Пиголкина Татьяна Сергеевна
Доцент МФТИ,
заслуженный работник высшей школы,
заслуженный преподаватель МФТИ.

Золотой треугольник

В статье рассматриваются золотое сечение, золотой треугольник, правильный пятиугольник, пентаграмма, а также взаимосвязи между ними.

Решение одной олимпиадной задачи

На одной из олимпиад мехмата МГУ предлагалась следующая задача.

Задача. В равнобедренном треугольнике ABC биссектриса AD равна основанию AC. Найти площадь треугольника ABC, если $AC=2$.

Решение. Обозначим через 2α равные углы при основании AC, тогда $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$ (рис. 1). По условию $AD=AC$, треугольник CAD равнобедренный и $\angle ADC=2\alpha$. С одной стороны, сумма углов треугольника CAD равна π, а с другой стороны, она же равна $2\alpha+\alpha+2\alpha=5\alpha$, откуда следует, что $\alpha=\dfrac{\pi}{5}$ (или 36°). Угол ABC также равен $\pi/5$, так как

$$\angle B=\pi-\angle A-\angle C=\pi-4\alpha=\alpha.$$

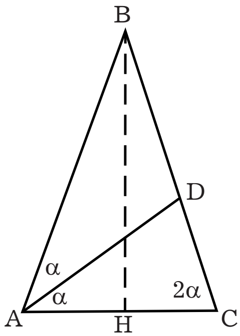

Рис. 1

Высота BH, проведённая к основанию, является медианой, $AH=CH$. Из прямоугольного треугольника CBH следует соотношение $BH=CH\cdot\operatorname{tg}2\alpha$, тогда при $AC=2$ имеем

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BH=$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot\frac{AC}{2}\cdot\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}2\alpha.$$

Градусная мера угла $2\alpha = \frac{2\pi}{5}$ равна 72°. Осталось вычислить tg72°. Но мы просто откроем предыдущую статью В. Б. Дроздова и выпишем ответ:

$$S_{ABC} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

Эта задача вполне по силам хорошо владеющему тригонометрией учащемуся, он вычислит tg 72°. Для участника математического кружка или ученика математической школы задачу можно назвать лёгкой, поскольку рассмотренный треугольник относится к замечательным треугольникам, с которыми они, конечно, встречались.

Золотое сечение

Присмотримся внимательнее к равнобедренному треугольнику, в котором биссектрисы углов при основании равны основанию. Угол при вершине B равен $\frac{\pi}{5}$, углы при основании равны $\frac{2\pi}{5}$ (это 36° и 72° – углы, кратные 9°). Положим $AC=a$, $AB=b$ (рис. 2). Треугольник ADB также равнобедренный, $AD=BD$, значит, $AC=AD=BD=a$, и тогда $CD = b-a$.

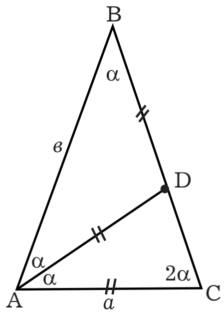

Рис. 2

По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b-a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 - ab - a^2 = 0 \\ a^2 + ab - b^2 = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \\ \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array} \right].$$

Биссектриса угла при основании разделила отрезок BC в отношении, которое у Евклида называлось «делением отрезка в среднем и крайнем отношении» и соответствовало пропорции

$$b : a = a : (b - a).$$

Позже такое деление отрезка стали называть «золотым» или «золотым сечением». Число $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, определяющее отношение $\frac{b}{a}$, равное отношению его частей $\frac{a}{b-a}$, иррациональное. Его часто обозначают для краткости буквой φ,

$$\varphi = 1{,}61803\ldots .$$

Отметим также, что обратное отношение $\frac{1}{\varphi} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ отличается от значения φ только на единицу:

$$\frac{1}{\varphi} = 0{,}61803\ldots .$$

Это сразу видно из самого уравнения для φ:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi^2 = 1 + \varphi \Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{\varphi} + 1.$$

Итак, «золотой» треугольник – это равнобедренный треугольник, в котором отношение боковой стороны к основанию равно φ. Можно его определить и как равнобедренный треугольник с углом при вершине $\frac{\pi}{5}$ или как равнобедренный треугольник, в котором биссектриса угла при основании равна основанию.

В «золотом» треугольнике легко находятся не тангенсы, а косинусы углов $\frac{\pi}{5}$ и $\frac{2\pi}{5}$ (т. е. углов 36° и 72°): из равнобедренного треугольника ADB следует, что

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{b/2}{a}=\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

а из треугольника ABC имеем

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{a/2}{b}=\frac{a}{2b}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Вычислим также значение tg 72°, т. е. $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$, используя более простые соображения. Из прямоугольного треугольника CBH (рис. 1) выражаем

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{BH}{HC}\Leftrightarrow\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}=\frac{BH}{AC/2}=$$

$$=\frac{\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{a/2}=\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2-1}=$$

$$=\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Построение «золотого треугольника»

Опишем построение «золотого» треугольника с помощью циркуля и линейки, используя алгебраический метод построения (см. [1]).

По данному отрезку a строим отрезок $x_1=5a$, затем (как среднее геометрическое) отрезок

$$x_2=\sqrt{5a\cdot a}=a\sqrt{5},$$

далее отрезок $x_3=a\sqrt{5}+a$ и, наконец, делением пополам получаем отрезок, равный боковой стороне:

$$b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a.$$

По основанию и боковой стороне строим «золотой» треугольник.

Построение правильного пятиугольника

Рассмотрим правильный n-угольник (все его стороны равны между собой и все его углы равны друг другу). Около правильного n-угольника можно описать окружность (рис. 3). Обозначим через a_n сторону n-угольника, через α_n центральный угол, опирающийся на сторону, а угол самого n-угольника обозначим через φ_n.

Очевидно, что

$$\alpha_n=\frac{2\pi}{n},\quad \varphi_n=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_n}{2}\right)=\pi-\alpha_n.$$

При n=5 имеем $\alpha_5=\frac{2\pi}{5}, \varphi_5=\frac{3\pi}{5}$, а любой вписанный угол, опирающийся на дугу, стягиваемую стороной a_5, равен $\frac{\pi}{5}$.

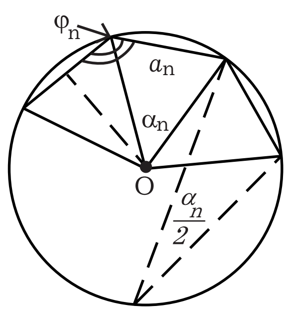

Рис. 3

Правильный пятиугольник определяет пентаграмму – пятиконечную звезду, вписанную в правильный пятиугольник так, что диагонали пятиугольника и образуют звезду. В правильном пятиугольнике отношение длины диагонали к длине стороны равно числу φ, которое определяет золотое сечение. Значение «золотого сечения» в геометрии и всей мировой культуре огромно, а символическое толкование пентаграммы разнообразно у разных народов и в разных верованиях. История «золотого сечения» увлекательна, интересна и познавательна.

В нашем журнале мы рассматриваем математическую сторону объектов (см. [2]). В указанной статье описывалось построение правильного пятиугольника (и пентаграммы) по заданному радиусу описанной окружности. Мы приведём построение правильного пятиугольника по заданной стороне a.

Построение.

1. Строим по отрезку a «золотой» треугольник $A_1A_2A_4$, как описано выше (рис. 4).

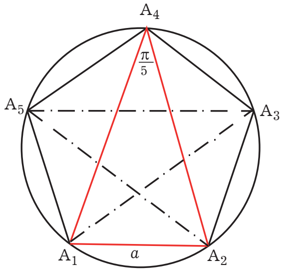

Рис. 4

2. Находим центр описанной окружности и проводим эту окружность.

3. С центром в точке A_4 проводим дуги радиуса a, на окружности получаем точки A_3 и A_5.

4. Соединяем точки A_2, A_3 и точки A_1, A_5.

Доказательство. Хорда a стягивает внешнюю для пятиугольника дугу $\frac{\pi}{5}$, вписанные углы $A_5A_2A_4$ и $A_3A_1A_4$ опираются на такие же дуги, они равны $\frac{\pi}{5}$. Углы при основании «золотого» треугольника равны $\frac{2\pi}{5}$, поэтому лучи A_1A_3 и A_2A_5 – биссектрисы этих углов,

$$\angle A_2A_1A_3 = \angle A_5A_2A_1 = \frac{\pi}{5},$$

откуда и следует, что

$$A_1A_5 = A_2A_3 = a,$$

пятиугольник правильный.

Площадь S правильного пятиугольника равна сумме площадей пяти треугольников с вершинами в центре описанной окружности радиуса R:

$$S = 5\cdot\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{5}.$$

Из равенства $R = \dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{5}}$ следует

$$S = \frac{5}{2}\cdot\frac{a^2\sin\frac{2\pi}{5}}{4\sin^2\frac{\pi}{5}} = \frac{5}{4}a^2\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}.$$

Зная $\cos\frac{\pi}{5}$, находим $\sin\frac{\pi}{5}$ и после преобразованной получаем

$$S_{A_1A_2A_3A_4A_5} = S = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}.$$

Список литературы

1. *Золотарёва Н.Д.* Алгебраический метод решения задач на построение // Потенциал. Математика. Физика. Информатика. – 2016. – № 7.

2. *Дроздов В.Б.* Пентаграмма как геометрический объект // Потенциал. Математика. Физика. Информатика. – 2016. – № 12.