Колесникова Софья Ильинична
*Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал».
Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ».*

*Царь Египта Птолемей I, заинтересовавшись геометрией, спросил как-то у ее основоположника, великого математика Эвклида (III век до н. э.):
«Нельзя ли как-либо полегче и побыстрее овладеть ею?».
«Царских путей к геометрии нет! – с суровым достоинством ответил тот».*

«Вдохновение нужно в геометрии не меньше, чем в поэзии»

(А.С. Пушкин)

Задачи ОГЭ по геометрии

Читатели, конечно, заметили, что все предыдущие статьи автора были посвящены алгебре старших классов. Но так случилось, что в этом году пришлось разбираться с ОГЭ.

Оказалось, что успевающие школьники легко справляются со всем, кроме последней задачи – задачи по геометрии. Выяснилось, что это происходит не потому, что они не знают основных теорем, а потому, что «любимые» темы мехмата МГУ до сих пор «в моде», а так как надо *всех* подготовить к ОГЭ, то они остаются в стороне.

Известно, что планиметрия хуже всего решается и на ЕГЭ. Тоже понятно, почему. В 9-ом классе не успели, а в 11-м совсем не до этого.

Заметка может служить очень полезным дополнительным уроком как для 9-го, так и 11-го классов для тех, кого интересует планиметрия.

§ 1. Свойство биссектрисы

Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. (1)

Задача 1. Дан ромб $ABCD$ с острым углом A. Высота BH, проведенная к стороне CD, пересекает диагональ AC в точке M. Найдите площадь треугольника CMH, если высота ромба равна 8, а площадь ромба равна 80.

► Ромб – частный случай параллелограмма, у которого все стороны равны. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, т. е.

$$DC \cdot BH = 80 \Leftrightarrow DC = 80:8 = 10.$$

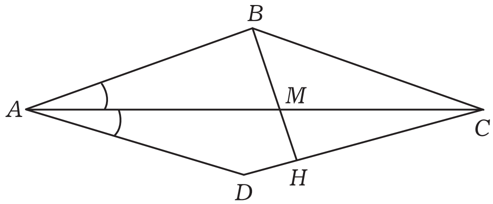

Рис. 1

Теперь, по теореме Пифагора, найдем HC из треугольника BCH: $HC = \sqrt{100-64} = 6.$

Многие уже не помнят, что диагонали ромба делят углы пополам, т. е. являются биссектрисами соответствующих углов. Если и вспомнят этот факт, то не помнят другого: биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т. е. в нашем случае

$$\frac{BM}{MH} = \frac{10}{6} = \frac{8-MH}{MH} \Rightarrow MH = 3.$$

Тогда $S_{CMH} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9.$

Ответ. 9. ◄

Примечание. Все дополнительные построения будем делать пунктиром.

Задача 2. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 12. Найдите стороны треугольника ABC.

► Сделаем чертёж – рис. 2

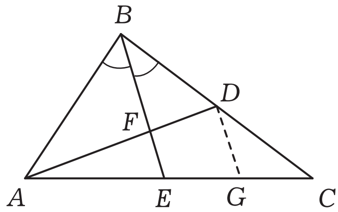

Рис. 2

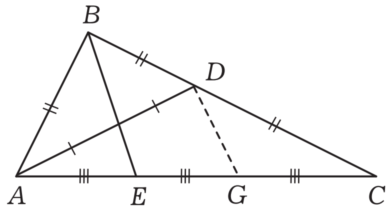

Рис. 3

1) Так как BE – биссектриса угла B, то $\triangle ABF = \triangle FBD$ (по стороне и прилежащим углам), а тогда $AF = FD = 6,\ AB = BD.$

2) Так как AD – медиана, то $BD = DC.$

3) По свойству биссектрисы

(1) $\quad 2 = \frac{BC}{AB} = \frac{EC}{AE} \Rightarrow EC = 2AE.$

Чтобы картинка была понятней, лучше чертёж переделать – рис. 3

Проведём DG параллельно BE. Так как $AF = FD$, то $AE = EG$, а $EG = GC = AE$, т. к, $BD = DC.$

Отсюда следует, что

$$DG = \frac{1}{2}BE = 6 \Rightarrow FE = \frac{1}{2}DG = 3 \Rightarrow$$

$$1) BF = 9 \Rightarrow AB = \sqrt{81+36} = 3\sqrt{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 6\sqrt{13}$$

$$2) AE = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5} \Rightarrow AC = 9\sqrt{5}$$

Ответ. $\left\{3\sqrt{13}, 6\sqrt{13}, 9\sqrt{5}\right\}$ ◄

Задача 3. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K. Длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC.

►Построим треугольник ABC и проведём в нём медиану BM и биссектрису AP – рис. 4

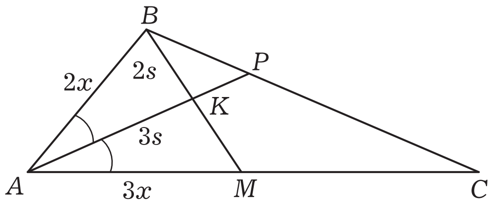

Рис. 4

По условию, $AC = 3AB$, $AM = \frac{1}{2}AC = \frac{3}{2}AB$. Удобно обозначить $AB = 2x \Rightarrow AM = MC = 3x$.

Так как АК – биссектриса в треугольнике АВМ, то $\frac{BK}{KM} = \frac{2}{3}$.

Треугольники ABK и AKM имеют одинаковые высоты – поэтому $S_{ABK} = 2s, S_{AKM} = 3s \Rightarrow S_{ABM} = 5s$ BM – медиана, поэтому

$$S_{ABM} = S_{MBC} = 5s \Rightarrow S_{ABC} = 10s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABK}}{S_{ABC}} = \frac{1}{5}.$$

Ответ. 0,2.◄

§ 2. Угол, составленный касательной к окружности и хордой

Угол, составленный касательной к окружности и хордой, исходящими из одной точки, измеряется половиной дуги, заключённой между ними – рис 5.

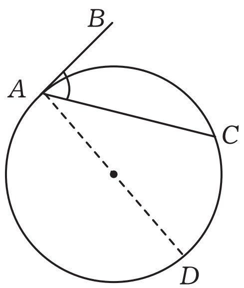

Рис. 5

Задача 4. К двум окружностям, которые касаются внешним образом в точке K, проведена общая касательная AB. Найдите угол AKB (в градусах).

► Это классическая задача, где встречается угол, составленный касательной и хордой.

Проведем радиусы в точки касания – они образуют с касательной прямые углы O_1AC и CBO_2. Так? Так. Теперь соединим центры окружностей. Так как они касаются, то, во-первых, точка касания K лежит на этой линии, а, во-вторых, CK– общая касательная – рис.6.

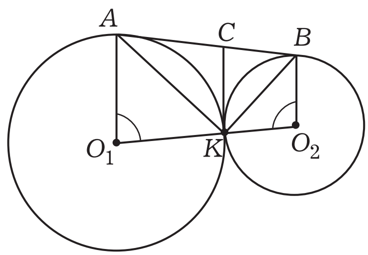

Рис. 6

Пусть угол $AO_1K = a$, а угол $KO_2B = b$. Тогда $\angle AKC = \frac{1}{2}a$, $\angle BKC = \frac{1}{2}b$ как углы, составленные касательной KC и хордами AK и KB

соответственно, измеряющиеся половиной дуги, заключенной между их сторонами. Так как сумма всех внутренних углов четырехугольника равна 2π, то угол $AKB = \angle AKC + \angle BK = C\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\pi}{2}$.

Ответ. 90. ◄

§ 3. Свойства касательной к окружности

Касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны.

Если из одной точки проведены касательная и секущая к окружности, то квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть – рис. 7

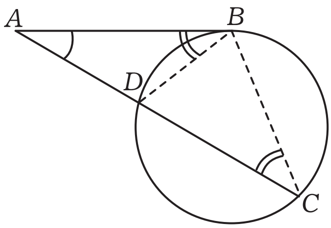

Рис. 7

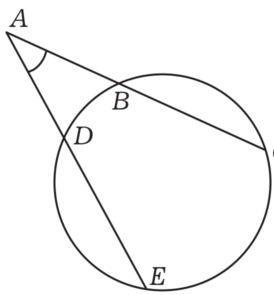

Рис. 8

$\measuredangle ABD = \angle BCD$, ΔABD подобен $\Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow AB^2 = AC \cdot AD$ -

Следствие 1

Если из точки проведено несколько секущих к окружности, то произведение любой секущей на её внешнюю часть есть величина постоянная для всех секущих (и равна квадрату касательной, проведённой из этой точки): $AC \cdot AB = AE \cdot AD$ *– рис. 8.*

Задача 5. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

► Сложность этой задачи состоит в том, что, если начать строить чертёж с треугольника, то не так легко построить окружность, удовлетворяющую заданным условиям.

Поэтому сначала удобно построить окружность, затем провести прямую AC так, как задано в условии, затем провести касательную AB. Третья сторона в задаче не принимает никакого участия – рис. 9.

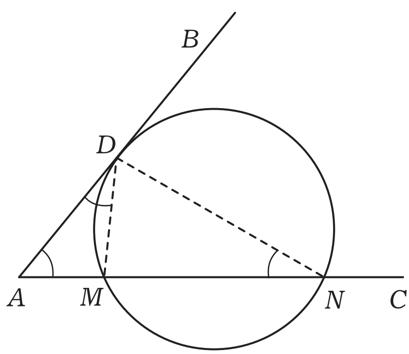

Рис. 9

Соединим точку касания D с M и N – пунктирные линии.

По свойству касательной к окружности, $AD^2=4\cdot15=60 \Leftrightarrow AD=\sqrt{60}$ и $\angle ADM=\angle DNM$ (как измеряемые половиной одной и той же дуги)

По теореме косинусов

$$DM^2=4^2+60-2\cdot4\cdot\sqrt{60}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^2+60-2\cdot2\cdot15=16\Rightarrow$$
$$\Rightarrow DM=4=AM\Rightarrow\angle A=\angle ADM=\angle DNM$$

Тогда $4=2r\sin A \Leftrightarrow r=\dfrac{2}{\sqrt{1-\dfrac{15}{16}}}=8$

Ответ. 8.◄

Задача 6. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На стороне AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром MC касается гипотенузы в точке N. Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если CN=4, а $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{1}{3}$.

►Чертёж удобно начинать с построения окружности, затем строим катет AC, гипотенузу AB, а затем соединим C и B – рис. 10. Затем проводим остальные линии.

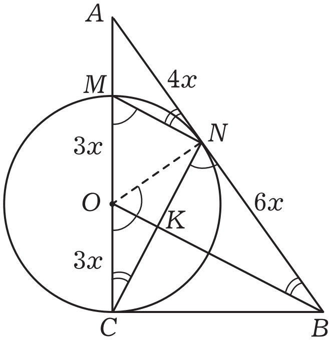

Рис. 10

Так как $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{1}{3}$, то обозначим $AM=2x$, $MO=OC=3x$.

Треугольники COB и ONB *равны по трём сторонам* (CB=BN – касательные к окружности, проведённые из одной точки) $\Rightarrow\angle COK=\angle KON=$ $=\frac{1}{2}\angle CON=\angle CMN$, OK – высота и медиана в равнобедренном треугольнике.

Отсюда следует, что $MN\parallel OB$ – значит, $BOMN$ – трапеция, и её высота равна 2.

По свойству касательной,

$$AN^2=8x\cdot2x\Leftrightarrow AN=4x\Rightarrow NB=6x.$$

Тогда $\Delta CMN=\Delta BKN$ (по стороне и прилежащим углам) $\Rightarrow MN=2$.

Так как ΔOAB подобен ΔMAN, то

$$OB=\frac{5}{2}MN=5\Rightarrow S_{BOMN}=\frac{1}{2}(2+5)2=7$$

Ответ. 7.◄

Следствие 2

Касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны, т. е., например, $BF=BE$.

Отсюда следует, что *у описанной трапеции сумма длин оснований равна сумме длин боковых сторон.*

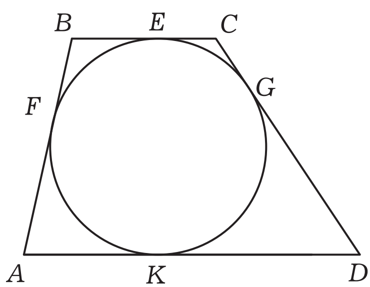

Рис. 11

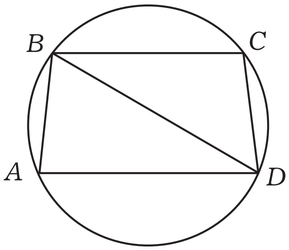

Рис. 12

Так как между параллельными хордами расположены равные хорды, то в окружность *можно вписать трапецию* – рис 12, если

а) она равнобокая и

б) сумма противоположных углов равна π.

Задача 7. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD=14$, $BC=12$.

► Начинать строить чертёж удобно с построения окружности. Затем проведем CD, касательную, прямую CB и DA. Продолжим AD и CD до пересечения (пунктир) обозначим точку пересечения буквой G. Заметим, что пересечение может быть далеко вверху – поэтому пунктир «условно» пересекается в точке G.

Квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть: $GE^2 = GD \cdot GC$.

Заметим, что угол G является общим у трёх прямоугольных треугольников.

Треугольник BGC подобен треугольнику AGD : $\dfrac{GD}{GC} = \dfrac{14}{12} = \dfrac{7}{6}$

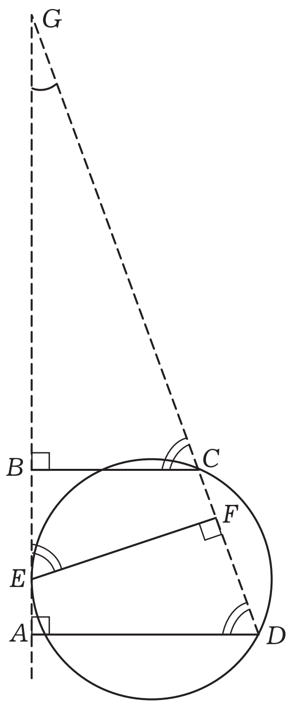

Рис. 13

ΔBGC подобен ΔEGF :

$$\frac{BC}{EF} = \frac{GC}{EG} \Leftrightarrow EF = \frac{BC \cdot EG}{GC} = \frac{12\sqrt{GD \cdot GC}}{GC} =$$

$$= 12\sqrt{\frac{7 \cdot 6}{6 \cdot 6}} = 2\sqrt{42}$$

Ответ. $2\sqrt{42}$. ◄

Задача 8. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до ее меньшего основания.

► Построим окружность, затем трапецию, проведём диагонали и высоту трапеции – рис. 14.

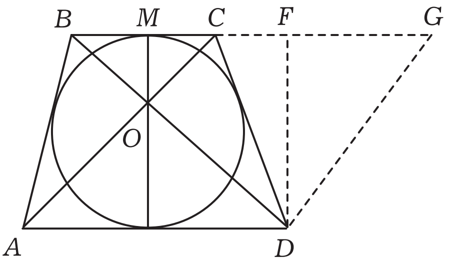

Рис. 14

Теперь продолжим сторону BC до пересечения с прямой DG, параллельной диагонали AC.

Тогда
$CG = AD \Rightarrow BG = BC + AD,\ DG = AC$

По следствию 2,
$AB + CD = BC + AD = 60 = BG \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 540 : 30 = 18.$

Так как трапеция равнобокая, то

$$CD = 30 \Rightarrow CF = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 6 \Rightarrow BM = 3 \Rightarrow$$

$$\frac{OM}{FD} = \frac{BM}{BF} \Leftrightarrow OM = 18 \cdot \frac{3}{30} = 1{,}8.$$

Ответ. 1, 8.◀

§ 4. Разные задачи

Задача 9. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 49$, $MD = 42$, H-точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

▶ В этой задаче тоже удобно начинать с построения окружности, затем провести диаметр BC. Предполагаемую высоту AD, а затем соединить A с B и C. Теперь надо провести, по крайней мере, ещё одну высоту. Вопрос – куда попадёт G – точка пересечения высоты со стороной AC? Так как при этом получается прямой угол, опирающийся на диаметр, то точка G попадает на окружность.

Итак, BG – высота, $\angle BGC$ – прямой, BC – диаметр – поэтому точка G расположена на окружности.

Продолжим AD до пересечения с окружностью.

Тогда
$MN \perp BC \Rightarrow MN = 2MD = 84$, т. к. хорда, перпендикулярная диаметру, делится пополам.

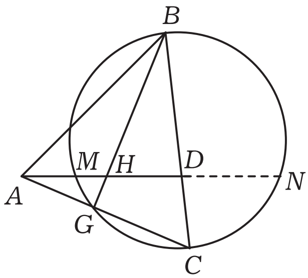

Рис. 15

Тогда
$AN = 91 \Rightarrow AM \cdot AN = 7 \cdot 91 = AG \cdot AC$ (следствие 1)

ΔAHG подобен ΔADC (угол HAG – общий, по трём углам)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AG}{AD} \Leftrightarrow AH = \frac{AG \cdot AC}{AD} = \frac{7 \cdot 91}{49} = 13.$$

Ответ. 13.◀

Задача 10. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 40 и 41, а основание BC равно 16. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

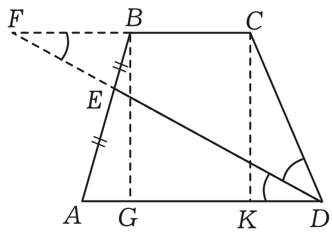

Рис. 16

► Построим трапецию $ABCD$ – рис. 16.

Продолжим ВС до пересечения с биссектрисой. Тогда

$$\angle BFE = \angle CDE \Rightarrow FC = CD = 41.$$

Так как $BE = AE$, то $\Delta EFB = \Delta AED$ (по стороне и прилежащим углам) $\Rightarrow FB = AD = 41 - 16 = 25$.

Проведём высоты из точек B и C. Пусть $AG = x$, тогда $h^2 = 40^2 - x^2 =$

$$= 41^2 - (25 - x - 16)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 81 = 81 - 18x \Leftrightarrow x = 0.$$

Оказалось, что $AB \perp AD$!

Тогда $h = 40 \Rightarrow S_{ABCD} = 41 \cdot 20 = 840.$

Ответ. 840.◄

Задача 11. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCP, равен 8, тангенс угла BAC равен 4/3. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

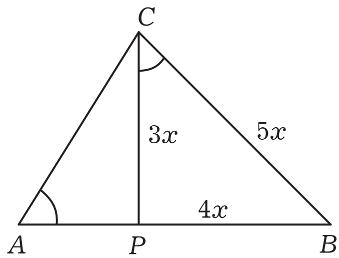

Рис. 17

►В этой задаче нет необходимости строить вписанную окружность – задача решается с помощью одних вычислений. Используется только формула, связывающая площадь треугольника с величиной радиуса вписанной окружности – рис. 17.

Заметим, что $\angle BAC = \angle PCB$, а, так как тангенс угла BAC равен 4/3, то тангенс угла PCB равен 4/3, а тогда, по определению тангенса,

$$\frac{PB}{PC} = \frac{4}{3}.$$

Обозначим $CP = 3x$, $PB = 4x \Rightarrow$

$$\Rightarrow BC = 5x, \text{ тогда } S_{PBC} = pr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot 3x = 8 \cdot 6x \Leftrightarrow x = 8.$$

По условию,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{4}{3} = \frac{40}{AC} \Leftrightarrow AC = 30 \Rightarrow AB = 50 \Rightarrow$$

$$p_{ABC} = 60 \Rightarrow S_{ABC} = 15 \cdot 40 = 60 \cdot r \Leftrightarrow r = 10$$

Ответ. 10◄

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

* * *

Мой PIN-код – последние четыре цифры числа π.

* * *

Если номер 666 – зло. То, получается, корень его зла в 25,8069?

* * *

В какой-то степени два это тоже восемь.