Пукас Юрий Остапович
Учитель математики
МАОУ «Гимназия города Троицка»
г. Москва.

Занимательные задачи нового времени

Для решения занимательных задач, как правило, не требуется каких-то особых знаний. Если у вас достаточно сообразительности, интуиции и настойчивости, нащупать путь решения всегда можно! Их условия очень интересны, забавны, нередко – просто смешны, они запоминаются и переходят от поколения к поколению (иногда изменяясь до неузнаваемости). Конечно, появляются и совсем новые задачи, задачи нового времени.

– Летел гусь, за ним полгуся, за ним четверть гуся, за ним две осьмушки гуся, сколько гусей летело? – спросил царь Ванюшу Ртищева в фильме Александра Митты «Сказ про то, как Царь Пётр арапа женил».

– Полгуся не летают, полгуся на тарелке лежат!

– Так да не так. А ты не думай, что гусь летает, ты возьми части-то да и сложи. Понял? Вдруг, что-нибудь да и выйдет. Ну, думай, думай!

– Два гуся...

– Что?

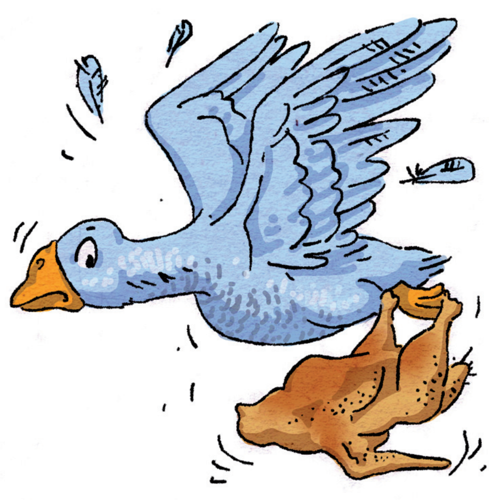
– Два гуся летели!

– Да, два гуся...

Давно это было: и сами события, и фильм, рассказывающий о них. Новые поколения учатся складывать, думать, представляя себе прочитанное или услышанное.

Года три назад я предложил одному очень толковому семикласснику вот такую задачу.

1. Чайка, летящая навстречу лайнеру, покрывает путь от носа до кормы за 12 с. Затем она разворачивается и пролетает мимо лайнера за 60 с. За какое время лайнер пройдёт мимо сидящей на воде чайки? (*Олимпиада мехмата МГУ по механике, 8 класс, 2009*.)



Вскоре этот ученик спросил, что такое «корма», а после моих объяснений неожиданно засмеялся и показал мне свой рисунок с лайнером-аэробусом! Это не удивительно, ведь он часто летает за океан к родителям-программистам...

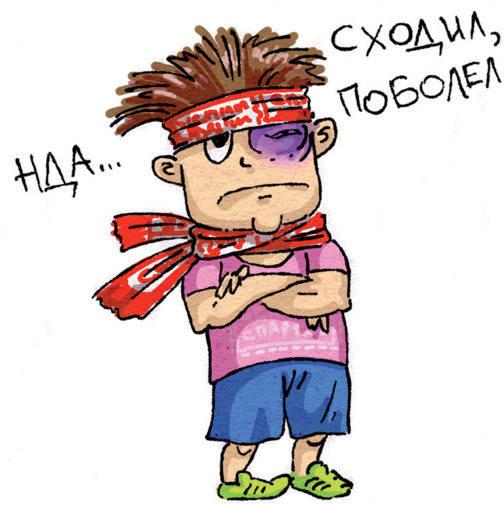
Да, пришли другие времена! Новый смысл приобретают давно знакомые слова. Другим заняты головы школьников, новые у них заботы, и новые появились у них увлечения. Авторы олимпиадных задач стараются идти в ногу со временем, вот сравните две задачи.

2. Косцы должны выкосить два луга. Начав с утра косить большой луг, они, проработав половину дня, разделились: 3/4 бригады осталась на первом лугу и к концу рабочего дня его докосила, а четвёртая часть косила второй луг, площадью вчетверо меньше первого. Сколько было косцов, если известно, что в течение следующего дня три косца полностью докосили второй луг? Предполагается, что производительность всех косцов одинакова и не меняется со временем. (*Олимпиада «Паруса надежды», 2010*.)

3. В ожесточённой драке 70 % фанатов «Спартака» повредили глаз, 75 % – ухо, 80 % – руку, 85 % – ногу. Какой процент фанатов «Спартака» заведомо повредили одновременно и глаз, и ухо, и руку, и ногу? (*Олимпиада «Паруса надежды», 2012*.)

За два года, что разделяют эти олимпиады, «Паруса надежды» перенесли нас из 18-го века в 21-й. Правда, тут надо отметить, что задача о фанатах – это просто более современная трактовка («новое прочтение») той, что была в 1996 году предложена девятиклассникам на очном туре *Второй Соросовской олимпиады школьников*. С неё мы и начнём разбор решений.

4. В математической олимпиаде участвовало 100 школьников. Было



предложено 4 задачи. Первую задачу решили 90 человек, вторую – 80, третью – 70 и четвёртую – 60. При этом никто не решил все задачи. Награду получили школьники, решившие и третью, и четвёртую задачи. Сколько школьников было награждено?

Решение. Заметим, что первую и вторую задачи решили не менее 70 человек (90 + 80 = 170), а третью и четвёртую – минимум 30 человек (70 + 60 = 130). Пересекаться эти множества не могут, так как нам дано, что ни один человек не решил всех задач, а так как 30 + 70 = 100 (общее число участников олимпиады), то получается, что первую и вторую задачи решили ровно 70 человек, а третью и четвёртую – ровно 30 человек, которые и получили награду.

Ответ. 30 человек.

Вернёмся теперь к футбольным фанатам. Рассуждая, как в предыдущем решении, получаем, что одновременно и глаз и ухо повредили не менее 45 % фанатов (70 + 75 = 145), а одновременно и руку и ногу – минимум 65 % (80 + 85 = 165). Так как 45 + 65 = 110, то повредили одновременно и глаз, и ухо, и руку, и ногу не менее 10 % фанатов. Это реализуется в случае, когда все остальные фанаты (90 %) имеют по три увечья (30 % фанатов повредили ухо, руку и ногу; 25 % – глаз, руку и ногу, 20 % – глаз, ухо и ногу; 15 % – глаз, ухо и руку).

Ответ. 10 %.

В 2005 году задачи о футбольных фанатах были ещё не такие «кровавые».

5. На острове рыцарей и лжецов (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) каждый болеет ровно за одну футбольную команду (из четырёх). В опросе приняли участие все жители острова. На вопрос «Болеете ли вы за “Спартак”?» ответили «Да» 40 % жителей. На аналогичный вопрос про «Зенит» утвердительно ответили 30 %, про «Локомотив» – 50 %, а про «ЦСКА» – 0 %. Какой процент жителей острова действительно болеет за «Спартак»? (*Московская математическая олимпиада, окружной тур, 2005*.)

Позапрошлой весной учеников одного относительно сильного 7-го класса (сейчас они в девятом) спросили (был какой-то случайный повод), на какие 15 республик распался Советский Союз. Пусть не сразу, но три республики всё же были названы: Украина, Новгород и Америка. После такого потрясающего (даже для людей не понаслышке знакомых с ситуацией в российском образовании) результата этого «опроса» уже с завистью и недоверием читаешь условие следующей задачи.

6. В результате опроса учеников школы выяснилось, что ровно 68 % учеников знают год рождения А.С. Пушкина, ровно 5/18 учеников умеют доказывать теорему Пифагора, ровно 23/30 учеников любят ходить в кино и ровно 512 учеников читали сказку А. де Сент-Экзюпери «Маленький принц». Найдите минимально возможное количество учеников в этой школе. (*«Покори Воробьёвы горы», заочный тур, 2012*.)

Решение. Так как все эти дроби и проценты от количества учеников школы должны быть целыми числами, можно сделать вывод, что это количество делится и на 25, и на 18. Следовательно, оно делится на 450. Ещё оно должно быть не меньше, чем 512. Поэтому минимально возможное количество учеников в этой удивительной школе равно 900. Ученикам же всех остальных школ предлагаем подумать над следующей задачей.

7. Врач сообщил Змею Горынычу, что если Змей будет выкуривать по 6 сигарет в день, то помрёт через

10 лет, а если по 17 сигарет в день, то через 5 лет. Сколько ещё проживёт Змей, если бросит курить? (Условимся, что все годы одинаковой длины, а каждая сигарета сокращает жизнь на одно и то же время.)

Более десяти лет назад Айрат Димиев в книге «Классная Америка» привёл данные Национального центра образовательной статистики США. Согласно им, 70 % выпускников американских школ не понимают письменный текст средней сложности. Другими словами, не понимают того, что читают. Не знаю, как насчёт понимания нашими современными выпускниками текста средней сложности, но представить, хотя бы о чём идёт речь в первых четырёх строках условия следующей задачи смогли лишь немногие, а большинство просто производило какие-то немыслимые действия с двумя данными в условии дробями. (*ЕГЭ-2012*.)

8. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более 3/13 от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более 2/7 от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 7 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составить девушки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Подробное решение похожей задачи приведено в статье В.Ю. Лупашевской «Несколько вопросов выпускнику» в сентябрьском номере журнала «Потенциал» за 2013 год. А вот лёгкая (для выпускников 2000 года) задача. Многие ли сейчас её решат?

9. Два друга, Ваня и Петя, ходили за грибами. Встретившись перед возвращением домой, они обнаружили, что Ваня нашёл 35 грибов, среди которых было несколько подосиновиков, а Петя грибов не нашёл. Ваня взял себе все белые грибы, а остальные отдал Пете. Петя, обнаружив среди них червивый подберёзовик, выкинул его. Сколько было найдено подосиновиков, если доля белых в найденных Ваней грибах оказалась равна доле подосиновиков в принесённых Петей домой грибах? (*МГУ, 2000*.)

Когда выпускники 2013 года были семиклассниками, некоторые из них (888 человек) участвовали в Математическом празднике, на котором под номером 2 им была предложена следующая занимательная задача.

10. На каждом из двух огородов Дед посадил по одинаковому количеству репок. Если в огород заходит Внучка, то она выдёргивает ровно 1/3 репок, имеющихся к этому моменту. Если заходит Жучка, то она выдёргивает 1/7 репок, а если заходит Мышка, то она выдёргивает только 1/12 репок. К концу недели на первом огороде осталось 7 репок, а на втором – 4. Заходила ли Жучка во второй огород? (*Математический праздник, 2009*.)

Комментарий. С задачей тогда справились менее 10 % участников. А ведь речь идёт всего лишь о нахождении числа по его части. Если спросить себя, кто последним заходил на огород, то окажется, что это могла быть только Внучка, выдернувшая при этом 2 репки. А перед Внучкой выдёргивать репки (одну) могла лишь Жучка. Получается, что Жучка заходила на второй огород, причём в тот момент, когда на нём росло 7 репок. Продолжив подобные рассуждения, можно убедиться, что до Жучки никто репок не выдёргивал, следовательно, на каждом из двух огородов Дед посадил по 7 репок.

А вот эту задачу решали совсем недавно участники заочного тура олимпиады «*Покори Воробьёвы горы-2014*».

11. Три сестры пришли на рынок и продавали поштучно цыплят. Первая принесла 12 цыплят, вторая – 18, а третья – 32 цыплёнка. Каждая из них часть товара продала утром, а часть – вечером. Утренняя цена за одного цыплёнка была у всех сестёр одинаковая, и вечерняя цена тоже одинаковая, но более низкая, чем утренняя. К вечеру весь товар был распродан, и дневная выручка (за утро и вечер) у всех сестёр оказалась одинаковой: по 1700 рублей. Найдите (в рублях) суммарную вечернюю выручку всех сестёр.

Лет 15 назад мне уже доводилось решать подобную задачу, встретившуюся тогда в экзаменационном тесте то ли в МГИМО, то ли в ВШЭ. Правда, там нужен был только ответ (и я его нашёл), а обоснование не требовалось. Нашёл ли я его тогда, не помню! Сейчас это удалось.

Чтобы легче было подобрать ответ, выручку будем считать в 50-рублёвых купюрах, у каждой сестры их по 34. А вот и зацепка: за 32 цыплёнка получено 34 купюры! Теперь предполагаем, что утром третья сестра продала только одного цыплёнка за 3 купюры, а вечером – всех оставшихся по одной купюре. Далее убеждаемся, что наше предположение реализуемо: первая сестра продала утром 11 цыплят и одного вечером, а вторая – 8 утром и 10 вечером. В этом случае суммарная вечерняя выручка всех сестёр равна 2100 рублей (42 купюры).

Покажем, что другого решения нет. Предположим, что торговля у сестёр завершилась следующим образом («утро» + «вечер»):

$$(12 - m) + m$$

у первой сестры,

$$n + (18 - n)$$

у второй, а у третьей сестры –

$$k + (32 - k).$$

Так как по условию и утром, и вечером каждая сестра хоть что-то продала, то $m \geq 1$, $n \geq 1$, $k \geq 1$. Приравнивая дневные выручки первой и третьей сестёр, получим:

$$(12 - (m+k))\cdot x = 32 - (m+k),$$

где x – это отношение утренней и вечерней цен. Понятно, что $x > 1$. Заметим, кстати, что мы нигде не предполагаем, что x – целое число. Далее получаем оценку величины x:

$$x=\frac{32-(m+k)}{12-(m+k)}=1+\frac{20}{12-(m+k)}\geq 3,$$

так как $(m+k) \geq 2$. Для $x = 3$ пример уже приведён, можно самостоятельно убедиться, что для $x = 3$ он единственный.

Допустим теперь, что $x > 3$. Приравнивая дневные выручки первой и второй сестёр, получим, что

$$(12-(m+n))\cdot x = 18-(m+n),$$

отсюда следует (для $x > 3$) оценка для суммы $(m+n)$:

$$x=\frac{18-(m+n)}{12-(m+n)}=1+\frac{6}{12-(m+n)}>3.$$

Получается, что $m + n > 9$. Но это ведь всего две возможности:

$$m + n = 10 \text{ и } m + n = 11.$$

В первом случае $x = 4$, а во втором случае $x = 7$. Осталось показать, что эти соотношения цен невозможны для условий нашей задачи. Вернёмся к сравнению результатов торговли первой и третьей сестёр. В первом случае (для $x = 4$) имеем:

$$x=\frac{32-(m+k)}{12-(m+k)}=1+\frac{20}{12-(m+k)}=4.$$

Отсюда

$$\frac{20}{12-(m+k)}=3,$$

но ведь 20 не делится на 3! Во втором случае (для $x = 7$) получаем, что

$$\frac{20}{12-(m+k)}=6,$$

но 20 и на 6 не делится!

С репками и цыплятами мы разобрались, а вот чему и как научились в школе нынешние выпускники, мы узнаем в начале лета. А самый лучший и надёжный путь для них к высокому летнему результату проходит через участие в математических олимпиадах, их сейчас очень много. Какие замечательные задачи там встречаются! Вот некоторые из них. Решения – в конце этой статьи.

12. Два олигарха Александро и Максимилиан за 2012 год взяли и разграбили свою страну. Известно, что состояние Александро на конец 2012 года равнялось двум состояниям Максимилиана на конец 2011 года. А состояние Максимилиана на конец 2012 года меньше, чем состояние Александро на конец 2011 года. Что больше: состояние Максимилиана (на конец 2011 года) или национальные богатства его страны? (*«Покори Воробъёвы горы-2013», 7 класс.*)

13. Братец Иванушка и сестрица Алёнушка одновременно вышли из подъезда и направились к киоскам с мороженным: Иванушка к киоску A, а Алёнушка – к киоску B. Солнце высоко, киоски далеко. Каждый из них дошёл до своего киоска, сразу купил мороженное и, тут же начав его есть, повернул обратно. Иванушка первый вернулся к подъезду и остановился, чтобы подождать Алёнушку. Когда Алёнушка подошла к подъезду, Иванушка как раз доел своё мороженное, а у Алёнушки было съедено 2/3 порции. Найдите отношение расстояний от подъезда до киосков A и B, если скорости у детей одинаковы, порции мороженного одинаковы и скорости поедания мороженного тоже одинаковы. (*«Весенний турнир Архимеда-2013».*)

14. Ваня опаздывал в школу и, поднимаясь бегом по эскалатору, не сразу заметил, что в момент, когда он ступил на эскалатор, из его сумки выпал учебник. Обнаружив пропажу, Ваня побежал вниз с удвоенной скоростью и через 20 секунд поднял книжку, оказавшись в этот момент ровно посередине эскалатора. От бега Ваня устал и остаток пути провёл стоя. Сколько времени провёл Ваня на эскалаторе? (*«Ломоносов-2011».*)

15. По пути из дома на рынок Валера купил в ларьке газету «Московский комсомолец» и стал её читать. На рынке он прервал чтение, купил картошку и пошёл обратно. Пройдя мимо ларька, Валера вновь продолжил чтение газеты. Каково расстояние от дома до рынка, если весь путь занял 1 час, скорость Валеры налегке составила 6 км/час, с картошкой – 3 км/час, а чтение газеты снизило её до 3 км/час (налегке) и до 2 км/час (с картошкой) соответственно? (*«Покори Воробъёвы горы-2009»*.)

16. На доске написано: «В этом предложении ...% цифр делятся на 2, ...% цифр делятся на 3, а ...% цифр делятся и на 2, и на 3». Вставьте вместо многоточий какие-нибудь целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным. (*Московская математическая олимпиада, 2009, 8 класс*.)

17. Мама может съесть весь борщ за 22 минуты, весь плов за 8 минут и торт за 15 минут. Вовочке на это требуется 7, 8 и 5 минут соответственно. Вовочка распределил продукты между собой и мамой таким образом, чтобы обед прошёл как можно быстрее. Найдите, сколько минут потратили на обед мама с Вовочкой. (*«Физтех-2013»*.)

18. В погребе замка лежало некоторое количество целых пачек печенья. Ночью пришли крысы и съели 33 пачки, причём все ели поровну. У некоторых из них от обжорства заболели животы, поэтому на следующую ночь в погреб пришли не все крысы, а только 13 из них. Они доели оставшееся печенье. Но каждая крыса смогла съесть втрое меньше печенья, чем накануне. Сколько пачек печенья было в погребе первоначально? (*ЗФТШ, 2008*.)

19. Петя и Вася выходят одновременно из пункта A и идут в пункт B, Петя по шоссе, а Вася по тропинке. Найдите расстояние между A и B по шоссе, если путь по тропинке короче пути по шоссе на 6 км, скорость движения Васи 4 км/ч, а скорость Пети – натуральное число, и он приходит в B на час позже Васи. (*«Покори Воробъёвы горы-2009»*.)

20. Группа отдыхающих в течение 2 ч 30 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону – в общей сложности не менее, чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 30 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 6 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость её течения? (*«Ломоносов-2005»*.)

Приводим обещанные решения

2. Эту задачу можно очень просто решить алгебраически. Например, так. Пусть в бригаде $4n$ косцов (4 звена по n человек), причём каждый из них выкашивает за полдня x соток. Площадь второго участка равна S соток, а площадь первого – $4S$. Тогда

$$\begin{cases} 4nx + 3nx = 4S, \\ nx + 3 \cdot 2x = S. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $n = 8$, а всего косцов 32 человека.

5. Пусть лжецы составляют x % жителей острова. Тогда $(100 - x)$ %

составляют рыцари. Так как каждый рыцарь ответил «Да» только на один вопрос из четырёх, а каждый лжец – на три, то

$$(100-x)+3x=100+2x=$$
$$=40+30+50=120,$$

отсюда $x=10$. Так как никто из жителей не сказал, что болеет за «ЦСКА», то все лжецы на этом острове болеют за «ЦСКА». А так как каждый лжец назвал себя и болельщиком «Спартака», то действительно болеют за «Спартак»

$$40\,\%-10\,\%=30\,\%$$

жителей острова.

Ответ. 30 %.

7. Пусть m – то количество лет, что проживёт ещё Змей Горыныч, если по совету врача сразу бросит курить. Предположим, что, выкуривая ежедневно по одной сигарете в день, за год Змей сокращает свою жизнь на t лет. Тогда, выкуривая ежедневно по 6 сигарет в день, за 10 лет он сокращает свою жизнь на $10{\cdot}6{\cdot}t$ лет и помирает. Выкуривая же ежедневно по 17 сигарет в день, он за 5 лет сокращает свою жизнь на $5{\cdot}17{\cdot}t$ лет с тем же исходом. В первом случае жизнь Горыныча сокращается на $(m-10)$ лет, а во втором – на $(m-5)$ лет. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} m-10=60t,\\ m-5=85t,\end{cases}$$

находим **ответ:** $m=22$ года.

9. Пусть Ваня взял себе b белых грибов. Тогда, выбросив один гриб из оставшихся, Петя взял себе $(34-b)$ грибов, среди которых было p подосиновиков. Составим уравнение:

$$\frac{b}{35}=\frac{p}{34-b},$$

из которого следует, что

$$p=\frac{b(34-b)}{35}.$$

Сумма натуральных чисел b и $34-b$ равна 34, а произведение делится на 35, поэтому хотя бы одно из них делится на 7. Выпишем все такие пары натуральных чисел, одно из которых делится на 7, а сумма равна 34: (7; 27), (14; 20), (21; 13), (28; 6). Произведение чисел в паре делится на 35 лишь во втором случае. Таким образом, $b=14$ или $b=20$. В любом из этих случаев было 8 подосиновиков.

Ответ. 8 подосиновиков.

12. Пусть на конец 2011 года состояние Александро оценивалось в X условных единиц, состояние Максимилиана – в Y у. е., а национальные богатства их страны – в N у. е. Через год страна была разорена, а состояния Александро и Максимилиана составили $2Y$ и Z соответственно. Причём $Z<X$. Получается, что

$$N=(2Y+Z)-(Y+X).$$

Отсюда следует

$$N=Y+Z-X,$$

или

$$N-Y=Z-X<0.$$

Следовательно, состояние Максимилиана (на конец 2011 года) было больше, чем национальные богатства его страны.

13. За то время, за которое Алёнушка проходит половину пути от киоска B до подъезда, и она, и Иванушка съедают по 1/3 порции мороженного. В тот момент, когда Алёнушка вернулась к подъезду, Иванушка как раз доел своё мороженое, а сестрице оставалось съесть ещё 1/3 порции. Получается, что Иванушка начал есть свою порцию (достиг своего киоска A), когда Алёнушка находилась ровно на середине своего пути от подъезда до киоска B. Следовательно, путь до киоска A в 2 раза короче.

Ответ. 1 : 2.

14. Пусть Ваня обнаружил пропажу через t секунд после того, как ступил на эскалатор. За это время, двигаясь вверх со скоростью v м/с относительно эскалатора, он удалился от книги, лежащей на ступенях, на $v{\cdot}t$ метров. Понятно, что побежав обратно со скоростью $2v$, Ваня преодолел это расстояние в 2 раза быстрее, чем при подъёме. Получается, что $t = 40$ секунд, а всего к этому моменту Ваня находился на эскалаторе 60 секунд. За это время книга доехала до середины эскалатора, поэтому остаток пути был преодолён за те же 60 секунд.

Ответ. Всего Ваня провёл на эскалаторе 120 секунд.

15. От дома до ларька Валера шёл со скоростью 6 км/час, а от ларька до дома – со скоростью 2 км/час. Получается, что каждый километр пути на этом участке он прошёл в обе стороны за

$$(1/6 + 1/2) = 2/3 \text{ часа.}$$

От ларька до рынка и обратно – от рынка до ларька – Валера шёл со скоростью 3 км/час, получается, что каждый километр пути на этом участке он прошёл в обе стороны за

$$(1/3 + 1/3) = 2/3 \text{ часа.}$$

Выходит, что на один километр на обоих участках пути Валера тратил одно и то же время! А всего за 1 час Валера прошёл таких «двойных» километров $1{:}(2/3) = 1{,}5$. А газетный ларёк может быть расположен в любой точке пути от дома до рынка, ответ от этого не зависит!

Ответ. 1,5 км.

16. В данном предложении не менее 7 и не более 10 цифр (если все пропущенные числа двузначны). Следовательно, каждая цифра «весит» не менее 10 %. Но тогда все пропущенные числа двузначны, а всего цифр – 10, причём каждая «весит» ровно 10 %. Получается, что все три пропущенных числа заканчиваются на 0. Но каждый из этих трёх нулей делится и на 2, и на 3, поэтому (с учётом уже имеющихся в предложении двух двоек и двух троек) понимаем, что первые два пропущенных числа лежат между 50 и 80, а третье – между 30 и 60.

Нас не просят найти все решения. Но дальнейший перебор возможностей не очень сложен, в результате находим два решения.

Ответ. «В этом предложении 70 % цифр делятся на 2, 60 % цифр делятся на 3, а 40 % цифр делятся и на 2, и на 3», или «В этом предложении 80 % цифр делятся на 2, 60 % цифр делятся на 3, а 40 % цифр делятся и на 2, и на 3».

17. Заметим, что и мама, и Вовочка закончат обед одновременно, ведь в противном случае, закончивший раньше присоединится ко второму и поможет ему. Вовочкина скорость поедания борща более чем в 3 раза превосходит мамину, торт он ест в 3 раза быстрее, чем мама, а плов они едят с одинаковой скоростью.

При распределении продуктов надо по возможности действовать так, чтобы каждый начинал еду с тех блюд, где его скорость относительно партнера наибольшая. Мама начинает с плова, а Вовочка – с борща. Съев за 7 минут весь борщ, Вовочка берётся за торт. Через минуту к нему присоединяется мама. Они вместе съедают оставшиеся 4/5 торта за 3 минуты, при этом Вовочка съест 3/5 торта, а мама – 1/5.

Ответ. 11 минут.

18. Пусть первоначально x крыс съели по y пачек печенья, тогда

$$y = \frac{33}{x}.$$

Так как на следующую ночь в погреб пришли не все крысы, а только 13 из них, то $x > 13$. Тогда оставшихся пачек печенья было

$$\frac{13y}{3} = k,$$

откуда получаем, что

$$y = \frac{3k}{13}.$$

Из равенства

$$\frac{33}{x} = \frac{3k}{13}$$

следует, что $kx = 11\cdot 13$. Так как $x > 13$, то $x = 143$ и $k = 1$. Поэтому в погребе первоначально было

$$33 + 1 = 34$$

пачки печенья.

Ответ. 34.

19. Пусть расстояние между A и B по шоссе равно S км, а скорость Пети равна n км/ч. Используя эти переменные, составим уравнение:

$$\frac{S}{n} = \frac{S-6}{4} + 1.$$

Это приведёт нас к $2n = S(n - 4)$. Здесь мы не можем использовать соображения делимости, так как нам не дано, что S – целое число. Зато, присмотревшись к первому уравнению, мы можем заметить, что $\frac{S}{n} > 1$, поэтому $S > n$. Но тогда натуральное число $(n - 4) < 2$, откуда следует, что $n = 5$, $S = 10$.

Можно действовать иначе, обозначив время, затраченное Петей на путь из пункта A в пункт B, через t часов. Тогда $tn = 4(t - 1) + 1$, откуда получаем, что $t(n - 4) = 2$. Так как по условию $t > 1$, то натуральное число $(n - 4) < 2$, откуда следует, что $n = 5$, $t = 2$ и $S = 10$.

Заметим, что уравнение

$$t(n - 4) = 2$$

можно получить, рассуждая следующим образом: так как путь по тропинке короче пути по шоссе на 6 км, то за время t Вася прошёл бы $(S - 2)$ км, поэтому $t(n - 4) = 2$.

Ответ. 10 км ($n = 5$).

20. Пусть собственная скорость моторной лодки x км/ч, а скорость течения реки – y км/ч. Сначала разберём случай, когда река течёт от A к B. Пусть суммарные время движения по течению (в часах) и путь (в км), пройденный в этом направлении, равны t_1 и S_1 соответственно, а суммарные время движения и пройденный путь против течения равны t_2 и S_2. Тогда

$$S_1 + S_2 = 30,$$
$$S_1 - S_2 = 6,$$

откуда находим, что $S_1 = 18$ и $S_2 = 12$. Тогда

$$(x + y)\cdot t_1 = 18,$$
$$(x - y)\cdot t_2 = 12.$$

По условию задачи $1 \le t_1 \le 1{,}5$. Ограничения на $t_2 = 2{,}5 - t_1$ такие же. Но тогда

$$12 \le x + y \le 18,$$
$$8 \le x - y \le 12.$$

Вычитая неравенства, получаем

$$0 \le 2y \le 10, \text{ или } 0 \le y \le 5.$$

Итак, $y_{max} = 5$, тогда при $t_1 = 1$ и $x = 13$ выполняются все условия задачи.

Если же река течёт от B к A, то $S_1 + S_2 = 30$, а $S_2 - S_1 = 6$. Действуя далее, как в первом случае, мы получаем отрицательные значения для скорости течения реки. Этот случай невозможен.

Ответ. От A к B; 5 км/ч.