угольник $A_1B_1C_1$ лежит в плоскости α_1. Тогда прямая AB лежит в плоскости α, а прямая A_1B_1 лежит в плоскости α_1. По условию они пересекаются. Следовательно, их общая точка должна лежать на линии пересечения плоскостей α и α_1. То же самое имеет место и для других пар сторон. Следовательно, все три точки K, L и M пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой – на линии пересечения плоскостей α и α_1.

1. По условию прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке K. Следовательно, они лежат в одной плоскости. Но тогда и точки A, A_1, B, B_1 лежат в этой же плоскости. Следовательно, прямые AA_1, BB_1 тоже лежат в этой плоскости и пересекаются в некоторой точке O_1 (рис. 7 б).

2. По условию прямые BC и B_1C_1 пересекаются в точке L. Следовательно, они лежат в одной плоскости. Поэтому точки B, C, B_1, C_1 лежат в этой же плоскости. Следовательно, прямые BC и B_1C_1 пересекаются в некоторой точке O_2.

3. По условию прямые CA и C_1A_1 пересекаются в точке M. Следовательно, они лежат в одной плоскости. Поэтому точки А, С, A_1, C_1 лежат в этой же плоскости. Следовательно, прямые AA_1, CC_1 пересекаются в точке O_3.

Теперь остаётся доказать, что эти три прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, т.е. что три точки O_1, O_2, O_3 совпадают.

Чтобы это доказать, заметим, что поскольку два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ не лежат в одной плоскости, то шесть точек A, A_1, B, B_1, C, C_1 не лежат в одной плоскости, а следовательно, и три прямые AA_1, BB_1 и CC_1 не лежат в одной плоскости. И наоборот, если бы три прямые AA_1, BB_1 и CC_1 лежали в одной плоскости, то и шесть точек A, A_1, B, B_1, C, C_1 лежали бы в одной плоскости, а значит, и наши треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежали бы в одной плоскости. Отсюда следует, что если бы три точки O_1, O_2, O_3 не совпадали, то они определяли бы плоскость $O_1O_2O_3$, в которой лежали бы три прямые AA_1, BB_1 и CC_1, а также, и два наших треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Но последнее противоречило бы исходному положению. Значит, три точки O_1, O_2, O_3 совпадают. Теорема доказана.

Теорема о четырёх сферах. То, что существует пространственный аналог теорем Монжа и Дезарга, навело нас на мысль, что существует и пространственный аналог теоремы о четырёх окружностях. Причём, поскольку эти теоремы связаны для плоскости, они должны быть связаны и для пространства.

Таким образом, *Теорема о четырёх* сферах сформулирована так: *Пусть существуют три сферы с центрами в точках O_1, O_2 и O_3, которые образуют треугольник $\Delta O_1O_2O_3$, и пусть эти сферы касаются четвертой сферы в точках A, B и C, образующих ΔABC. Тогда стороны треугольников $O_1O_2O_3$ и ABC или пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, или они параллельны.*

Доказательство основывается на сведении рассуждений к теореме Дезарга для пространства. Обозначим центр четвёртой сферы через O.

Соединим отрезками прямых центры всех четырёх сфер O_1, O_2, O_3 и O с точками касания A, B и C. Радиусы сфер, проведённые в точку касания, ортогональны общей касательной плоскости. Отсюда следует, что радиусы O_1A и OA лежат на одном луче, выходящим из центра O, а радиусы O_2B и OB лежат на другом луче, исходящим из той же точки O, так же как и радиусы O_3C и OC лежат на третьем луче, исходящим из центра O. Таким образом, соответственные вершины треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC лежат на прямых, пересекающихся в одной точке O. По теореме Дезарга стороны этих треугольников пересекаются в трёх точках, лежащих на одной прямой. Теорема доказана.

Для закрепления изложенного материала предлагаем следующие задачи для самостоятельного решения.

Задачи

Задача 1. Доказать, что точка пересечения O двойных внешних касательных, проведённых к двум окружностям O_1 и O_2 разных радиусов, лежит на прямой O_1O_2 соединяющей центры окружностей и совпадает с точкой пересечения линии центров O_1O_2 с прямой AB, полученной следующим образом. Восстановим перпендикуляры к прямой O_1O_2 из центров O_1, O_2 до пересечения с окружностями (рис. 8). Обозначим эти точки через A и B, а точки касания общей внешней касательной, проведённой к окружностям O_1, O_2 обозначим через C, D. Доказать, что прямые AB и CD пересекаются в точке O. (Заметим, что эта задача даёт по-видимому самый простой способ построения точки пересечения двойных внешних касательных к двум окружностям с помощью циркуля и линейки.)

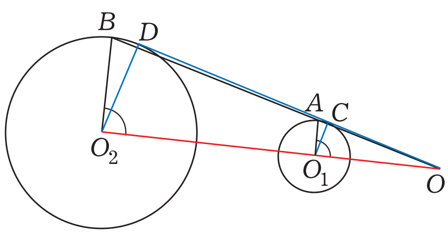
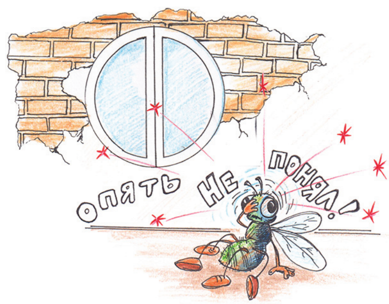


Рис. 8



Задача 2. Три произвольные окружности разных радиусов, расположены на плоскости так, что ни одна из них не лежит целиком в круге, ограниченном другой. Центры окружностей O_1, O_2 и O_3 соединим отрезками прямых – получим треугольник $\Delta O_1O_2O_3$ (рис. 9). Восстановим перпендикуляры к сторонам этого треугольника из центров O_1, O_2, O_3 до пересечения с окружностями. Получим точки A и B, C и D, E и F. Через точки A и E, B и D, C и F проведем прямые, которые пересекутся в точках K, L, M. Требуется доказать, что продолжения сторон треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔKLM пересекаются в точках S, P, R, лежащих на одной прямой. (*Указание*. Доказать, что точки S, P, R – это точки пересечения двойных внешних касательных.)

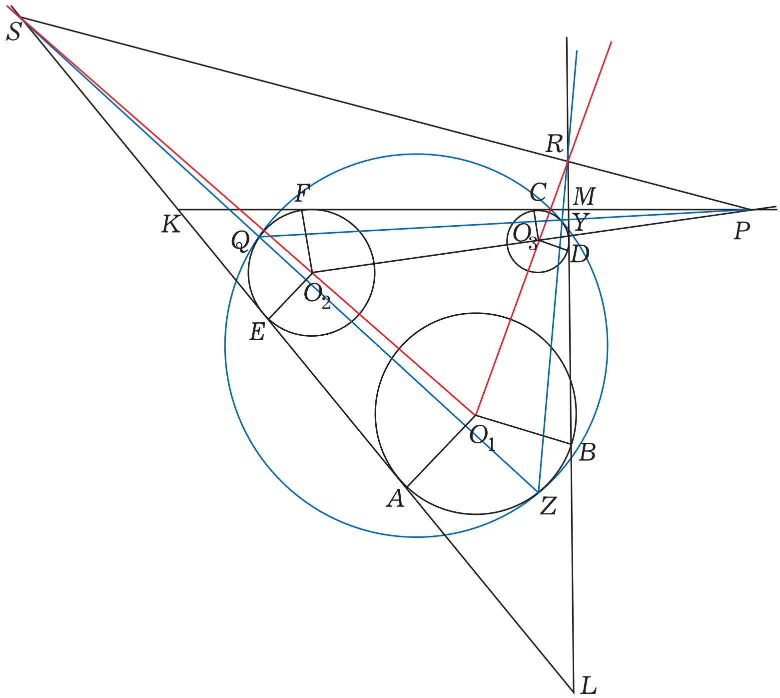


Рис. 9

Задача 3. Три произвольные окружности разных радиусов, расположены на плоскости так, что они не пересекаются, а их центры образуют треугольник $\Delta O_1O_2O_3$. К каждой паре окружностей проведем общие перекрестные внешние касательные и точки пересечения касательных обозначим через A, B, C (рис. 10).

Доказать, что стороны треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, и этими точками являются все те же точки, которые фигурируют в теореме Монжа и теореме о четырех окружностях – точки пересечения двойных внешних касательных к каждой паре окружностей. (Указание. Доказать, что вершины треугольника ΔABC делят стороны треугольника $\Delta O_1O_2O_3$ в отношении

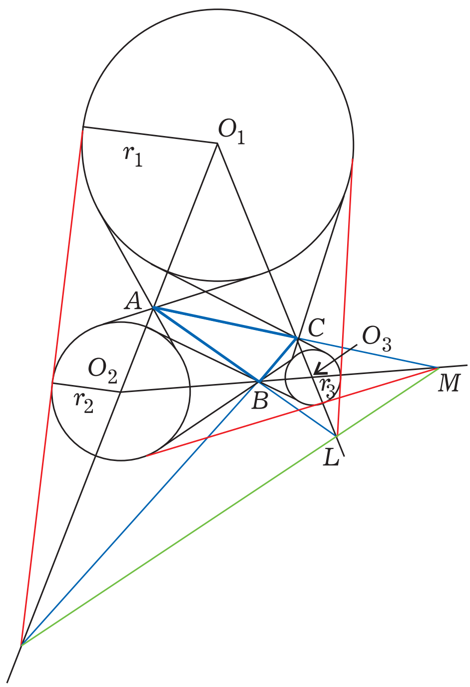


Рис. 10

значений радиусов прилегающих окружностей. Применить теорему Менелая и найти отношение расстояний от точки пересечения сторон ΔABC и $\Delta O_1O_2O_3$ до центров соответствующих окружностей.)

Дополнение. Теорема Монжа и теорема о четырёх окружностях позволяют обнаружить новые интересные свойства, связанные с произвольным треугольником и окружностью Эйлера. *Леонард Эйлер* (1707 – 1783) – выдающийся учёный, швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук). Им был сделан целый ряд замечательных открытий в геометрии треугольника. Он изучил свойства окружности, проходящей через середины сторон треугольника. В последствии она была названа окружностью Эйлера, или окружностью девяти точек. В 1765 г. он доказал теорему, названную теоремой Эйлера.

Теорема Эйлера. *Основания медиан треугольника (A_1, B_1, C_1), основания его высот (A_2, B_2, C_2) и середины отрезков от вершин до ортоцентра (H) лежат на одной окружности (рис. 11).*

Найдено, что радиус окружности Эйлера равен половине радиуса описанной около треугольника окружности, а центр окружности Эйлера F лежит посередине отрезка, соединяющего центр описанной окружности O и ортоцентр H ($OF = FH$). Эйлер также доказал, что и центроид треугольника M лежит на этом отрезке и делит его в отношении $OM : MH = 1 : 2$. Прямая OH называется прямой Эйлера данного треугольника (рис. 11).

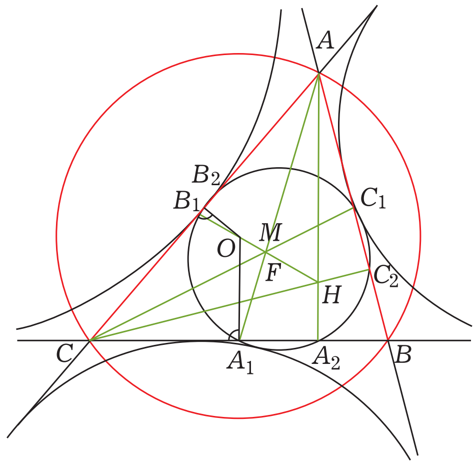


Рис. 11

Окружность Эйлера считается окружностью № 1 в геометрии, поскольку с ней связано большое число разнообразных и интересных задач, кроме того, она имеет много нетривиальных свойств. В первой половине XIX века немецкий математик *К. Фейербах* доказал одну из самых красивых теорем планиметрии:

Теорема Фейербаха. *Окружность девяти точек касается вписанной и всех вневписанных окружностей данного треугольника.*

Позднее было установлено, что окружность Эйлера касается ещё 60-ти окружностей, связанных с рассматриваемым треугольником!

Задача 4 (о вневписанных окружностях треугольника и об окружности Эйлера).

Рассмотрим произвольный треугольник ΔABC (рис. 12). Через середины сторон проведем окружность Эйлера. Известно, что она касается трёх вневписанных окружностей. Обозначим центры вневписанных окружностей через O_1, O_2, O_3, а точки касания P, R, S. Доказать, что стороны треугольников $\Delta O_1O_2O_3$, ΔPRS и исходного треугольника ΔABC пересекаются попарно в одних и тех же точках M, L, K, лежащих на одной прямой. Более того, опишем окружность вокруг трех вневписанных окружностей ΔABC и точки касания обозначим буквами D, F, G. Доказать, что и стороны треугольника ΔDFG будут также пересекаться со сторонами исходного треугольника ΔABC, а значит и со сторонами треугольников $\Delta O_1O_2O_3$, ΔPRS в тех же самых точках M, L, K, лежащих на одной прямой.

Задача 5. Рассмотрим три сферы *с центрами в точках* O_1, O_2 и O_3, которые полностью не лежат одна в другой. Пусть точки O_1, O_2 и O_3 образуют треугольник и пусть эти сферы касаются четвёртой сферы в точках A, B и C, образующих ΔABC. В силу теоремы о четырёх сферах стороны треугольников $\Delta O_1O_2O_3$ и ΔABC пересекаются в точках, лежащих на одной прямой. Доказать, что эти точки совпадают с вершинами конусов, «натянутых» на пары сфер и фигурирующих в теореме Монжа о трёх колпаках.

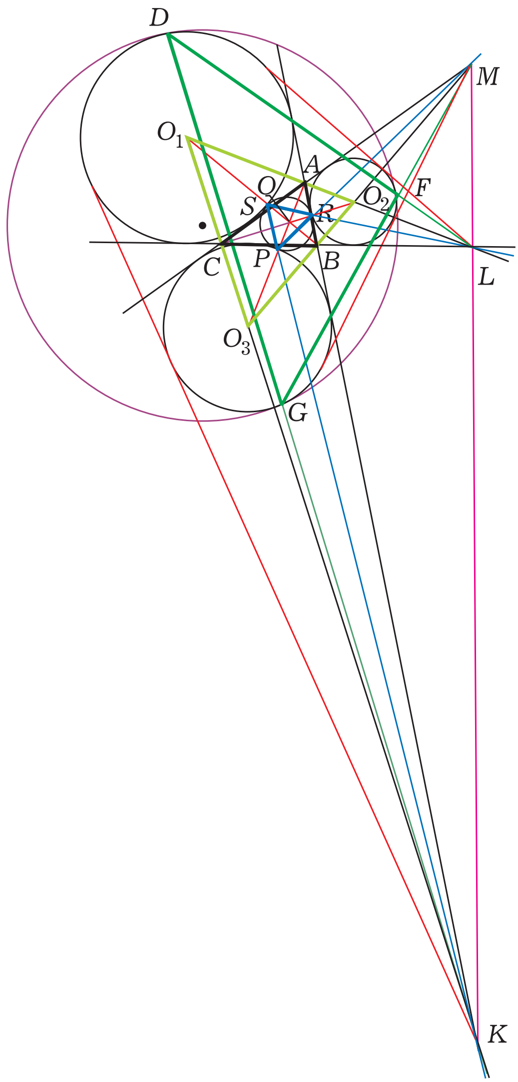


Рис. 12

Новости Новости Новости Новости

В МФТИ подвели итоги конкурса школьных преподавателей «Профессиональное мастерство учителя физики».

С 30 июня по 13 июля на Физтехе прошел первый семинар «Профессиональное мастерство учителя физики», в рамках которого подведены итоги Всероссийского конкурса молодых учителей. Семинар являлся финальным этапом конкурса.

Лауреатами конкурса за значительный вклад в формирование и совершенствование профессиональных компетенций стали более 70 человек, представивших свои работы. Список лауреатов будет опубликован на сайте.

Источник: https://mipt.ru/news