Гавриленко Галина Юрьевна
Учитель математики МБОУ
«Физико-математический лицей»,
г. Сергиев Посад, Московская область.

Замечательная комбинация правильных многоугольников

Исследовательские задачи в школах почти не используются. А между тем они очень полезны и вполне доступны для работы со школьниками.

В книге [1] представлены интересные геометрические задачи, которые были известны более двухсот лет назад. Однако до сих пор находятся всё новые обобщения этих задач и следствия из них.

Статья посвящена циклу теорем, связанных с комбинациями правильных многоугольников. В качестве самостоятельной исследовательской работы школьникам предлагается следующая серия задач.

Задача 1. [1] Если на каждой стороне произвольного треугольника построить по равностороннему треугольнику, то треугольник с вершинами в центрах равносторонних треугольников тоже равносторонний (рис. 1).

Задача 2. [1] Центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма, лежат в вершинах квадрата (рис. 2).

Задача 3. Пусть на сторонах параллелограмма внешним (рис. 3) или внутренним (рис. 4) образом построены квадраты. Тогда середины

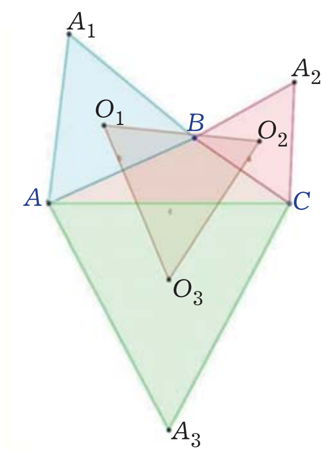

Рис. 1

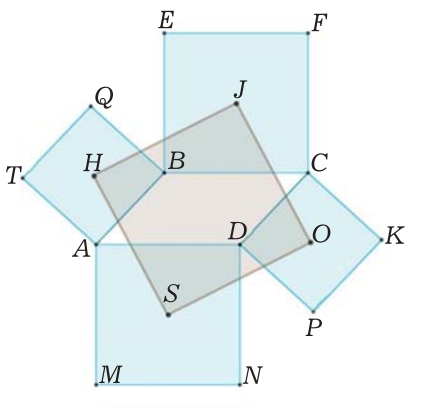

Рис. 2

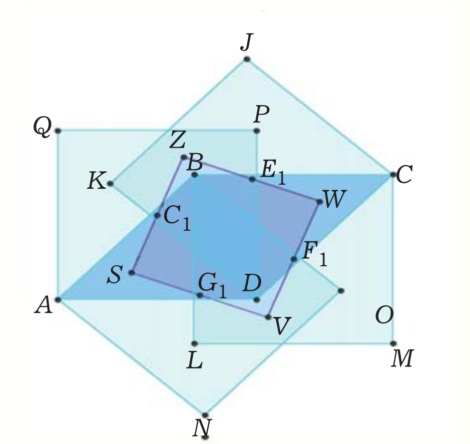

Рис. 4

отрезков, соединяющих соседние вершины квадратов, лежат в вершинах квадрата.

Доказательство данной теоремы можно провести различными способами. Эти методы доступны любому девятикласснику и могут быть использованы на уроках геометрии как один из достойных примеров применения известных подходов при решении новой задачи.

Доказательство. На сторонах параллелограмма $ABCD$ извне построим квадраты $BEFC$, $CKPD$, $DNMA$,

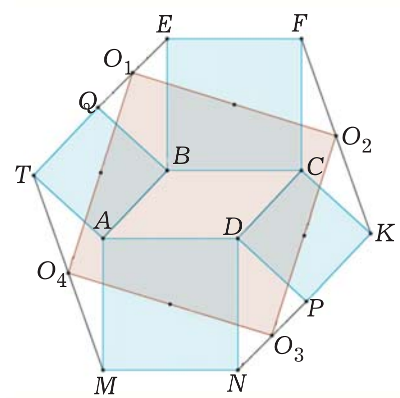

Рис. 3

$ATQB$. Отметим точки O_1, O_2, O_3, O_4 – середины соответствующих отрезков QE, FK, PN и MT (рис. 5).

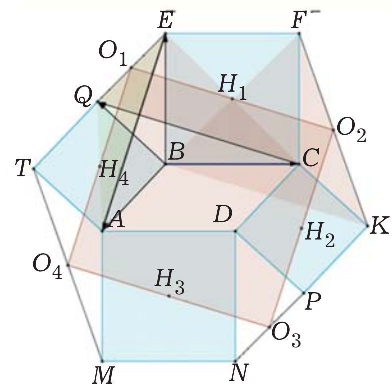

Рис. 5

При повороте вокруг точки B на угол 90° против часовой стрелки вектор $\overrightarrow{BC}$ переходит в вектор $\overrightarrow{BE}$, а $\overrightarrow{BQ}$ – в $\overrightarrow{BA}$. Поэтому вектор $\overrightarrow{CQ}$ переходит в вектор $\overrightarrow{EA}$, значит, $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{EA}$, $\left|\overrightarrow{CQ}\right| = \left|\overrightarrow{EA}\right|$ (вместо $\left|\overrightarrow{CQ}\right| = \overrightarrow{EA}$) и $\angle(\overrightarrow{CQ};\overrightarrow{EA}) = 90^\circ$.

Пусть H_1 – точка пересечения диагоналей квадрата $BEFC$, тогда H_1 – середина EC и BF. Аналогично точка H_2 – середина DK и CP, точка H_3 – середина NA и MD, точка H_4 – середина QA и TB.

Так как O_1H_1 – средняя линия $\triangle QEC$, то $O_1H_1 = \frac{1}{2}CQ$ и $O_1H_1 \parallel CQ$.

Так как O_1H_4 – средняя линия $\triangle AQE$, то $O_1H_4 = \frac{1}{2}EA$ и $O_1H_4 \parallel EA$. Таким образом, $O_1H_1 = O_1H_4$ и $O_1H_1 \perp O_1H_4$.

Аналогично H_1O_2 – средняя линия $\triangle BFK$, поэтому $H_1O_2 = \frac{1}{2}BK$ и $H_1O_2 \parallel BK$.

Так как $\angle QBE = 180^\circ - \angle ABC = 180 - (180^\circ - \angle BCD) = \angle BCD$, то $\angle QBC = \angle BCK$, следовательно, $\triangle BQC = \triangle BCK$ (по двум сторонам и углу между ними); из равенства треугольников следует $CQ = BK$. В четырёхугольнике $QCKB$ противолежащие стороны попарно равны, значит, он является параллелограммом по признаку (вместо по признаку параллелограмма является параллелограммом). Отсюда $CQ \parallel BK$. Тогда $O_1H_1 = H_1O_2$ и $O_1H_1 \parallel H_1O_2$. Так как O_1H_1 и H_1O_2 имеют общую точку, то они лежат на одной прямой.

Аналогично $O_1O_4 = 2O_1H_4$ и точки O_1, O_4, H_4 лежат на одной прямой.

Так как $O_1H_1 = O_1H_4$, то $O_1O_4 = O_1O_2$ и $O_1O_4 \perp O_1O_2$.

Аналогичные утверждения доказываются и для остальных сторон четырехугольника, значит, $O_1O_2O_3O_4$ – квадрат. Теорема доказана.

Читатель может самостоятельно провести доказательство данной теоремы координатным методом при введении прямоугольной системы координат так, чтобы её начало совпадало с точкой A, а ось Ox проходила через прямую AD (рис. 6).

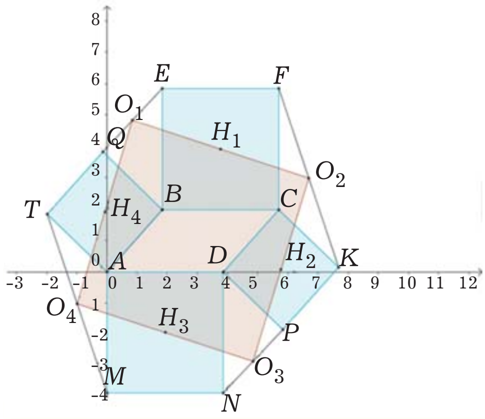

Рис. 6

Задача 4. [2] Пусть на сторонах выпуклого четырёхугольника вне его построены квадраты. Тогда расстояния между центрами квадратов, построенных на противоположных сторонах, равны.

Задача 5. На сторонах произвольного четырёхугольника (выпуклого (рис. 7) или с самопересечением (рис. 8)) построим квадраты. Если середины отрезков, соединяющих соседние вершины квадратов, соединить через одну, то полученные отрезки будут равны и перпендикулярны.

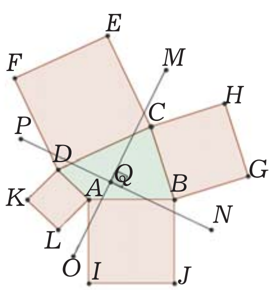

Рис. 7

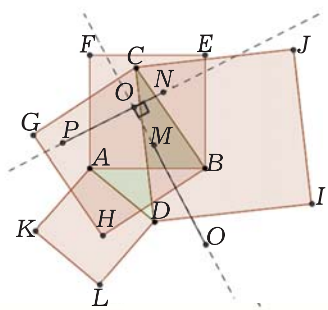

Рис. 8

Доказательство. Введём обозначения: $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$; $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{CB}=\vec{d}$. Тогда $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$; $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{d}$.

Обозначим буквой R поворот на угол 90^0 по часовой стрелке. Заметим, что

$$R^2\vec{x}=-\vec{x},$$

$$R^3\vec{x}=-R\vec{x}$$

для любого вектора $\vec{x}$. Тогда

$$\overrightarrow{NP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KF}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BJ}\right)+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DF}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BJ}-\overrightarrow{BJ}+$$

$$+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{KD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}=$$

$$=\frac{1}{2}R\vec{d}-\frac{1}{2}R^3\vec{a}+\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}R\vec{b}+\frac{1}{2}R^3\vec{c}=$$

$$=-\frac{1}{2}R\vec{a}-\frac{1}{2}R\vec{b}-\frac{1}{2}R\vec{c}+\frac{1}{2}R\vec{a}+\vec{a}+$$

$$+\vec{b}-\frac{1}{2}R\vec{b}-\frac{1}{2}R\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}-R\vec{b}-R\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AL}\right)-\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{EC}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CH}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AD}+$$

$$+\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CH}=\frac{1}{2}R\vec{a}-\frac{1}{2}R^3\vec{b}+\vec{b}+$$

$$+\vec{c}-\frac{1}{2}R\vec{c}+\frac{1}{2}R^3\vec{d}=\frac{1}{2}R\vec{a}+\frac{1}{2}R\vec{b}+\vec{b}+$$

$$+\vec{c}-\frac{1}{2}R\vec{c}+\frac{1}{2}R\vec{a}+\frac{1}{2}R\vec{b}+\frac{1}{2}R\vec{c}=$$

$$=R\vec{a}+R\vec{b}+\vec{b}+\vec{c}=R(\vec{a}+\vec{b}-R\vec{b}-R\vec{c}).$$

Итак, $\overrightarrow{OM}=R\left(\overrightarrow{NP}\right)$, откуда $OM=NP$ и $\angle(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{NP})=90^0$.

Теорема доказана.

Читатель может самостоятельно попробовать решить данную задачу, если квадраты построены на сторонах четырёхугольника внутренним образом.

Эти задачи уникальны и после своего более чем двухвекового существования получают дальнейшее неожиданное продолжение. Исследовательская работа продолжается!

Список литературы

1. *Шклярский Д.О, Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч. 2. Геометрия (Планиметрия). – 1-е изд. – М.: ГТТИ, 1952. – 380с. (Выпуск 2 серии «Библиотека математического кружка».) – С. 30.

2. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия. В 2 т. – Т.1: Планиметрия, преобразования плоскости. М.: МЦНМО, 2004. – 312 с. – С. 88.