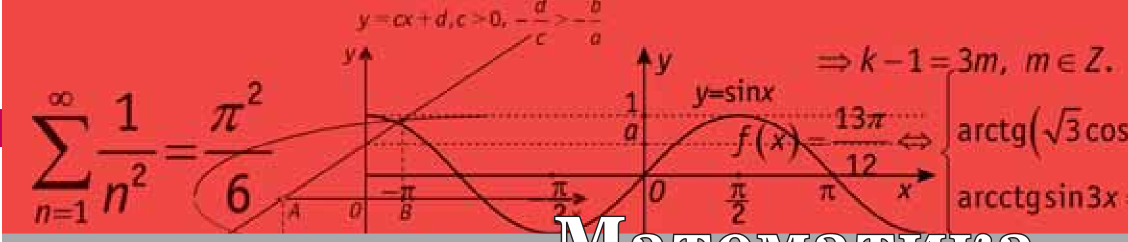
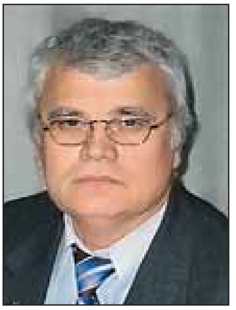


Диесперов Вадим Николаевич
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики МФТИ и кафедры высшей математики Высшей школы экономики, дважды Соросовский учитель, учитель высшей категории.



Мирошин Владимир Васильевич
Учитель гимназии № 1522 г. Москвы, старший преподаватель кафедры математического анализа Московского городского педагогического университета, закончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. Кандидат педагогических наук, почётный работник образования, 25 лет работает в школе. Автор пособий по подготовке к ЕГЭ по математике.

О разнообразии методов решения задач с модулями и параметром

В статье рассматриваются решения некоторых задач С5 тренировочных вариантов ЕГЭ-2010, приведённых в брошюрах [1]–[3]. Рассматриваемые задачи относятся к темам, традиционно считающимся трудными – задачам, содержащим выражения, зависящие от параметра и стоящим под знаком модуля.

Решение задач, которые содержат несколько модулей с параметром, при помощи раскрытия модулей на интервалах представляет собой, как правило, весьма трудоёмкий процесс. Поэтому важно предложить разнообразные методы решения задач, позволяющие упростить процесс решения и тем самым существенно сэкономить время. Особенно это важно при решении задач группы С при сдаче Единого государственного экзамена. Выбор наиболее эффективного с этой точки зрения метода решения зависит от предлагаемой задачи, от качества подготовки учащегося и, конечно, от знания самих методов. Статья носит методический характер. Ниже рассмотрены задачи, предложенные в [1]–[3]. При их решении будут использованы решения двух неравенств, содержащих функцию под знаком модуля, а именно: неравенство вида $|f(x)|<g(x)$ и неравенство вида $|f(x)|>g(x)$. Заметим, что вместо знаков строгого неравенства могут стоять соответствующие знаки нестрогих неравенств. Неравенства, содержащие выражение, стоящее под знаком модуля, можно заменить в зависимости от их вида либо на систему, либо на совокупность неравенств:

$$|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>-g(x), \end{cases} \qquad (H_1)$$

$$|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x), \\ f(x)<-g(x). \end{array}\right. \qquad (H_2)$$

Задача 1 ([1]). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3x+|2x+|a-x||=$ $=7|x+2|$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Как отмечалось выше, метод последовательного раскрытия модулей трудоёмок и требует составления достаточно сложных логических конструкций. Однако в простейших случаях, когда под знаками модуля стоят линейные двучлены, реализация этого метода может быть существенно упрощена построением графиков.

Действительно, графиком функции

$$y=|k_1x-p_1|\pm|k_2x-p_2|\pm\ldots\pm$$
$$\pm|k_nx-p_n|+k_0x+p_0$$

является непрерывная кривая, состоящая из отрезков прямых и двух лучей, которую будем называть ломаной. При этом, используя свойство $|a|=|-a|$, можно переписать функцию таким образом, чтобы все коэффициенты $k_1, k_2,\ldots, k_n$ были положительны. Для построения ломаной достаточно знать её значения в «вершинах», т. е. в точках $x=\dfrac{p_1}{k_1}$, $x=\dfrac{p_2}{k_2},\ldots, x=\dfrac{p_n}{k_n}$, и её поведение левее меньшей из этих точек, а также правее большей из них [4].

Запишем уравнение в виде $3x+|2x+|x-a||-7|x+2|=0$. При любом варианте раскрытия модулей и приведения подобных членов графиком функции, стоящей в левой части уравнения, на соответствующих промежутках будет некоторая линейная функция вида $y=kx+p$. Следовательно, графиком функции на всей числовой оси будет ломаная. Точки излома функции, кроме $x=-2$, зависят от параметра a. Заметим, что коэффициент k любого звена ломаной, из которых состоит график функции при $x\in(-\infty;\,-2]$, подчиняется оценке: $k=3\pm2\pm1+7>$ $>10-3>0$. Поэтому на этом промежутке функция возрастает. На промежутке $[-2\,;+\infty)$ функция убывает, так как $k=3\pm2\pm1-7<-4+3<0$.

Следовательно, в точке $x=-2$ функция имеет максимум. Для того чтобы уравнение имело решение, необходимо и достаточно, чтобы значение функции в этой точке было не меньше нуля. Искомые значения параметра будут, таким образом, задаваться неравенствами, которые в силу формулы (H_2) примут вид:

$$-6+|-4+|a+2||\geq0 \Leftrightarrow ||a+2|-4|\geq6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |a+2|-4\geq6, \\ 4-|a+2|\geq6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |a+2|\geq10, \\ |a+2|\leq-2. \end{array}\right.$$

Второе неравенство совокупности не имеет решений, поэтому искомые значения параметра являются решением первого неравенства совокупности $|a+2|\geq10$.

Ответ: $(-\infty;\ -12]\cup[8;\ +\infty)$.

Задача 2 ([1]). Найти все значения параметра a такие, что для любого x выполняется неравенство

$$|x+1|+2|x+a|>3-2x.$$

Решение 1. Перепишем неравенство в виде $|x+1|+2|x+a|-3+2x>0$ и введём функцию $f(x)=|x+1|+$

$+2|x+a|-3+2x$.

Решение задачи основано на алгоритме нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке $[a;\ b]$, а именно: если функция дифференцируема на интервале $(a;\ b)$ за исключением конечного числа точек, то она принимает свои наибольшее и наименьшее значения либо в критических точках внутри интервала, либо на концах отрезка.

Критическими точками в рассматриваемых ниже задачах будут либо точки излома графика функции (в них производная функции не существует, как например, в точке 0 у функции $y=|x|$), либо стационарные точки (в них производная равна нулю).

Критическими точками функции $f(x)$ являются $x=-a$, $x=-1$ (они являются точками излома графика функции). На интервале $(-\infty; x_0)$, где $x_0=\min\{-1;\ -a\}$, функция $f(x)= = -x-1-2x-2a-3+2x = -x-2a-4$ убывает, а на интервале $(x_1;\ +\infty)$, где $x_1=\max\{-1;\ -a\}$, функция $f(x)= =x+1+2x+2a-3+2x=5x+2a-2$ возрастает. Рассматриваемая функция непрерывная. На отрезке $[x_0;\ x_1]$ она линейная, поэтому своё наименьшее значение она будет принимать на одном из его концов. Заметим, что концы отрезка являются критическими точками данной функции. Наименьшее значение рассматриваемой нами функции будет больше 0, если числа $f(-a)$, $f(-1)$ одновременно будут больше 0.

Найдём значения параметра a, при которых эти условия удовлетворяются:

$$\begin{cases} f(-1)>0, \\ f(-a)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|a-1|-5>0, \\ |a-1|-2a-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a>3{,}5, \\ a<-1{,}5, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a<-4, \\ a<-2/3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a<-1{,}5.$$

В случае большего количества слагаемых в неравенстве критические точки будут расположены внутри соответствующего отрезка. Тогда наименьшее значение функции будет достигаться либо в критических точках внутри отрезка $[x_0;\ x_1]$, либо на его концах.

Ответ: $(-\infty;\ -1{,}5)$.

Решение 2. Перепишем исходное неравенство в виде:

$$2|x+a|>3-2x-|x+1|.$$

Рассмотрим функции: $y_1(x)= =2|x+a|$ и $y_2(x)=3-2x-|x+1|$. Мы должны найти такие значения параметра a, при которых неравенство $y_1(x)>y_2(x)$ справедливо для всех $x\in R$. Раскрывая модуль по определению, функцию $y_2(x)$ представим в виде

$$y_2(x)=\begin{cases} 4-x, & x\le -1, \\ 2-3x, & x>-1. \end{cases}$$

Построим теперь график функции $y_1(x)=2|x+a|$ при каком-либо значении параметра a, например, при $a=-5$ (рис. 1). Точка излома графика функции имеет координаты $(5; 0)$, а в общем случае $(-a;\ 0)$. Графики функций изображены на рис. 1. Из рисунка видно, что $y_1(x)>y_2(x)$, если левая ветвь функции $y_1(x)$ лежит правее точки излома $(-1;\ 5)$ графика функции $y_2(x)$. Подставляя координаты $(-1;\ 5)$ в уравнение $y(x)=-2x-2a$ (левая ветвь функции $y_1(x)$), находим, что $a=-1{,}5$. При этом значении параметра график функции $y_1(x)$ проходит через точку излома графика функции $y_2(x)$. Значит, при $a<-1{,}5$ мы имеем $y_1(x)>y_2(x)$ для любого $x\in R$.

Ответ: $(-\infty;\ -1{,}5)$.

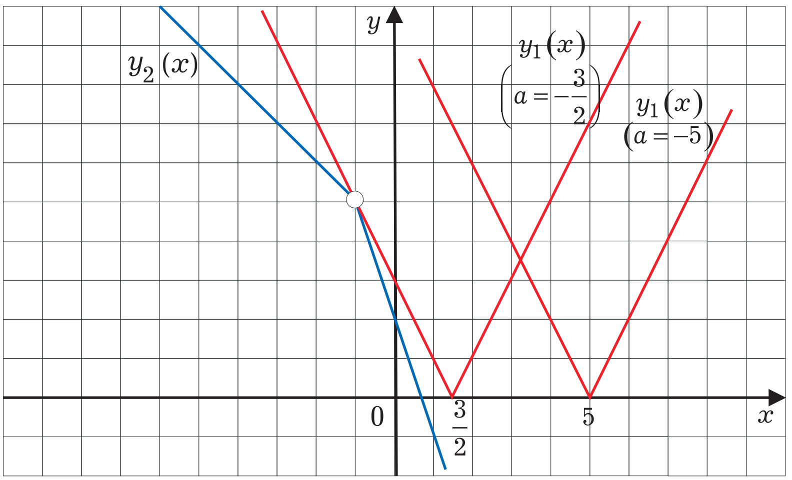


Рис. 1

Решение 3. Используя формулу (H_2) два раза, получим:

$$|x+1|+2|x+a|>3-2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1+2x+2a>3-2x, \\ -x-1+2x+2a>3-2x, \\ x+1-2x-2a>3-2x, \\ -x-1-2x-2a>3-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x>2-2a, \\ 3x>4-2a, \\ x>2+2a, \\ x<-4-2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\dfrac{2-2a}{5}, \\ x>\dfrac{4-2a}{3}, \\ x>2+2a, \\ x<-4-2a. \end{array}\right.$$

Совокупность неравенств будет выполнена для любого значения переменной, если объединение их решений даст всё множество действительных чисел.

Объединение решений первых трёх неравенств есть интервал вида $(a_0;+\infty)$, где

$$a_0=\min\left\{\frac{2-2a}{5};\ \frac{4-2a}{3};\ 2+2a\right\},$$

а решение четвёртого – интервал $(-\infty;-4-2a)$. Поэтому объединение решений первых трёх и четвёртого неравенств будет всем множеством действительных чисел, если $-4-2a$ будет больше хотя бы одного из трёх чисел: $\frac{2-2a}{5}$; $\frac{4-2a}{3}$; $2+2a$. Поэтому искомые значения параметра будут задаваться совокупностью неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2-2a}{5}<-4-2a, \\ \dfrac{4-2a}{3}<-4-2a, \\ 2+2a<-4-2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-\dfrac{11}{4}, \\ a<-4, \\ a<-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow a<-\frac{3}{2}.$$

Ответ: $(-\infty;-1{,}5)$.

Задача 3 ([1]). Найдите все такие a, что наименьшее значение функции $f(x)=4|x-a|+\left|x^2+2x-3\right|$ меньше 4.

Решение 1. Рассмотрим функцию

$$f(x)=4|x-a|+\left|x^2+2x-3\right|.$$

Её график представляет собой объединение кусков парабол, состыкованных друг с другом в точках излома, а именно: $x=a$; -3; 1. Поэтому критическими точками функции являются $x=a$; $x=-3$; $x=1$ и, может быть, стационарные точки квадратичных функций

$$y=\pm\left(x^2+6x-4a-3\right),$$

$$y=\pm\left(x^2-2x+4a-3\right),$$

в которых производная функций равна нулю. Но в данном случае они совпадают с точками $x=-3$, $x=1$. Т. к. $x=1$ – абсцисса вершины параболы, которая является графиком функции $f(x)=x^2-2x+4a-3$, то на интервале $(-\infty; x_0)$, где $x_0=$ $=\min\{-3;\ a\}$, эта функция убывает. Аналогично, на интервале $(x_1;\ +\infty)$, где $x_1=\max\{1;\ a\}$, функция $f(x)=$ $=x^2+6x-4a-3$ возрастает.

Согласно алгоритму наименьшее значение функции будет меньше 4, если хотя бы одно из её значений в точках $f(a)$, $f(-3)$, $f(1)$ будет меньше 4. Получим совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\left|a^2+2a-3\right|<4,\\ 4|a+3|<4,\\ 4|a-1|<4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4<a^2+2a-3<4,\\ -1<a+3<1,\\ -1<a-1<1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+2a-7<0,\\ a^2+2a+1>0,\end{cases}\\ -4<a<-2,\\ 0<a<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4<a<-1,\\ -1<a<2.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-4;\ -1)\cup(-1;\ 2)$.

Решение 2. Перефразируем условие задачи: найти все такие a, при которых существует хотя бы одно решение неравенства

$$f(x)=4|x-a|+\left|x^2+2x-3\right|<4$$

Очевидно, эта формулировка эквивалентна исходной.

Рассмотрим функции $y_1(x)=$ $=4|x-a|$ и $y_2(x)=4-\left|x^2+2x-3\right|$. Необходимо найти такие значения параметра a, при которых неравенство $y_1(x)<y_2(x)$ выполнялось хотя бы при одном значении x.

Функция $y_2(x)=4-\left|x^2+2x-3\right|$ не зависит от параметра a, и её график нетрудно изобразить (рис. 2). На рис. 2 также изображены некоторые особенно важные положения графика функции $y_1(x)$. При $x=$

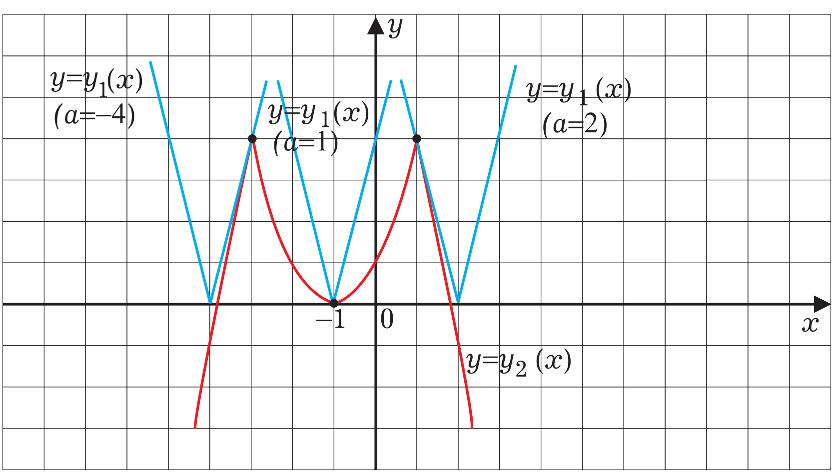


Рис. 2

$=-1-2\sqrt{2}$; -1; $-1+2\sqrt{2}$ значения функции $y_2(x)=0$.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ таковы, что при некотором значении параметра a график функции $y_1(x)$ касается графика функции $y_2(x)$ при некотором $x\in(-\infty;-3]$. Действительно, из условий равенства значений функций и их производных в точке касания получим:

$$\begin{cases}4(x-a)=-x^2-2x+7,\\ 4=-2x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4,\\ x=-3.\end{cases}$$

Если рассмотреть только квадратное уравнение системы, то можно заметить, что при $a=-4$ его дискриминант равен нулю. Следовательно, графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ при $a=-4$ пересекаются в одной точке $(-3;\ 4)$. При $a<-4$ дискриминант уравнения становится отрицательным. Мы видим, что при $a\in(-\infty;-4)$ и всех $x\in R$ справедливо неравенство $y_1(x)>y_2(x)$. Если $a\in(-4;-1)$, то существуют x, при которых выполняется неравенство $y_1(x)<y_2(x)$. При $a=-1$ мы имеем $y_1(-1)=y_2(-1)$. При $x\neq-1$ справедливо неравенство $y_1(x)>y_2(x)$.

Если $a\in(-1;\ 2)$, то также существуют x, для которых $y_1(x)<y_2(x)$.

При $a=2$ графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ имеют общую точку, в которой они касаются. Действительно:

$$\begin{cases}-4(x-a)=-x^2-2x+7,\\ 4=-2x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2,\\ x=1.\end{cases}$$

Следовательно, при $a>2$ имеет место неравенство $y_1(x)>y_2(x)$, $x\in R$.

Ответ: $(-4;-1)\cup(-1;\ 2)$.

Решение 3. Наименьшее значение функции $f(x)=4|x-a|+\left|x^2+2x-3\right|$ меньше 4, если неравенство

$$4|x-a|+\left|x^2+2x-3\right|<4$$

имеет хотя бы одно решение. Раскрывая модули и используя формулу (*Н1*), получим:

$$4|x-a|+\left|x^2+2x-3\right|<4\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2+6x-4a-7<0,\\ x^2-2x+4a-7<0,\\ x^2-2x+4a+1>0,\\ x^2+6x-4a+1>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4a>(x+3)^2-16,\\ 4a<-(x-1)^2+8,\\ 4a>-(x-1)^2,\\ 4a<(x+3)^2-8.\end{array}\right.$$

Построим ГМТ (геометрическое место точек), определяемое системой неравенств на плоскости $(x;y)$, где $y=4a$. Множества точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств, заштрихованы на рис. 3. Красными пунктирными линиями изображены графики квадратичных функций $y=-(x-1)^2$, $y=-(x-1)^2+8$, а синими – квадратичных функций $y=(x+3)^2-8$, $y=(x+1)^2-16$.

Построив ГМТ, найдём все значения параметра, при каждом из которых прямая $y=4a$ имеет с ним хотя бы одну общую точку. Получим, что

$$\left[\begin{array}{l}-16<4a<-4,\\ -4<4a<8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4<a<-1,\\ -1<a<2.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-4;\ -1)\cup(-1;\ 2)$.

Графический способ является достаточно простым и хорошо себя показал при решении рассмотренных выше задач. Отличительной их чертой являлась возможность выделить функцию, не содержащую параметра. Приведём

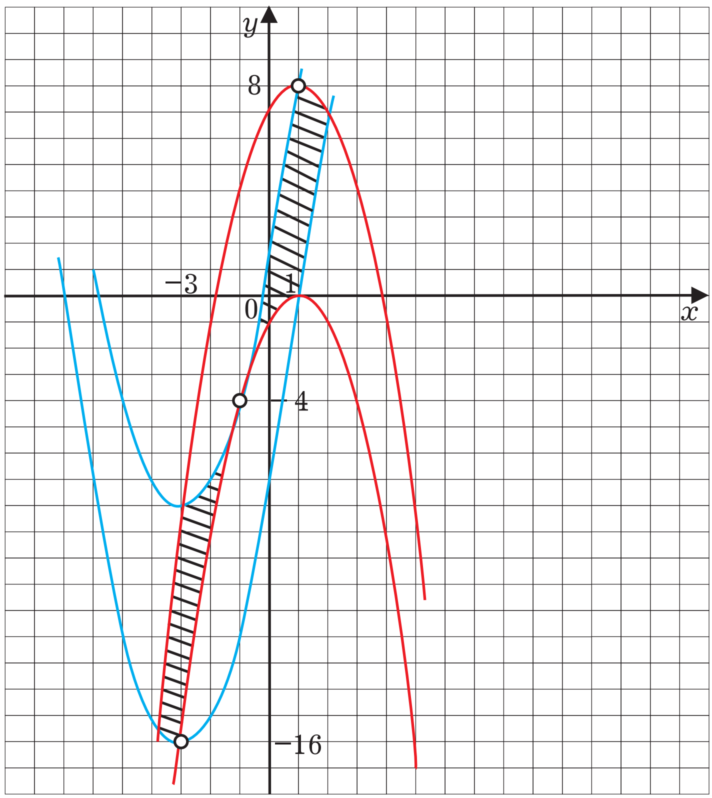


Рис. 3

задачу, решение которой с помощью графического способа затруднительно.

Задача 4 ([2]). Найти все такие a, что наименьшее значение функции

$$f(x)=\left|x^2-(1+a)x+a\right|+(a-1)\left|x+1\right|$$

меньше 2.

Решение. Графический способ решения этой задачи затруднителен, так как параметр входит в оба слагаемых функции. Заметим, что квадратичная функция $y=x^2-$ $-(1+a)x+a$ имеет нули $x=1$, $x=a$. При $a=1$ функция $f(x)=(x-1)^2$. Её наименьшее значение равно нулю и, значит, меньше 2. Если $a\neq 1$, то график функции состоит из кусков парабол

$$y=\pm\left(x^2-2x+2a-1\right),$$

$$y=\pm\left(x^2-2ax+1\right),$$

состыкованных в точках

$$x=-1,\quad x=1,\quad x=a.$$

Так как функция

$$f(x)=\left|x^2-(1+a)x+a\right|+(a-1)\left|x+1\right|,$$

то точки $x=-1$, $x=1$, $x=a$, $(a\neq 1)$ являются точками излома графика функции. Производная в таких точках не существует, и поэтому $x=-1$, $x=1$, $x=a$ – критические точки функции.

На интервале $(-\infty;\ x_0)$, где $x_0=\min\{-1;\ a\}$, квадратичная функция $f(x)=x^2-2ax+1$ убывает. На интервале $(x_1;\ +\infty)$, где $x_1=\max\{1;\ a\}$, функция $f(x)=x^2-2x+2a-1$ возрастает.

Критическими точками функции являются точки $x=-1,\ x=1,\ x=a$ – точки излома графика функции и стационарные точки квадратичных функций

$$y=\pm\left(x^2-2x+2a-1\right),$$

$$y=\pm\left(x^2-2ax+1\right).$$

Стационарными точками квадратичных функций, в которых производная обращается в нуль, являются вершины соответствующих парабол: $x=a,\ x=1$. Согласно алгоритму нахождения наибольшего значения непрерывной функции на отрезке необходимо найти значения функции в критических точках и на его концах, т. е. $f(a),\ f(-1),\ f(1)$. Задача будет решена, если хотя бы одно из этих чисел будет меньше 2. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} f(-1)<2, \\ f(1)>2, \\ f(a)>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |a+1|<2, \\ a-1<1, \\ (a-1)|a+1|<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow a<2.$$

Ответ: $(-\infty;\ 2)$.

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2 \qquad (1)$$

имеет четыре решения (уравнение (1) приведено в [3]).

Решение 1. Параметр содержится в уравнении таким образом, что на первый взгляд применить графический метод затруднительно.

Если $a=0$, то $x=0$. Пусть $a\neq 0$. Произведём замену переменной $t=ax$ в уравнении (1) и запишем его в виде:

$$t^2+t=a(2t-1+|t-1|). \qquad (2)$$

Заметим, что $t=0$ при любом a является решением уравнения (2) (это означает, что $x=0$ – решение уравнения при любом a). Если ввести две функции, а именно:

$$y_1(t)=t^2+t,\quad y_2(t)=a(2t-1+|t-1|),$$

то уравнение (2) можно представить следующим образом: $y_1(t)=y_2(t)$. Таким образом, в результате замены переменной мы получили уравнение (2), в котором функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ простые и $y_1(t)$ не зависит от параметра. Поэтому его удобно решать графическим методом.

При $t<1$ функция $y_2(t)=at$ и уравнение (2) станет следующим:

$$t^2+t=at. \qquad (3)$$

Его решениями будут $t_1=0$ и $t_2=a-1$ $(a<2)$. Если $a=1$, то $t=0$ будет единственным решением уравнения (3). Графики функций $y_1(t)$, $y_2(t)$ касаются друг друга при $t=0$. Если $a<1$, то графики функций $y_1(t)$, $y_2(t)$ пересекаются только при значениях переменной $t_1=0$ и $t_2=a-1<0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $a\in(1;\ 2)$. Уравнение (3) имеет два решения. При этом $t_2\in(0;\ 1)$.

При $t\geq 1$ функция $y_2(t)=a(3t-2)$. Определим значение параметра a, при котором графики функций $y_1(t)$, $y_2(t)$ касаются друг друга.

Приравнивая значения функций и их производных, получим систему уравнений

$$\begin{cases} t^2+t=a(3t-2), \\ 2t+1=3a. \end{cases}$$

В результате её решения будем иметь

$$a^*=(7+2\sqrt{10})/9>1,\ t=(2+\sqrt{10})/3>1.$$

При $a\in(a^*;\ 2)$ первое уравнение системы имеет два решения.

На рис. 4 изображены графики функций $y_1(t)$, $y_2(t)$ при $a==5/3\in((7+2\sqrt{10})/9;\ 2)$.

При $a=2$ мы имеем $y_1(1)=y_2(1)=$

=2 и уравнение (2) имеет только одно решение, большее единицы. Аналогичный результат мы имеем также и при $a > 2$.

Замечание. При $t \geq 1$ уравнение (2) примет вид:

$$t^2 + (1-3a)t + 2a = 0. \qquad (4)$$

Нам нужно найти такие значения параметра a, при которых уравнение (4) имеет два решения, больших единицы. Согласно одной из теорем о расположении корней квадратного трёхчлена, это имеет место тогда и только тогда, когда (см. [5], [6]):

$$\begin{cases} D = 9a^2 - 14a + 1 > 0, \\ -(1-3a)/2 > 1, \\ f(1) > 0. \end{cases}$$

Откуда получаем

$$\frac{7+2\sqrt{10}}{9} < a < 2.$$

При этих значениях параметра, как мы знаем, уравнение (3) также имеет два решения.

Ответ: $(7+2\sqrt{10})/9 < a < 2$.

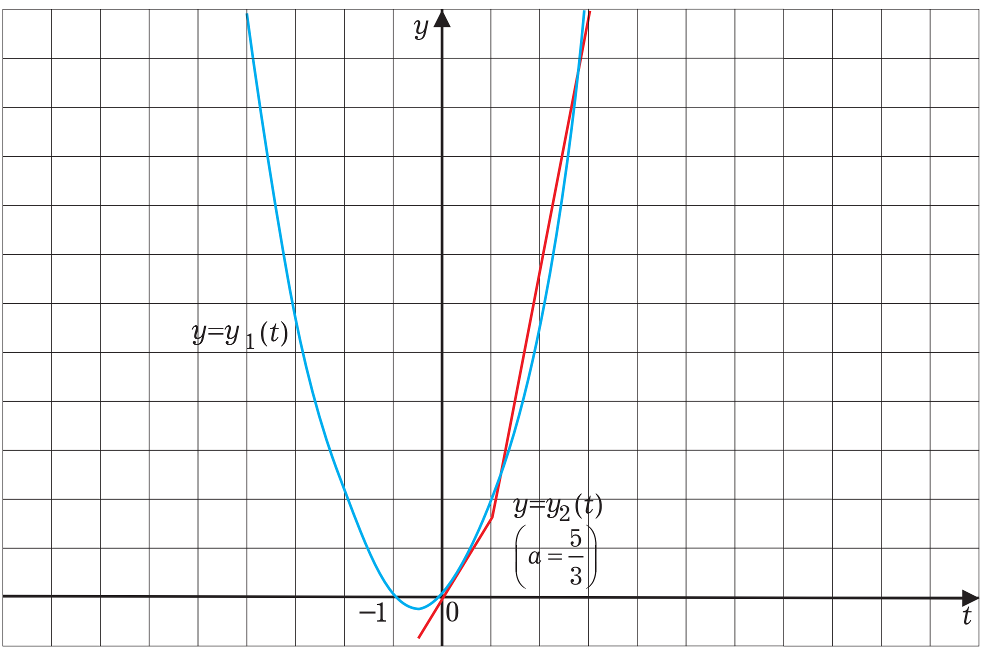


Рис. 4

Литература

1. Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ 2010: Математика. Общая редакция: А.Л. Семенов, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2010.

2. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания. Под редакцией А.Л. Семёнова, И.В. Ященко. – М.: «Экзамен», 2010.

3. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году / И.В. Ященко, С.А. Шестаков, П.И. Захаров. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.

4. *Мирошин В.В.* Решение задач с параметрами. Теория и практика. – М.: «Экзамен», 2009.

5. *Шабунин М.И.* Математика для поступающих в вузы. – М.: Бином, 2003.

6. *Ткачук В.В.* Математика – абитуриенту. М.: МЦНМО, 2000.