) = 2\cdot f(n - 1) + 2\cdot f(n - 2),$$

последовательно вычисляем:

$$f(3) = 22,\ f(4) = 60,\ f(5) = 164$$

и, наконец, $f(6) = 448$.

Решить следующую задачу теперь уже не составит труда.

3. («Ломоносов», 2014) Первоклассница Маша, заходя в школу, каждый раз поднимается по лестнице, имеющей 11 ступенек. Находясь внизу лестницы или на очередной её ступеньке, она может подняться либо на следующую ступеньку, либо через одну ступеньку (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно зайти в школу, чтобы подняться на крыльцо всеми возможными способами?

Ответ. 144.

4. Сколькими способами можно замостить дорожку размерами $3\times k$ плитками размерами 1×2?

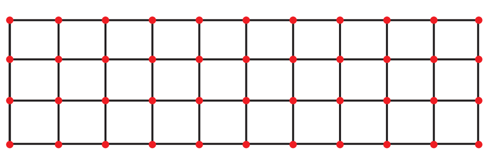

Рис. 1

Решение. В этой задаче сразу понятно, что надо искать рекуррентную формулу. Но как её найти?

Понятно, что k – чётное число. На рис. 1 значение $k = 10$. Обозначим через $f(k)$ искомое количество способов замощения дорожки размерами $3\times k$ плитками размерами 1×2. Мостить будем слева направо, начать можно пятью способами, см. рис. 2.

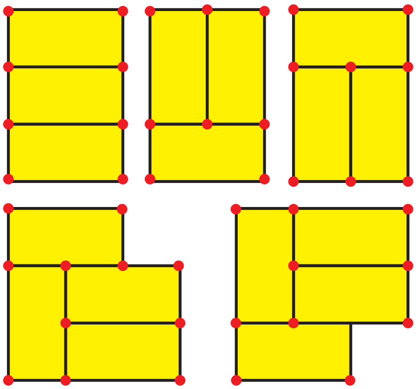

Рис. 2

Ясно, что для каждого из первых трёх способов продолжить работу мы сможем $f(k-2)$ способами. Для каждого из двух других способов (четвёртого и пятого) возможны два продолжения, на рис. 3 они показаны зелёным цветом (для пятого способа).

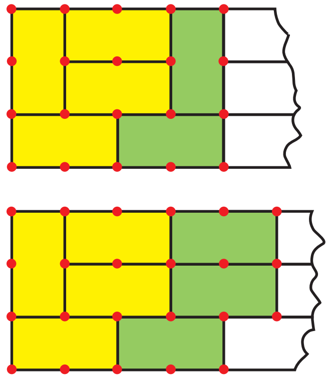

Рис. 3

Первое из этих продолжений можно завершить $f(k-4)$ способами, а для второго – опять выбор из двух продолжений, и так далее. Следовательно, имеет место формула

$$f(k) = 3\cdot f(k-2) +$$
$$+ 2\cdot(f(k-4) + f(k-6) + \ldots + f(0)).$$

Так как найденную формулу всё же не очень удобно применять, попробуем её усовершенствовать:

$$\begin{cases} f(k)=3\cdot f(k-2)+2\cdot\left(f(k-4)+f(k-6)+\ \ldots\ +\ f(0)\right); \\ f(k-2)=3\cdot f(k-4)+2\cdot(f(k-6)+\ldots+f(0)). \end{cases}$$

Вычитая из первой строки вторую, получаем более удобную для применения рекуррентную формулу:

$$f(k) = 4\cdot f(k-2) - f(k-4).$$

Очевидно, что $f(0) = 1$, $f(2) = 3$. С помощью выписанной формулы получаем, что

$$f(4) = 11,\ f(6) = 41,\ f(8) = 153,$$

а для изображённой на рис. 1 дорожки $f(10) = 571$.

Попробуем теперь получить (объяснить) формулу

$$f(k) = 4\cdot f(k-2) - f(k-4)$$

путём рассуждений! И.М. Гельфанд вспоминал, что в детстве, если у него не получалась какая-нибудь задача, то он заглядывал в ответ, а уже зная ответ и постановку задачи, восстанавливал методы её решения.

Нашу формулу мы конструировали, продвигаясь от начала дорожки слева направо. Теперь представим, что дорожка размерами $3\times(k-2)$ уже замощена, и попробуем осуществить переход от $f(k-2)$ к $f(k)$. На рис. 4 показано, как может выглядеть в этот момент правый край почти замощённой (осталось выложить всего три плитки) дорожки.

Для каждого из пяти случаев мы можем завершить работу (не меняя расположения уже уложенных плиток) любым из трёх способов, изображённых на рис. 5.

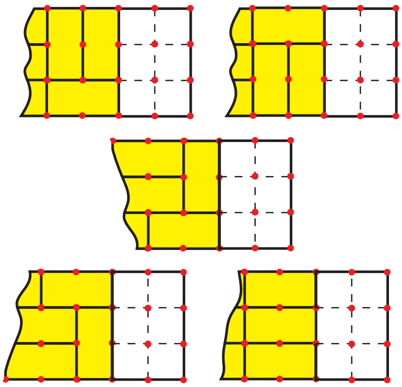

Рис. 4

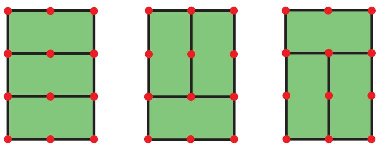

Рис. 5

Это даст нам в итоге $3{\cdot}f(k-2)$ способов. Но ещё в первых четырёх случаях можно завершить укладку иначе, изменив положение одной плитки (см. рис. 6; на левых рисунках она выделена зелёным цветом).

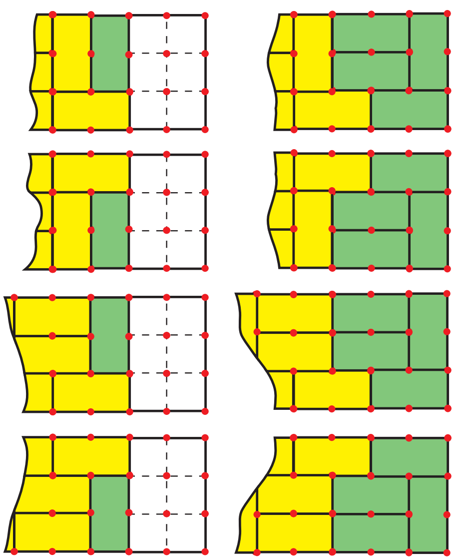

Рис. 6

А сколько таких способов? «В первых четырёх» – это не значит «четыре пятых» от $f(k-2)$.

Тут надо понять, что «пятых» случаев, в которых невозможно завершить работу, изменив положение одной плитки, ровно $f(k-4)$. Действительно, для каждого из $f(k-4)$ способов замощения дорожки размерами $3\times(k-4)$ есть только один способ получения «пятого» случая! Следовательно, всего «первых четырёх» случаев $f(k-2)-f(k-4)$, поэтому

$$f(k) = 3{\cdot}f(k-2) + (f(k-2) - f(k-4)) =$$
$$= 4{\cdot}f(k-2) - f(k-4).$$

К этому мы и стремились.

Вот ещё две интересные задачи, одна из которых очень трудная.

5. («Физтех-2014», дистанционный этап) В турнире участвовали 144 теннисиста. Все игры проходили на одном корте. Спортсмен, проигравший хотя бы одну игру, выбывает из турнира. Известно, что у участников каждой встречи количество предыдущих побед отличалось не более чем на одну. Какое наибольшее количество игр мог сыграть победитель турнира?

Решение. Заметим, что после каждой игры выбывает один участник, следовательно, всего состоялось 143 игры. Обозначим через $g(k)$ минимальное количество участников турнира, победитель которого может одержать k побед. Понятно, что

$$g(1) = 2,\ g(2) = 3.$$

Если участников будет четверо, то всего будет сыграно 3 игры. Победитель не может быть участником всех трёх игр, так как в этом случае перед последней игрой у него будет 2 победы, а у его соперника ни одной. Поэтому $g(3) = 5$. Заметим, что

$$g(3) = g(1) + g(2),$$

и это не случайно! Чтобы иметь перед финалом $k-1$ победу, будущий победитель должен победить в «подгруппе», содержащей не менее, чем $g(k-1)$ теннисистов, а его соперник должен одержать свои не менее $k-2$ побед в другой «подгруппе», в которой не менее чем $g(k-2)$ теннисистов. Следовательно, выполняется рекуррентное соотношение

$$g(k) = g(k-2) + g(k-1).$$

Последовательно вычисляем:

$g(4) = 8$, $g(5) = 13$, $g(6) = 21$,

$g(7) = 34$, $g(8) = 55$, $g(9) = 89$,

$g(10) = 144$.

Получается, что при 144 участниках победитель может сыграть и победить не более 10 раз. А как составить расписание игр, чтобы этот результат (10 побед) можно было достигнуть, понятно из предыдущих рассуждений.

Заметим, что, согласно такому расписанию, продвигаясь к финалу, теннисисты должны последовательно побеждать в «подгруппах» численностью в 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 и 89 участников. Эти числа являются членами последовательности Фибоначчи, в которой каждое последующее число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих чисел:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2},$$

причём

$$u_1 = u_2 = 1.$$

Когда в задаче 3 первоклассница Маша прыгала по ступенькам, при подсчёте способов получались числа из этой же последовательности!

Число 199 из условия следующей задачи (для 11 класса) не является числом Фибоначчи, как и число 76 из условия аналогичной задачи для десятиклассников. Но думаю, что гениальный Рамануджан, для которого «каждое натуральное число было личным другом», сразу бы увидел, что

$$199 = 55 + 55 + 89, \text{ а}$$

$$76 = 21 + 21 + 34.$$

Возможно, это подметил и победивший тогда среди десятиклассников Николай Дуров – будущий обладатель трёх золотых медалей Международных математических олимпиад для школьников (1996, 1997, 1998), двукратный абсолютный чемпион мира по программированию среди студентов, старший брат Павла Дурова, вместе с которым он потом создавал социальную сеть «ВКонтакте».

6. (III Соросовская олимпиада, 1997) В одном криминальном царстве, слаборазвитом государстве Король решил начать борьбу с коррупцией и для примера наказать одного из своих 199 министров. Министров вызвали во дворец и рассадили за большим круглым столом. Сначала хотели найти того из них, у кого больше всего денег на банковском счету, и объявить его главным коррупционером. Для выявления количества денег на банковском счету одного министра требуется 20 минут. Но Король повелел найти обвиняемого в течение четырёх часов, пока он проходит лечебные процедуры. По мнению Главного Придворного Администратора обвинить можно любого министра, надо только найти юридическое обоснование. Главный Юрист предложил объявить коррупционером первого обнаруженного министра, у которого на банковском счету больше денег, чем у каждого из двух его соседей (по одному справа и слева). Каким образом можно наверняка найти соответствующего этому условию министра в отведённые 4 часа? За это время можно успеть последовательно выяснить размеры банковских счетов не более чем 12 министров. Предполагается, что суммы денег на банковских счетах различны.

Решение. Пусть длина окружности круглого стола равна 199, а кресла министров расположены вокруг него в вершинах правильного 199-угольника. Для первых трёх проверок выберем министров A, B и C так, что длины дуг AB, BC и CA при обходе по часовой стрелке равны соответственно 55, 55 и 89, то есть u_{10}, u_{10} и u_{11} (рис. 7).

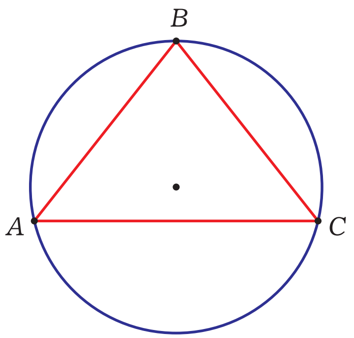

Рис. 7

Возможны два случая: либо у министра B денег окажется больше, чем у министров A и C, либо у кого-то из двух других (для определённости будем считать, что у министра C).

В первом случае для проверки №4 выбираем министра D так, что длины дуг AD и DB при обходе по часовой стрелке равны соответственно 21 и 34, то есть u_8 и u_9 (рис. 8).

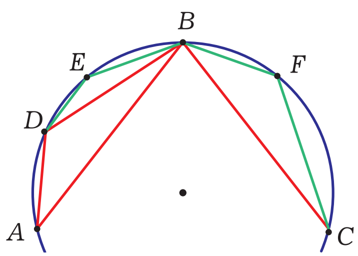

Рис. 8

Если при проверке №4 окажется, что у министра D денег больше, чем у министра B, то зону поиска сужаем до дуги ADB, а для проверки №5 выбираем министра E так, что дуга DE равна 13, а дуга EB равна 21, то есть u_7 и u_8. В зависимости от того, кто богаче, D или E, зону поиска сужаем до дуги ADE или DEB соответственно.

Если же при проверке №4 окажется, что у министра D денег меньше, чем у министра B, то зону поиска сужаем до дуги DBC, а для проверки №5 выбираем министра F так, что дуга BF равна 21, а дуга FC равна 34, то есть u_8 и u_9. В зависимости от того, кто богаче, F или B, зону поиска сужаем до дуги BFC или DBF соответственно.

Для каждой очередной проверки будем выбирать министра, кресло которого расположено на большей дуге, деля её на две части, длины которых равняются двум последовательным числам Фибоначчи. И так далее. Свойство чисел Фибоначчи ($u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$) всегда позволяет проводить такие деления, и после проверки №12 мы гарантированно получим длины u_1 и u_2, равные единице, с креслом главного «коррупционера» посередине.

Во втором случае зоной поиска является дуга BCA, для проверки №4 на дуге CA выбираем министра G так, что длины дуг CG и GA при обходе по часовой стрелке равны соответственно 34 и 55, то есть u_9 и u_{10} (рис. 9).

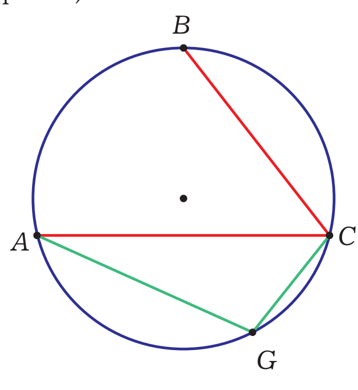

Рис. 9

В зависимости от того, кто богаче, G или C, зону поиска сужаем до дуги CGA или BCG соответственно, получая для дальнейшего рассмотрения перед проверкой №5 вместо дуг с длинами u_{10} и u_{11} дуги с длинами u_9 и u_{10}. Действуя далее, как и при рассмотрении первого случая, после проверки №12 мы также гарантированно получим длины u_1 и u_2, завершая тем самым процесс «поимки» главного «коррупционера».