Башлыков Сергей Сергеевич
Кандидат технических наук, старший научный сотрудник МИФИ

Куркина Елена Сергеевна
Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова

Башлыкова Татьяна Ивановна
Учитель математики ГБОУ школа № 1245 г. Москвы

Задачи с тремя точками, лежащими на одной прямой

Известно, что через две точки можно провести прямую и при том только одну – это аксиома геометрии. Три точки могут образовать треугольник или лежать на одной прямой. В геометрии встречаются интересные красивые задачи, в которых надо доказать, что три точки принадлежат одной прямой. К ним относится, например, задача Монжа с тремя окружностями (см. ниже), предлагающаяся на школьных олимпиадах. В геометрии наиболее известны две теоремы, в которых получаются точки, лежащие на одной прямой. Это теорема Менелая и теорема Дезарга. Именно эти теоремы обычно используют для доказательства того факта, что три точки лежат на одной прямой. Предлагаем читателю ещё одну теорему, описывающую универсальный случай, в котором возникают три точки, лежащие на одной прямой. Но, прежде чем перейти к формулировке и доказательству этой теоремы напомним теоремы Менелая, Дезарга и Монжа.

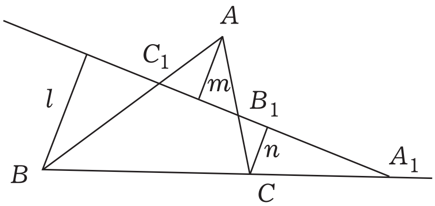
Теорема Менелая

Впервые теорема Менелая встречается в книге «Сферики» Менелая Александрийского, написанной в I в. н.э. Эта замечательная по красоте теорема даёт ключ к простому решению целого ряда задач, связанных с треугольниками, но, к сожалению, в последнее время «затерялась» в школьном курсе математики.

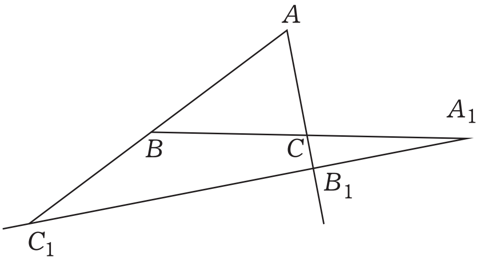
Теорема Менелая. *Пусть стороны AB и AC треугольника ΔABC (рис. 1а) (или их продолжения, рис. 1б) пересекает прямая, не параллельная стороне BC. Точки пересечения с прямой обозначим соответственно через C_1, B_1 и A_1. Тогда справедливо соотношение:*

$$\frac{AB_1}{B_1C}\frac{CA_1}{A_1B}\frac{BC_1}{C_1A}=1 \qquad (1)$$

Чтобы не запутаться, в каком порядке идут буквы в формуле (1), надо двигаться по контуру треугольника от вершины к точке пересечения с прямой, от точки пересечения – к следующей вершине и т.д.



а)



b)

Рис. 1

Доказательство: Из вершин треугольника проведем параллельные друг другу отрезки до пересечения с секущей прямой. Получим три пары подобных треугольников (рис. 1а). Из подобия треугольников следует:

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{m}{n},\ \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{n}{l},\ \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{l}{m}$$

Перемножая эти пропорции, получаем:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\frac{CA_1}{A_1B}\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{m}{n}\frac{n}{l}\frac{l}{m}=1.$$

Что и требовалось доказать.

Часто при решении задач используется теорема, обратная к теореме Менелая:

Обратная теорема Менелая. *Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах треугольника ΔABC или их продолжениях. Если выполняется равенство (1), то точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.*

Предлагаем читателю самостоятельно доказать эту теорему.

Указание. Доказательство проводится методом от противного. Надо провести прямую через точки A_1, B_1 и предположить, что точка C_1 не принадлежит этой прямой.

Теорема Менелая и обратная к ней дают простой и эффективный способ решения многих задач, в которых требуется доказать, что три точки лежат на одной прямой.

Теорема Монжа

Рассмотрим ещё одну красивейшую задачу геометрии, рассмотренную французским геометром Гаспаром Монжем. Г. Монж (1746–1818) был всестороннем образованным человеком и занимался не только геометрией, но и другими разделами математики, а также физикой и химией. В правительстве Наполеона он занимал пост морского министра и заведовал заводами по производству пороха и пушек. Ему принадлежат три известные теоремы, которые носят его имя. Мы здесь приведём одну из них, на которую будем ссылаться в дальнейшем.

Теорема Монжа о трёх окружностях и общих касательных: *Три произвольные окружности разных радиусов, расположены на плоскости так, что ни одна из них не лежит целиком в круге, ограниченном другой. К каждой паре окружностей проведены двойные внешние касательные, пересекающиеся в точках K, L, M. Требуется доказать, что точки K, L, M лежат на одной прямой (рис. 2).*

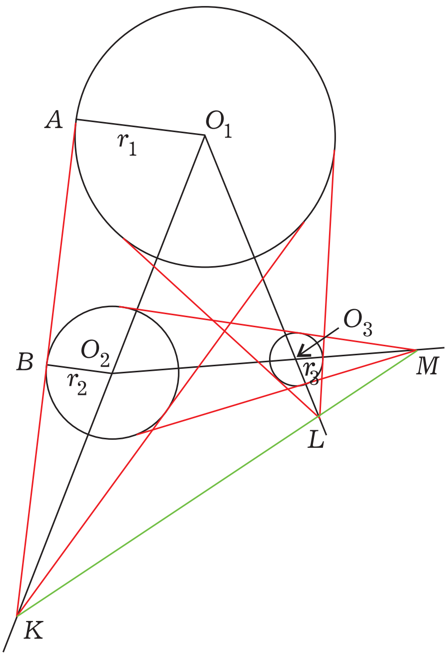


Рис. 2. Точки K, L, M – точки пересечения двойных внешних касательных в теореме Монжа

Доказательство. Обозначим центры окружностей через O_1, O_2 и O_3. Пусть их радиусы равны r_1, r_2 и r_3 соответственно. Проведем прямые, проходящие через каждую пару центров, получим треугольник $\Delta O_1O_2O_3$. Известно, что двойные внешние касательные пересекаются в точке, лежащей на прямой, соединяющие центры окружностей. Точка K лежит на прямой O_1O_2, точка L – на прямой O_1O_3, точка M – на прямой O_2O_3 (рис. 2). Таким образом, точки K, L, M лежат на продолжении сторон треугольника $\Delta O_1O_2O_3$. Рассмотрим окружности O_1, O_2 и проведём радиусы в точки касания, которые обозначим через A и B. Радиусы $O_1A = r_1$ и $O_2B = r_2$ – перпендикулярны общей касательной KAB. Из подобия прямоугольных треугольников ΔKO_1A и ΔKO_2B следует, что

$$\frac{O_1K}{KO_2}=\frac{AO_1}{BO_2}=\frac{r_1}{r_2}.$$

Аналогично имеем:

$$\frac{O_3L}{LO_1}=\frac{r_3}{r_1},\quad \frac{O_2M}{MO_3}=\frac{r_2}{r_3}.$$

Перемножая эти равенства, получаем:

$$\frac{O_1K}{KO_2}\frac{O_2M}{MO_3}\frac{O_3L}{LO_1}=\frac{r_1}{r_2}\frac{r_2}{r_3}\frac{r_3}{r_1}=1.$$

Из этого соотношения следует, что по теореме Менелая обратной, точки K, L, M лежат на одной прямой.

Теорема Дезарга

Известна ещё одна замечательная теорема, с помощью которой устанавливается, что три точки лежат на одной прямой. К сожалению, она не входит в школьную программу. Доказал её в 1636 г. французский геометр, архитектор и инженер Ж. Дезарг. Особую популярность теорема Дезарга приобрела спустя два столетия, когда от геометрии выделилась в самостоятельную науку проективная геометрия. Формулируется теорема так.

Теорема Дезарга. *Пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 (рис. 3) соединяющие соответственные вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, проходят через одну и ту же точку O. Тогда три точки попарного пересечения K, L, M соответственных сторон AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 лежат на одной прямой, если такие точки существуют.*

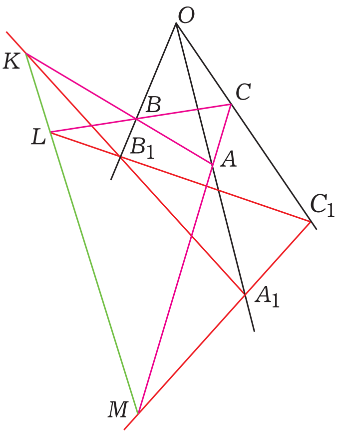


Рис. 3

Известно несколько способов доказательства теоремы Дезарга. Эта теорема будет доказана ниже с помощью обратной теоремы Менелая.

Справедлива и **обратная теорема Дезарга**: *Если точки попарного пересечения соответственных сторон двух треугольников лежат на одной прямой, то прямые соединяющие соответственные вершины этих треугольников, проходят через одну и ту же точку.*

Итак, чтобы доказать, что точки попарного пересечения сторон двух треугольников лежат на одной прямой, надо доказать, что соответствующие вершины лежат на трёх лучах, исходящих из одной точки.

Теорема Менелая и теорема Дезарга являются мощными инструментами доказательства факта принадлежности трёх точек одной прямой.

Теорема о четырёх окружностях

Нами было обнаружено следующее универсальное свойство трёх окружностей, которые касаются четвёртой. Возьмём окружность произвольного радиуса с центром в точке O. Начертим еще три произвольные окружности так, чтобы они касались исходной окружности. Неважно, касаются ли эти окружности исходной окружности снаружи или изнутри, пересекаются ли они, находится ли одна окружность в другой. Единственное требование, чтобы центры этих трёх окружностей не лежали на одной прямой. Обозначим их центры через O_1, O_2 и O_3, а точки касания – через A, B и C (рис. 4). Соединим центры трёх окружностей отрезками прямых, получим треугольник $\Delta O_1O_2O_3$. Соединим отрезками прямых точки касания, получим треугольник ΔABC. Справедлива следующая теорема.

Теорема о четырёх окружностях. *Пусть O_1, O_2 и O_3 – центры трёх произвольных окружностей образуют треугольник $\Delta O_1O_2O_3$. Пусть эти три окружности касаются четвёртой окружности в точках A, B и C. Точки касания образуют треугольник ΔABC. Если стороны треугольников пересекаются (не параллельны), то точки пересечения лежат на одной прямой.*

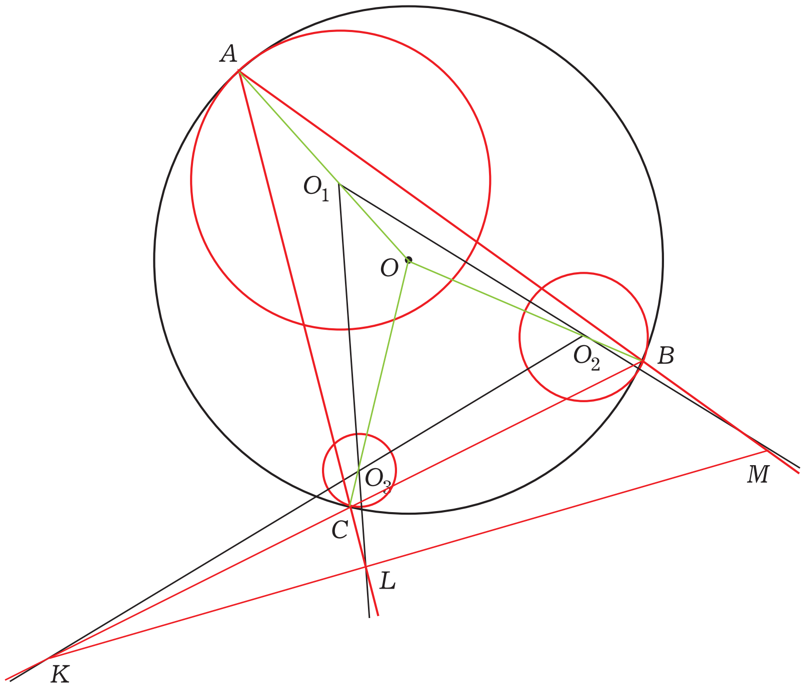


Рис. 4 Стороны треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC пересекаются в точках K, L, M, лежащих на одной прямой

Доказательство. Обозначим точки пересечения сторон треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC через K, L и M, как показано на рис. 4. В общем случае точки K, L и M, могут, как принадлежать сторонам этих треугольников, так и их продолжениям.

Доказательство теоремы состоит из двух частей. Сначала докажем, что вершины треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC лежат на лучах, исходящих из центра O, то есть на радиусах (или их продолжениях) окружности, которой касаются все три окружности. Действительно, соединим точки касания A, B и C с центром окружности O. Поскольку каждая точка касания является общей точкой касания для окружности с центром в точке O и еще одной из трёх окружностей, то центры O_1, O_2 и O_3 также принадлежат лучам OA, OB и OC. По теореме Дезарга можно утверждать, что стороны треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC пересекаются в точках, лежащих на одной прямой. Докажем это утверждение с помощью теоремы Менелая.

Рассмотрим три пары треугольников с вершинами в общем центре O: ΔO_1OO_2 и ΔAOB; ΔO_1OO_3 и ΔAOC; ΔO_2OO_3 и ΔBOC. Стороны треугольников O_1O_2, O_1O_3 и O_2O_3 будем рассматривать как секущие треугольников ΔAOB, ΔAOC и ΔBOC соответственно. Эти секущие пересекают либо две стороны соответствующего треугольника, либо их продолжения, а также продолжение его третьей стороны в точке M, L или K соответственно. Применяя теорему Менелая к каждой паре треугольников, получим соотношения:

Из ΔO_1OO_2 и ΔAOB $\dfrac{OO_1}{O_1A}\dfrac{AM}{MB}\dfrac{BO_2}{O_2O}=1.$

Из ΔO_1OO_3 и ΔAOC $\dfrac{OO_3}{O_3C}\dfrac{CL}{LA}\dfrac{AO_1}{O_1O}=1.$

Из ΔO_2OO_3 и ΔCOB $\dfrac{OO_2}{O_2B}\dfrac{BK}{KC}\dfrac{CO_3}{O_3O}=1.$

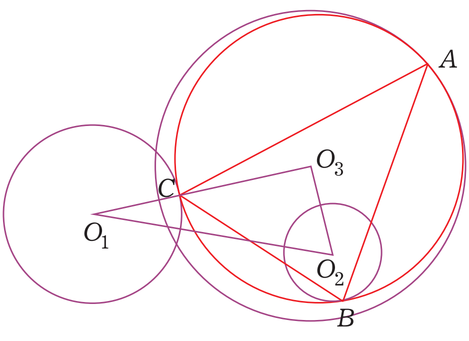
Перемножая эти три равенства и сокращая в числителе и знаменателе одинаковые отрезки, получим:

$$\frac{AM}{MB}\frac{CL}{LA}\frac{BK}{KC}=1. \qquad (2)$$

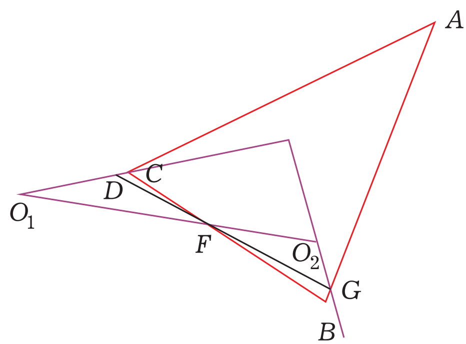
Соотношение (2) по обратной теореме Менелая означает, что и точки M, L, K, лежат на одной прямой. Таким образом, доказано, что точки пересечения сторон треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC лежат на одной прямой.

Отметим, что при доказательстве теоремы мы опирались на рис. 4, в котором три разные окружности не пересекаются и касаются изнутри их общей касательной окружности. При другом расположении окружностей, когда они касаются снаружи общей касательной, или когда они пересекаются, лежат одна в другой и т.д., доказательство будет аналогичным, поскольку доказательство опирается на два факта, которые остаются неизменными при любом расположении окружностей. Первый факт – это то, что вершины треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC лежат на лучах, исходящих из одной точки – центра O четвёртой окружности, которой касаются три другие окружности. Второй факт заключается в том, что в теореме Менелая не важно, пересекает ли секущая две стороны треугольника и продолжение третей, или – продолжения всех сторон треугольника.

На рис. 5 проиллюстрирован другой случай взаимного расположения окружностей. Здесь окружность с центром в точке O_2 (будем в дальнейшем говорить – окружность O_2) находится внутри окружности O_3 (рис. 5а), а окружность O_1 пересекает окружность O_3. Общая касательная окружность O находится внутри окружности с центром O_3 и касается ее изнутри в т. A. Окружность O_1 касается общей касательной окружности O снаружи в точке C, а окружность O_2 находится внутри и касается общей окружности O изнутри в точке B. Стороны треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC пересекаются в точках D, F, G, лежащих на сторонах треугольников (рис. 5б).



а)



б)

Рис. 5. Стороны треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC пересекаются в точках D, F, G

Связь теоремы о четырёх окружностях с теоремой Дезарга и теоремой Монжа

Связь теоремы о четырёх окружностях с теоремой Дезарга очевидна и уже упомянута выше. Докажем, что теорема об окружностях имеет непосредственную связь с задачей Монжа в тех случаях, когда три окружности удовлетворяют условию теоремы Монжа. (Теорема о четырёх окружностях шире, она справедлива и в тех случаях, когда нельзя к какой-либо паре окружностей провести двойные внешние касательные, например, когда одна окружность полностью лежит в другой).

Теорема о четырёх окружностях (продолжение). *Пусть три окружности O_1, O_2 и O_3, имеющие разные радиусы, расположены на плоскости так, что ни одна из них не лежит целиком в круге, ограниченном другой. Пусть эти три окружности касаются четвертой окружности O в точках A, B и C, и точки касания образуют треугольник ΔABC. Тогда стороны треугольников ΔABC и $\Delta O_1O_2O_3$ пересекаются в точках K, L, M, которые являются точками пересечения двойных внешних касательных. Эти точки лежат на одной прямой* (рис. 6).

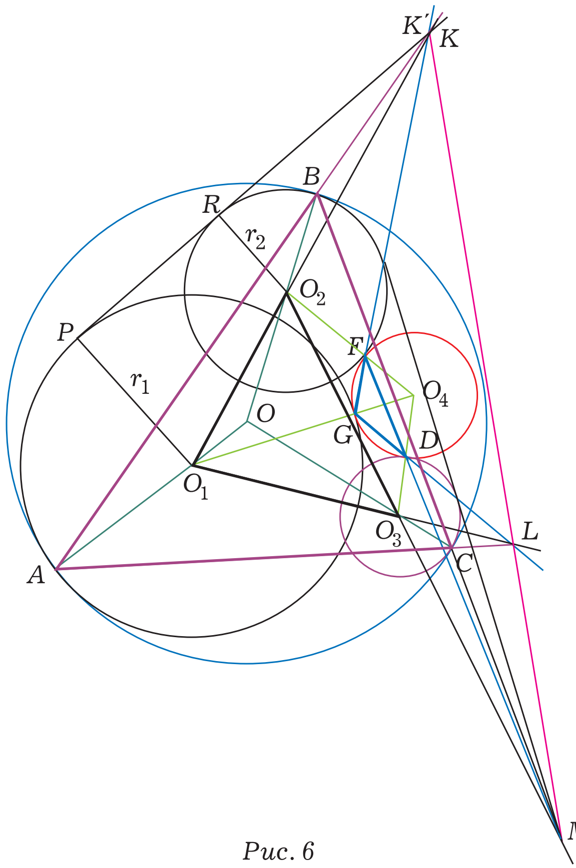


Рис. 6

Доказательство. Было доказано выше, что стороны треугольников ΔABC и $\Delta O_1O_2O_3$ пересекаются в точках K, L, M, лежащих на одной прямой. Проведём к каждой паре окружностей O_1, O_2 и O_3 двойные внешние касательные. Это можно сделать, поскольку в теореме рассмотрен случай, когда ни одна из окружностей не лежит целиком в круге, ограниченном другой. Тогда точки пересечения двойных внешних касательных (обозначим их через K', L', M') лежат на одной прямой по теореме Монжа. Остается доказать, точки K, L, M совпадают с соответствующими точками K', L', M'.

Отметим, что существует две окружности, которые касаются трёх данных окружностей. На рис. 6 их центры обозначены через O и O_4. Одна из них (O_4) касается каждой из них снаружи (пусть это будут точки D, F, G), а другая (O)– изнутри; обозначим эти точки касания, через A, B, C. Докажем, что стороны всех трёх треугольников:

$$\Delta O_1O_2O_3,\ \Delta ABC,\ \Delta DFG$$

пересекаются попарно в одних и тех же точках, и этими точками являются точки пересечения двойных внешних касательных, фигурирующих в теореме Монжа!

Проведём внешнюю касательную к окружностям O_1, O_2. Обозначим точки касания через P и R. Пусть касательная PR пересекает прямую O_1O_2 в т. K'. Точка K' является точкой пересечения двойных внешних касательных. Докажем, что прямые PR, AB, O_1O_2 и DF пересекаются в одной точке K'. Доказательство этой теоремы, как и других теорем, вытекает из подобия треугольников и теоремы Менелая.

Соединим центры окружностей O_1, O_2 с точками касания P и R. Пусть радиусы окружностей O_1, O_2 равны r_1, r_2 соответственно, тогда $O_1P = r_1$ и $O_2R = r_2$ и O_1P и O_2R – ортогональны общей касательной PR (рис. 6). Обозначим радиус окружности, которая касается снаружи окружностей O_1, O_2 в точках A и B через r, а её центр через O. Имеем:

$$OA = OB = r,\ \ O_1A = r_1,\ \ O_2B = r_2.$$

Из подобия прямоугольных треугольников $\Delta O_1PK'$ и $\Delta\ O_2RK'$ следует, что

$$\frac{O_1K'}{K'O_2} = \frac{r_1}{r_2}. \qquad (3)$$

Рассмотрим треугольник ΔO_1OO_2 и прямую AB, которая пересекает продолжение стороны O_1O_2 в точке K. По теореме Менелая имеем:

$$\frac{OA}{AO_1}\frac{O_1K}{KO_2}\frac{O_2B}{BO} = 1 \text{ или } \frac{r}{r_1}\frac{O_1K}{KO_2}\frac{r_2}{r} = 1.$$

Отсюда получаем

$$\frac{O_1K}{KO_2} = \frac{r_1}{r_2}. \qquad (4)$$

Из сравнения отношений (3) и (4) заключаем, что точка K' совпадает с точкой K.

Аналогично доказывается, что прямая DF, проведенная через точки касания с другой окружностью с центром в точке O_4, пересекает продолжение стороны O_1O_2 тоже в точке K.

Рассматривая пары окружностей (O_1 и O_3), (O_2 и O_3), и соответственно прямые (AC и DG), (BC и FG), проходящие через точки касания с окружностями O и O_4, аналогично доказывается, что прямые AC, DG, O_1O_3 пересекаются в одной точке L, которая является точкой пересечения двойных внешних касательных к окружностям O_1 и O_3, а прямые BC, FG, O_2O_3 пересекаются в одной точке M, которая является точкой пересечения двойных внешних касательных к окружностям O_2 и O_3.

Таким образом, доказан удивительный факт, что три точки, лежащие на одной прямой в теореме Монжа, и три точки в теореме о четырёх окружностях, являются одними и теми же, хотя в теореме Монжа нет четвёртой окружности и не рассматриваются никакие треугольники, а в теореме о четырёх окружностях не рассматриваются внешние касательные!

Теоремы Монжа, Дезарга и теорема о четырёх сферах в пространстве

Известно, что существует пространственный аналог теорем Дезарга и Монжа в трёхмерном случае. Более того, они смотрятся в пространстве ещё красивее и доказываются проще. Плоский случай входит в трёхмерный, как частный случай, и доказывается одновременно.

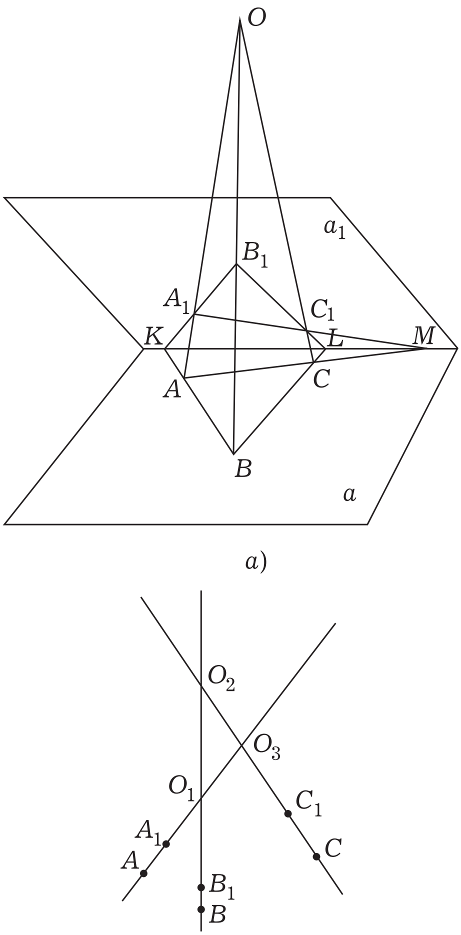
Теорема Монжа «о трёх колпаках». Рассмотрим сначала расширение теоремы Монжа на пространственный случай. Этот приём часто используется в проективной геометрии и называется «выходом в пространство». Для этого построим три сферы, чьими экваторами являются изначальные окружности на плоскости. Конусы, попарно охватывающие сферы, будут пересекать экваториальную плоскость по прямым, представляющим собой двойные внешние касательные к окружностям. Точки, которые надо доказать, что лежат на одной прямой, будут вершинами конусов – «колпаков». Поэтому теорему Монжа иногда называют теоремой «о трёх колпаках».

Доказательство. Положим на конусы плоскость. Верхние образующие конусов попарно пересекаются и определяют плоскость однозначно. Интересующие нас точки – вершины конусов – принадлежат этой плоскости, так же, как и изначальной – «экваториальной» плоскости. А две (непараллельные) плоскости пересекаются по прямой! Значит, действительно, эти три точки, вершины колпаков, лежат на одной прямой. Таким образом теорема Монжа в случаях пространства и плоскости доказана одновременно. (На сайте http://www.etudes.ru/ru/etudes/monge-problem/ выложено в открытом доступе красивое видео, наглядно демонстрирующее доказательство этой теоремы.)

Теорема Дезарга. Теорема Дезарга справедлива и для треугольников в трёхмерном пространстве, которые не лежат в одной плоскости, но их вершины лежат на лучах, исходящих из одной точки. Формулируется она так:

Если два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ расположены в пространстве в различных плоскостях α и α_1, или в одной плоскости так, что прямые AA_1, BB_1, и CC_1, соединяющие их соответственные вершины, пересекаются в одной точке O, то их соответственные стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются в трёх точках K, L и M, лежащих на одной прямой.

Доказательство. Доказательство этой теоремы просматривается при внимательном рассмотрения (рис. 7). Никаких вспомогательных построений проводить не надо. Принципиальный интерес представляет то, что, как и в теореме Монжа о трёх колпаках, доказывать теорему Дезарга намного проще для пространственного расположения треугольников (то есть «выйдя в пространство»), из которого вытекает доказательство и для плоского их расположения.



а)

б)

Рис. 7

Рассмотрим прямые AA_1 и BB_1. Поскольку они пересекаются в точке O, значит, они лежат в одной плоскости. Следовательно, в этой же плоскости лежат точки A, A_1, B, B_1 Отсюда следует, что прямые AB и A_1B_1 пересекаются в некоторой точке K, лежащей на линии пересечения плоскостей a и a_1. Действительно, прямая AB лежит в плоскости a, а прямая A_1B_1 лежит в плоскости a_1. Поэтому они могут пересечься только в одной точке, лежащей одновременно в плоскостях a и a_1, т. е. на линии их пересечения.

Точно так же доказываем, что две другие пары прямых BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются соответственно в точках L и M, лежащих на линии пересечения плоскостей a и a_1, т. е. на одной прямой с точкой K. Теорема доказана.

Обратная теорема Дезарга. *Если два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ расположены в различных плоскостях (или в одной плоскости) так, что их соответственные стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются в трёх точках K, L и M, лежащих на одной прямой, то прямые AA_1, BB_1, и CC_1, соединяющие их соответственные вершины, пересекаются в одной точке O.*

Доказательство. Прежде всего заметим: в случае пространственного расположения треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ уже из того обстоятельства, что их соответственные стороны попарно пересекаются в трёх точках, следует, что эти три точки лежат на одной прямой. Действительно, пусть треугольник ABC (рис. 7а) лежит в плоскости a, а треугольник $A_1B_1C_1$ лежит в плоскости α_1. Тогда прямая AB лежит в плоскости α, а прямая A_1B_1 лежит в плоскости α_1. По условию они пересекаются. Следовательно, их общая точка должна лежать на линии пересечения плоскостей α и α_1. То же самое имеет место и для других пар сторон. Следовательно, все три точки K, L и M пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой – на линии пересечения плоскостей α и α_1.

1. По условию прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке K. Следовательно, они лежат в одной плоскости. Но тогда и точки A, A_1, B, B_1 лежат в этой же плоскости. Следовательно, прямые AA_1, BB_1 тоже лежат в этой плоскости и пересекаются в некоторой точке O_1 (рис. 7 б).

2. По условию прямые BC и B_1C_1 пересекаются в точке L. Следовательно, они лежат в одной плоскости. Поэтому точки B, C, B_1, C_1 лежат в этой же плоскости. Следовательно, прямые BC и B_1C_1 пересекаются в некоторой точке O_2.

3. По условию прямые CA и C_1A_1 пересекаются в точке M. Следовательно, они лежат в одной плоскости. Поэтому точки А, С, A_1, C_1 лежат в этой же плоскости. Следовательно, прямые AA_1, CC_1 пересекаются в точке O_3.

Теперь остаётся доказать, что эти три прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, т.е. что три точки O_1, O_2, O_3 совпадают.

Чтобы это доказать, заметим, что поскольку два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ не лежат в одной плоскости, то шесть точек A, A_1, B, B_1, C, C_1 не лежат в одной плоскости, а следовательно, и три прямые AA_1, BB_1 и CC_1 не лежат в одной плоскости. И наоборот, если бы три прямые AA_1, BB_1 и CC_1 лежали в одной плоскости, то и шесть точек A, A_1, B, B_1, C, C_1 лежали бы в одной плоскости, а значит, и наши треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежали бы в одной плоскости. Отсюда следует, что если бы три точки O_1, O_2, O_3 не совпадали, то они определяли бы плоскость $O_1O_2O_3$, в которой лежали бы три прямые AA_1, BB_1 и CC_1, а также, и два наших треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Но последнее противоречило бы исходному положению. Значит, три точки O_1, O_2, O_3 совпадают. Теорема доказана.

Теорема о четырёх сферах. То, что существует пространственный аналог теорем Монжа и Дезарга, навело нас на мысль, что существует и пространственный аналог теоремы о четырёх окружностях. Причём, поскольку эти теоремы связаны для плоскости, они должны быть связаны и для пространства.

Таким образом, *Теорема о четырёх* сферах сформулирована так: *Пусть существуют три сферы с центрами в точках O_1, O_2 и O_3, которые образуют треугольник $\Delta O_1O_2O_3$, и пусть эти сферы касаются четвертой сферы в точках A, B и C, образующих ΔABC. Тогда стороны треугольников $O_1O_2O_3$ и ABC или пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, или они параллельны.*

Доказательство основывается на сведении рассуждений к теореме Дезарга для пространства. Обозначим центр четвёртой сферы через O.

Соединим отрезками прямых центры всех четырёх сфер O_1, O_2, O_3 и O с точками касания A, B и C. Радиусы сфер, проведённые в точку касания, ортогональны общей касательной плоскости. Отсюда следует, что радиусы O_1A и OA лежат на одном луче, выходящим из центра O, а радиусы O_2B и OB лежат на другом луче, исходящим из той же точки O, так же как и радиусы O_3C и OC лежат на третьем луче, исходящим из центра O. Таким образом, соответственные вершины треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC лежат на прямых, пересекающихся в одной точке O. По теореме Дезарга стороны этих треугольников пересекаются в трёх точках, лежащих на одной прямой. Теорема доказана.

Для закрепления изложенного материала предлагаем следующие задачи для самостоятельного решения.

Задачи

Задача 1. Доказать, что точка пересечения O двойных внешних касательных, проведённых к двум окружностям O_1 и O_2 разных радиусов, лежит на прямой O_1O_2 соединяющей центры окружностей и совпадает с точкой пересечения линии центров O_1O_2 с прямой AB, полученной следющим образом. Восстановим перпендикуляры к прямой O_1O_2 из центров O_1, O_2 до пересечения с окружностями (рис. 8). Обозначим эти точки через A и B, а точки касания общей внешней касательной, проведённой к окружностям O_1, O_2 обозначим через C, D. Доказать, что прямые AB и CD пересекаются в точке O. (Заметим, что эта задача даёт по-видимому самый простой способ построения точки пересечения двойных внешних касательных к двум окружностям с помощью циркуля и линейки.)

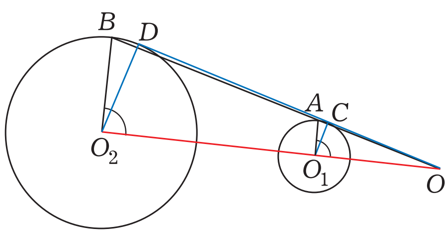
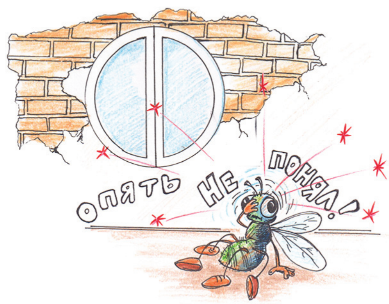


Рис. 8



Задача 2. Три произвольные окружности разных радиусов, расположены на плоскости так, что ни одна из них не лежит целиком в круге, ограниченном другой. Центры окружностей O_1, O_2 и O_3 соединим отрезками прямых – получим треугольник $\Delta O_1O_2O_3$ (рис. 9). Восстановим перпендикуляры к сторонам этого треугольника из центров O_1, O_2, O_3 до пересечения с окружностями. Получим точки A и B, C и D, E и F. Через точки A и E, B и D, C и F проведем прямые, которые пересекутся в точках K, L, M. Требуется доказать, что продолжения сторон треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔKLM пересекаются в точках S, P, R, лежащих на одной прямой. (*Указание.* Доказать, что точки S, P, R – это точки пересечения двойных внешних касательных.)

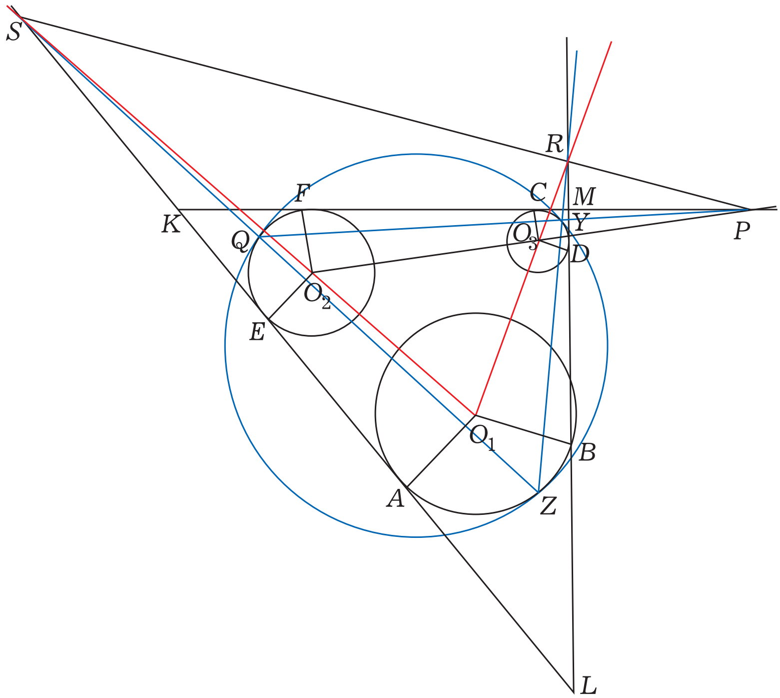


Рис. 9

Задача 3. Три произвольные окружности разных радиусов, расположены на плоскости так, что они не пересекаются, а их центры образуют треугольник $\Delta O_1O_2O_3$. К каждой паре окружностей проведем общие перекрестные внешние касательные и точки пересечения касательных обозначим через A, B, C (рис. 10).

Доказать, что стороны треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, и этими точками являются все те же точки, которые фигурируют в теореме Монжа и теореме о четырех окружностях – точки пересечения двойных внешних касательных к каждой паре окружностей. (Указание. Доказать, что вершины треугольника ΔABC делят стороны треугольника $\Delta O_1O_2O_3$ в отношении

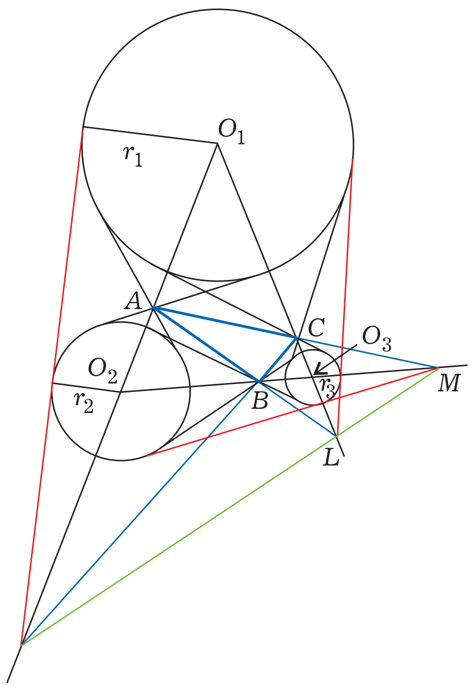


Рис. 10

значений радиусов прилегающих окружностей. Применить теорему Менелая и найти отношение расстояний от точки пересечения сторон ΔABC и $\Delta O_1O_2O_3$ до центров соответствующих окружностей.)

Дополнение. Теорема Монжа и теорема о четырёх окружностях позволяют обнаружить новые интересные свойства, связанные с произвольным треугольником и окружностью Эйлера. *Леонард Эйлер* (1707 – 1783) – выдающийся учёный, швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук). Им был сделан целый ряд замечательных открытий в геометрии треугольника. Он изучил свойства окружности, проходящей через середины сторон треугольника. В последствии она была названа окружностью Эйлера, или окружностью девяти точек. В 1765 г. он доказал теорему, названную теоремой Эйлера.

Теорема Эйлера. *Основания медиан треугольника (A_1, B_1, C_1), основания его высот (A_2, B_2, C_2) и середины отрезков от вершин до ортоцентра (H) лежат на одной окружности (рис. 11).*

Найдено, что радиус окружности Эйлера равен половине радиуса описанной около треугольника окружности, а центр окружности Эйлера F лежит посередине отрезка, соединяющего центр описанной окружности O и ортоцентр H ($OF = FH$). Эйлер также доказал, что и центроид треугольника M лежит на этом отрезке и делит его в отношении $OM : MH = 1 : 2$. Прямая OH называется прямой Эйлера данного треугольника (рис. 11).

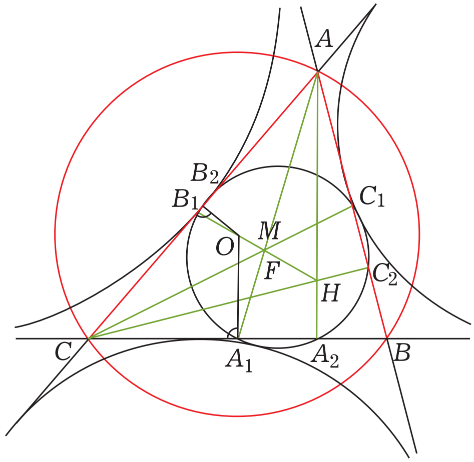


Рис. 11

Окружность Эйлера считается окружностью № 1 в геометрии, поскольку с ней связано большое число разнообразных и интересных задач, кроме того, она имеет много нетривиальных свойств. В первой половине XIX века немецкий математик *К. Фейербах* доказал одну из самых красивых теорем планиметрии:

Теорема Фейербаха. *Окружность девяти точек касается вписанной и всех вневписанных окружностей данного треугольника.*

Позднее было установлено, что окружность Эйлера касается ещё 60-ти окружностей, связанных с рассматриваемым треугольником!

Задача 4 (о вневписанных окружностях треугольника и об окружности Эйлера).

Рассмотрим произвольный треугольник ΔABC (рис. 12). Через середины сторон проведем окружность Эйлера. Известно, что она касается трёх вневписанных окружностей. Обозначим центры вневписанных окружностей через O_1, O_2, O_3, а точки касания P, R, S. Доказать, что стороны треугольников $\Delta O_1O_2O_3$, ΔPRS и исходного треугольника ΔABC пересекаются попарно в одних и тех же точках M, L, K, лежащих на одной прямой. Более того, опишем окружность вокруг трех вневписанных окружностей ΔABC и точки касания обозначим буквами D, F, G. Доказать, что и стороны треугольника ΔDFG будут также пересекаться со сторонами исходного треугольника ΔABC, а значит и со сторонами треугольников $\Delta O_1O_2O_3$, ΔPRS в тех же самых точках M, L, K, лежащих на одной прямой.

Задача 5. Рассмотрим три сферы *с центрами в точках* O_1, O_2 и O_3, которые полностью не лежат одна в другой. Пусть точки O_1, O_2 и O_3 образуют треугольник и пусть эти сферы касаются четвёртой сферы в точках A, B и C, образующих ΔABC. В силу теоремы о четырёх сферах стороны треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC пересекаются в точках, лежащих на одной прямой. Доказать, что эти точки совпадают с вершинами конусов, «натянутых» на пары сфер и фигурирующих в теореме Монжа о трёх колпаках.

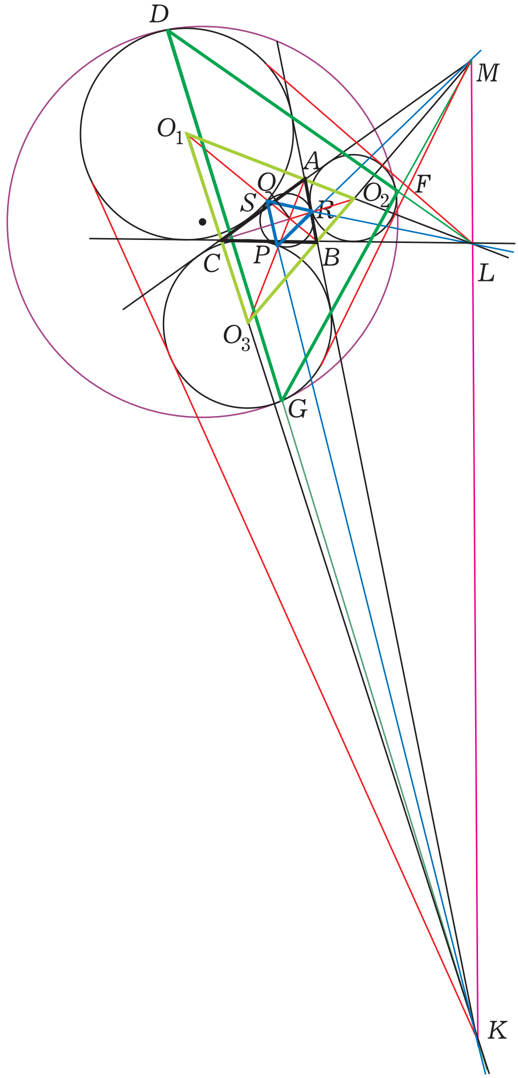


Рис. 12

Новости Новости Новости Новости

В МФТИ подвели итоги конкурса школьных преподавателей «Профессиональное мастерство учителя физики».

С 30 июня по 13 июля на Физтехе прошел первый семинар «Профессиональное мастерство учителя физики», в рамках которого подведены итоги Всероссийского конкурса молодых учителей. Семинар являлся финальным этапом конкурса.

Лауреатами конкурса за значительный вклад в формирование и совершенствование профессиональных компетенций стали более 70 человек, представивших свои работы. Список лауреатов будет опубликован на сайте.

Источник: https://mipt.ru/news