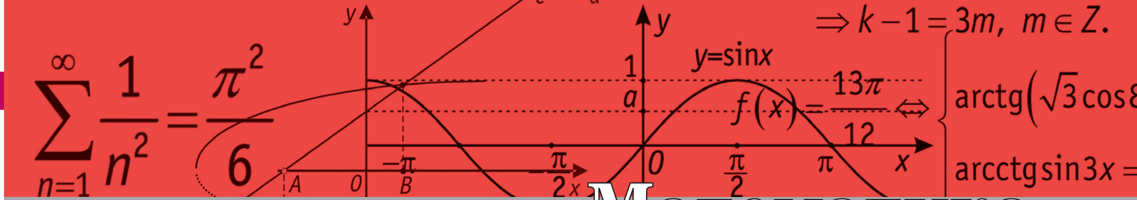


Вавилов Валерий Васильевич

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и школы имени А.Н. Колмогорова. Заслуженный преподаватель и лауреат Ломоносовской премии МГУ. Автор 23 книг, более 300 статей научного, методического и научно-популярного характера.

Задачи И. Ньютона по арифметике, алгебре и геометрии

В этом году исполняется 370 лет со дня рождения одного из великих учёных – Исаака Ньютона (1643 – 1727), заслуги которого перед математикой и физикой довольно хорошо известны. Почти всю свою жизнь он был связан с Кембриджским университетом, в котором учился и работал. Здесь впервые обнаружил себя его гений. В статье речь идёт о книге (а точнее, об учебном пособии), написанной Ньютоном на основе лекций, которые он читал студентам. Эта книга переведена на русский язык (см. [1]), но не так широко известна читателям, хотя заслуживает того, чтобы быть востребованной и в наши дни как учителями, так и школьниками.

1. Исаак Ньютон родился 25 декабря (старого стиля) 1642 года, вскоре после смерти отца, в деревне Вулсторп, на восточном побережье Англии. О школьных годах Исаака известно не очень много. По рассказам, директор школы, где он учился, высоко оценивал способности и прилежание И. Ньютона: произнося напутственную речь выпускникам школы, он со слезами на глазах восхвалял его талант и характер. Как оказалось уже в университете, И. Ньютон был более подготовленным студентом, чем многие другие (см. [2]).

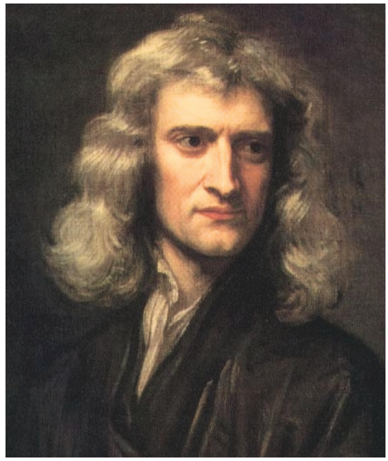
Сохранились рассказы о том, что будучи школьником, «Ньютон любил строить сложные механические игрушки, модели водяных мельниц, самокаты, водяные и солнечные часы... Мальчик любил заниматься воздушными змеями, запуская их иногда и ночью с бумажными цветными фонарями и распространяя при этом в шутку в округе слух о новой комете. <...> Свой первый физический опыт, со слов самого Ньютона, он проделал, желая определить силу ветра во время бури: шестнадцатилетний юноша измерял дальность своего прыжка по направлению и против ветра» (см. [2]).

Из опубликованных записей в тетрадях Ньютона, относящихся к его школьным и студенческим годам, видно, что он много читал и оформлял прочитанное в виде небольших выписок из книг и конспектов.

Школьные записи систематизированы по 16 рубрикам, в которых имеются сведения по медицине, химии, искусству, этике и др.; в студенческих встречаются записи о ремёслах, сельском хозяйстве, домоводстве и ... о вопросах мироздания.

В 1661 году он стал студентом Тринити-колледжа Кембриджского университета, в 1664 году – бакалавром, а в 1668 году – магистром. Начиная с 1669 года, он возглавлял кафедру математики в этом университете. Именно в этот период 1661 – 1669 годов сложились его научные интересы, раскрылась самобытность его таланта. Примечательна одна из записей в его студенческой записной книжке, в которой уже просматривается его своеобразная научная программа: «В философии не может быть государя, кроме истины... Мы должны поставить памятники из золота Кеплеру, Галилею, Декарту и на каждом написать: «Платон – друг, Аристотель – друг, но главный друг – истина».

Глубокое уважение и мировую славу И. Ньютону принесли его преданность науке, его книги «Математические начала натуральной философии», «Оптика» и создание (совместно с Лейбницем) основ математического анализа. Но кроме указанных книг и полученных в них важнейших результатов, определивших современные методы исследования законов окружающего мира, немалое место в научной деятельности Ньютона занимали вопросы становления алгебры как науки и её связей с геометрией и арифметикой. Это нашло отражение в его книге «Arithmetica universalis», вышедшей в свет в 1707 году. Эта книга заслуживает внимания не только потому, что её написал великий Ньютон, а в силу той огромной роли, которая она оказала на развитие алгебры и на её преподавание в школе.



2. Полное название книги Ньютона «Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе», и написана она на основе материалов лекций по алгебре, которые читал И. Ньютон в Тринити-колледже Кембриджского университета в 1673 – 1983 годы.

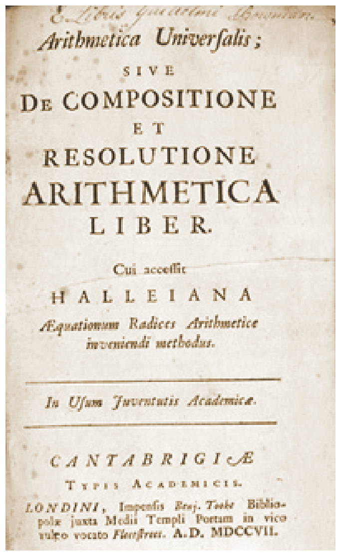
Основной объём книги составляют задачи вместе с их решениями и комментариями (иногда с несколькими различными решениями), очень тщательно и с большим вкусом отобранные. Как мы сейчас сказали бы, все рассмотренные в книге задачи –

это задачи на составление уравнений. Другими словами, исходя из условия задачи, нужно сначала составить уравнение (или систему уравнений), а затем уже среди решений этого уравнения (системы) отобрать нужные корни. К текстовым задачам Ньютон относит и многие геометрические задачи, которые он решает алгебраическими методами, т. е. сводя их решение к решению уравнений (две трети от общего числа задач в книге носят геометрический характер). Тем не менее, он подчёркивает во введении к книге и целесообразность отделения алгебры от геометрии. Он пишет: «Умножения, деления и тому подобные вычисления введены были в геометрию недавно и при этом неосторожно и в противоречии с основной целью этой науки. Всякий, кто рассмотрит построения задач при помощи прямой и круга, найденные первыми геометрами, легко увидит, что геометрия была изобретена для того, чтобы мы, проводя линии, могли с удобством избегать утомительных вычислений.

Поэтому не следует смешивать эти две науки. Древние столь тщательно отличали их друг от друга, что никогда не вводили в геометрию арифметические термины.

Современные учёные, смешивая обе науки, утратили простоту, в которой состоит всё изящество геометрии». Своё преклонение перед античными геометрами Ньютон даже выразил в шутливой фразе «алгебра – это анализ сапожников в математике (of the buglers in mathematics)». Это же преклонение нашло своё яркое отражение и при решении задач в книге, когда автор к одной и той же задаче предлагает как алгебраическое, так и чисто геометрическое решения (иногда даже несколько).

Чтобы читатель сумел себе более отчётливо представить характер задач, мы отобрали некоторые из них (как правило, вместе с ответами и небольшими комментариями) и предлагаем их читателю для самостоятельного решения (см. [1]).


Arithmetica Universalis;
SIVE
DE COMPOSITIONE
ET
RESOLUTIONE
ARITHMETICA
LIBER.
Cui accessit
HALLEIANA
Æquationum Radices Arithmetice inveniendi methodus.
In Usum Juventutis Academicæ.
CANTABRIGIÆ
Typis Academicis.
LONDINI, Impensis Benj. Tooke Bibliopolæ juxta Medii Templi Portam in vico vulgo vocato Fleetstreet. A.D. MDCCVII.

Арифметика и алгебра

1. Сумма двух чисел равна 8, а разность их квадратов равна 16. Найти числа.

Ответ: 3 и 5.

2. Найти три величины x, y, z по данным суммам их любых пар.

3. Разделить данную величину на четыре части так, чтобы большие части превосходили наименьшую часть на данные разности.

4. Трое рабочих могут выполнить некоторую работу, каждый – в известное время, а именно: A может выполнить работу в 3 недели, B – в три раза большую работу в 8 недель и C – в пять раз большую работу в 12 недель. Требуется узнать, за какое время они могут закончить эту работу совместно.

Ответ: 8/9 недели.

Эта задача приведена в книге как применение метода рассуждения при решении более общей задачи: даны силы нескольких действующих агентов, определить время x, в которое все они вместе произведут данный эффект d.

5. Некто купил 40 бушелей пшеницы, 24 бушеля ячменя и 20 бушелей овса, уплатив за всё 15 фунтов 12 шиллингов (английский фунт равен 20 шиллингам).

Во второй раз он купил такого же качества зерна: пшеницы 26 бушелей, ячменя 30 бушелей и овса 50 бушелей, уплатив за всё 16 фунтов.

И в третий раз он купил такого же зерна: пшеницы 24 бушеля, ячменя 120 бушелей и овса 100 бушелей, уплатив за всё 34 фунта.

Спрашивается, какова должна быть цена каждого из этих видов зерна.

Ответ: пшеница, ячмень и овёс стоят, соответственно, 5, 3 и 2 шиллинга за бушель.

Этой задаче в книге предшествуют две задачи («на смеси») общего характера:

1) Даны различные смеси двух или большего числа веществ, и из них требуется составить новую смесь, в которой эти вещества находились бы в данных отношениях.

2) Известны цены нескольких смесей из одних и тех же веществ и пропорции смешанных веществ. Определить цену каждого из смешанных веществ.

6. 12 быков съели траву на 10/3 акрах пастбища за 4 недели, а 21 бык съел её на 10 акрах такого же пастбища за 9 недель. Требуется узнать, сколько быков съедят траву на 24 акрах за 12 недель.

Ответ: 36 быков.

Предварительно Ньютон решает эту задачу в более общей постановке: a быков поедают луг b за время c; d быков поедают пастбище e того же качества за время f; трава растёт равномерно. Спрашивается, сколько быков съедят пастбище g того же качества за время h?

Ответ впечатляет:

$$\frac{bdfgh - acegh - bcdgf + acefg}{befh - bceh}.$$

7. Два почтальона A и B, которых разделяет расстояние в 59 миль, выезжают утром навстречу друг другу. A делает за 2 часа 7 миль, а B – за 3 часа 8 миль; при этом B отправляется в путь часом позже A. Требуется найти, сколько миль проедет A до встречи с B.

Ответ: 35 миль.

Замечание. В книге Ньютон рассматривает обобщение этой задачи, а потом даёт несколько частных её интерпретаций (т. е. превращает её в своеобразную исследовательскую программу). Общая формулировка задачи такова: даны скорости тел A и B, двигающихся к одному месту, а также разность моментов времени и расстояние между местами отправления. Требуется определить место встречи.

Одной из конкретных иллюстраций полученного ответа (в буквах) к этой общей задаче приводится такая. Допустим, что Солнце каждый день проходит один градус, а Луна 13 градусов, и что в некоторое время Солнце находилось в начале созвездия Рака, а Луна спустя три дня была в начале созвездия Овна. Спрашивается, где произойдёт их первое соединение?

Ответ: в $10\frac{3}{4}$ градусов созвездия Рака.

8. Даны величины и количества движения двух совершенно упругих шаров, которые движутся по одной прямой и соударяются. Определить их движение после отражения.

Начиная решение этой задачи, Ньютон даёт следующие уточнения её формулировки: «Решение этого вопроса зависит от следующих условий: каждое тело испытывает противодействие, равное действию, оказанное им на другое тело, и они удаляются друг от друга после отражения с той же скоростью или быстротой, с которой встретились перед ударом».

Ответ: пусть тела имеют массы A, B и двигаются со скоростями a, b соответственно ($a > b$), тогда

1) если тела A, B двигаются в одном направлении, то их скорости соответственно равны

$$\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}, \frac{2aA - bA + bB}{A + B};$$

2) если тела A, B двигаются навстречу друг другу, то их скорости соответственно равны

$$\frac{aA - aB - 2bB}{A + B}, \frac{2aA + bA - bB}{A + B}.$$

9. Одна из арифметических текстовых задач приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{y^2}{x} = 20, \\ x^2 + y^2 + \dfrac{y^4}{x^2} = 140. \end{cases}$$

Ответ: две пары чисел

$$\left(6\frac{3}{4} \pm \sqrt{3\frac{5}{16}}; 6\frac{1}{2}\right).$$

10. В геометрической прогрессии три члена. Сумма этих членов равна 19, а сумма их квадратов равна 133. Найти все члены прогрессии.

Ответ: 4, 6, 9 или 9, 6, 4.

11. В геометрической прогрессии четыре члена. Сумма крайних членов равна 13, а сумма средних равна 4. Найти члены прогрессии.

Ответ: 1/5, 4/5, 16/5, 64/5 (или прогрессия из этих чисел, но выписанная в обратном порядке).

12. Купец имел некоторую сумму денег. В первый год он истратил 100 фунтов. К оставшейся сумме добавил третью её часть. В следующем году он вновь истратил 100 фунтов и увеличил оставшуюся сумму на третью её часть. В третьем году он опять истратил 100 фунтов. После того как он добавил к остатку третью его часть, капитал его стал вдвое больше первоначального. Определить первоначальный капитал купца.

Ответ: 1480 фунтов.

Геометрия

Этот раздел своей книги (который называется «Приведение к уравнениям геометрических вопросов») Ньютон начинает с общих комментариев алгебраических методов решения геометрических задач, то есть к сведению их к решению уравнений или их систем. Как уже отмечалось, он не ограничивается только алгебраическими решениями, но и часто приводит чисто геометрические решения там и даже проводит построения вычисляемых величин при помощи циркуля и линейки.

13. Если мы имеем вопрос, касающийся вписанного в окружность равнобедренного треугольника, стороны которого нужно связать с диаметром этой окружности, то это можно выполнить или выражая диаметр круга через известные боковые стороны и основание, или выражая основание через данные стороны и диаметр, или же, наконец, выражая боковые стороны через данные основание и диаметр; но какой бы путь мы ни избрали, дело сведётся к тому же уравнению, полученному в процессе общего для всех трёх путей анализа.

Пусть d, a и b обозначают, соответственно, диаметр, боковые стороны и основание (т. е. стороны треугольника равны a, a, b); найдите уравнение, которое связывает d, a и b и решает одновременно все три задачи: одну – с неизвестным d, другую – с неизвестным b и третью – с неизвестным a. Во всех перечисленных случаях уравнение даёт положительные значения только при определённых условиях. Точно ли соответствуют эти условия геометрической сущности задачи?

Ответ: $4a^4 - 4d^2a^2 + b^2d^2 = 0$.

Комментируя это уравнение, Ньютон пишет: «Отсюда ясно, почему аналитики побуждают нас не проводить различия между данными и искомыми количествами. Ибо, благодаря тому что одинаковое вычисление подходит к любому виду данных и искомых количеств, удобно представлять их себе и сравнивать без какого бы то ни было различия... скорее всего вам удобнее воображать, что вопрос равно касается тех данных и искомых количеств, при помощи которых вы мыслите наиболее легко составить выше уравнение... Отсюда, я думаю, станет очевидным, что математики разумеют, когда они велят вам воображать уже сделанным то, что ищется».

К этой задаче дано много вариантов и для некоторых из них имеется как алгебраические, так и геометрические (в стиле Евклида) решения.

14. Даны стороны BC, AB и основание BC треугольника ABC, и из вершины A на основание опущена высота AD. Найти BD и DC.

Ответ: в стандартных обозначениях длин сторон

$$BD = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.$$

15. Несколько геометрических задач связаны со свойствами прямоугольных треугольников. Мы ограничимся здесь формулировками только двух их них.

1) Даны периметр p и площадь S прямоугольного треугольника. Найти гипотенузу.

Ответ: $p - \dfrac{S}{p}$.

2). Даны периметр p и высота h прямоугольного треугольника, опущенная из прямого угла. Найти треугольник.

Ответ: гипотенуза равна

$$\frac{p^2}{2p + 2h}.$$

Интересны геометрические интерпретации полученного ответа во второй задаче, которые приводит Ньютон: в каждом прямоугольном треугольнике

1) сумма периметра и высоты относится к периметру как половина периметра к основанию;

2) сумма периметра и высоты относится к периметру, как высота к избытку сторон над гипотенузой.

16. Полагая, что даны основание, высота и сумма сторон треугольника, найдите сам треугольник.

Ответ: если $2a$, u, v – стороны треугольника и $u + v = 2d$; h – высота к стороне $2a$, тогда

$$u = d + \frac{a}{d}z, \quad v = d - \frac{a}{d}z,$$

$$z^2 = d^2\left(1 - \frac{h^2}{d^2 - a^2}\right).$$

17. Найти треугольник ABC, три стороны которого AB, AC, BC и высота CH образуют геометрическую прогрессию.

К этой задаче имеется два решения. Первое – алгебраическое и приводит к решению квадратного уравнения, а второе – геометрическое, когда сразу показывается, что такой треугольник является прямоугольным.

18. Окружить пруд $ABCD$ (прямоугольная трапеция) дорожкой данной площади и одинаковой повсюду ширины.

Для определения ширины дорожки автором получено квадратное уравнение.

19. Вписать в данную параболу отрезок данной длины и проходящий через данную точку.

Решение этой задачи сведено к решению уравнения четвёртой степени.

20. Умножить или разделить данный угол на данное число n.

Автор сводит эту задачу к решению алгебраического уравнения степени n, но не анализирует возможность его разрешимости; к возможности графических приёмов необходимых здесь построений он возвращается в книге позже и использует для этого уже не циркуль и линейку (см. ниже).

21. Предполагая, что комета движется прямолинейно и равномерно, определите по трём наблюдениям её траекторию в пространстве.

Более точно эту задачу нужно понимать так. Пусть O – глаз наблюдателя, A, B, C – местоположения кометы, соответственно, при первом, втором и третьем наблюдениях. Из этих наблюдений нам известны углы $\angle AOB = \omega, \angle AOC = \omega'$, время t, прошедшее между первым и вторым наблюдениями, и время t' между первым и третьим. В силу предположения о том, что движение равномерно, $\frac{AB}{AC} = \frac{t}{t'}$. Считая, ω, ω', t, t' данными, найдите угол $\beta = \angle ABO$. (Выразите ω, ω', t, t' через какую-нибудь тригонометрическую функцию угла β, например, $\mathrm{ctg}\beta$.)

Ответ:

$$\mathrm{ctg}\beta = \mathrm{ctg}(\omega' - \omega) - \frac{t\sin\omega'}{t'\sin\omega\,\sin(\omega' - \omega)}.$$

22. Во всяком описанном четырёхугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности расположены на одной прямой. Доказать.

23. Пусть на плоскости даны четыре прямые в общем положении, т. е. никакие две из этих прямых не параллельны, никакие три из них не проходят через одну точку. Тогда середины трёх отрезков, концами которых являются точки попарного пересечения прямых, не лежащих на этих прямых, расположены на одной прямой. Доказать.

Не имея возможности в рамках одной статьи привести даже формулировки задач и комментарии к ним, дальше мы ограничимся только тематическим описанием задач, имеющимся в книге. Условно можно выделить несколько групп задач, которые мы рассмотрим по отдельности.

1) Задачи на поиск геометрических множеств точек с заданным свойством, которые в одних задачах оказываются прямыми линиями, а в других – кривыми второго порядка (эллипс, парабола, гипербола).

2) Окружность Аполлония (задано отношение расстояний от искомой точки до двух данных точек) и различные варианты задачи Аполлония (например, такая: через данную точку провести окружность, которая касается двух данных кругов).

3) Задачи на расположение грузиков на нити при различных возможностях и ограничениях скольжения нити. Здесь же неожиданно появляется следующая хорошо известная задача: *Камень падает в колодец; найти глубину колодца по звуку камня, ударившегося о его дно*. По поводу этой задачи Ньютон пишет: «Вам нужно измерить время T между двумя моментами: первым, когда вы бросаете камень, и вторым, – когда вы слышите звук его удара о дно. Кроме того, вам необходимо знать: скорость звука c, ускорение силы тяжести g. Зная T, c и g, найдите глубину колодца d».

$$\text{Ответ: } d = \left(-\frac{c}{\sqrt{2g}} + \sqrt{\frac{c^2}{2g} + cT}\right)^2.$$

4) Задачи о сталкивающихся шарах, которые приводят к уравнениям различных степеней (иногда, довольно высоких).

5) Задачи, о кометах, к которым Ньютон приводит тщательный ана-

лиз ситуации. Приведём только две из них:

А. В некоторых местах на Земле в точках A, B, C воткнуты три перпендикулярных к плоскости горизонта шеста. Шест в точке A имеет шесть футов, шест в – B восемнадцать, шест в C – восемь. Линия AB имеет длину 33 фута. В некий день года тени шеста A проходят через точки B и C, конец тени шеста B проходит через A и C, а конец тени шеста C проходит через точку A. Найти склонение Солнца и высоту полюса или же день и место, где произошло сказанное.

Чтобы получить ответ (величина склонения Солнца была $19^\circ 27'8''$, а широта места – $80^\circ 45'4''$), автор проводит тщательное исследование, причём разбивает его на две составляющие: алгебраическую и геометрическую.

Б. Комета движется по небу равномерно и прямолинейно. Определить – в согласии с гипотезой Коперника – её расстояние от Земли, направление и скорость движения по её четырём положениям, известным из наблюдения. Сравните с задачей № 21, приведённой выше.

6) Построение кривых второго порядка.

В этой части книги имеется решение четырёх важнейших для приложений задач «на построение одной линейкой»: *а*) описать параболу, проходящую через четыре данные точки; *б*) описать кривую второго порядка, проходящую через пять заданных точек; *в*) описать кривую второго порядка, проходящую через четыре данных точки и касающейся данной прямой; *г*) описать кривую второго порядка, проходящую через три данных точки и касающуюся двух данных прямых.

После того как в книге были решены, обсуждены решения (для некоторых задач их было несколько) 61 задачи, и все они в конечном счёте, сводились к решению уравнений, И. Ньютон мотивирует дальнейшие рассмотрения так: «Я занимался до сих пор решением ряда задач, ибо при изучении наук примеры полезнее правил. Поэтому-то я и отвёл им так много места. Решение некоторых из них, встретившихся мне попутно, пока я излагал остальные, я дал без помощи алгебры, при этом я хотел показать, что в иных задачах, на первый взгляд представляющихся трудными, не всегда следует прибегать к алгебре. Теперь пришло время изложить решение уравнений. Ведь после того как задача приведена к уравнению, вы должны извлечь корни этого уравнения, которые суть величины, удовлетворяющие задаче». После этого начинается раздел, который называется «Как следует решать уравнения» и занимает в книге около 100 страниц. На конкретных примерах здесь разбираются различные вопросы преобразования уравнений, методы решений уравнений третьей и четвёртой степеней, описан поиск рациональных корней алгебраических уравнений с целыми коэффициентами и метод поиска корней вида $a + b\sqrt{p}$. Изучаются также вопросы о числе корней уравнения и границах их расположения на прямой. Наиболее интересен последний параграф книги, которой посвящён графическим (и тем самым, приближённым) методам нахождения корней. Здесь интригует сама постановка задачи: для построений использовать не только прямые и окружности (как они традиционно проводилось с древнейших времён), а прямые и другие кривые. И эти другие кривые могут быть разными: эллипс, парабола, гипербола и некоторые другие кривые «механического происхождения», вычерчивание которых является довольно простым делом. Здесь только в качестве иллюстрации отметим решение задачи о делении угла на три равные части (вообще говоря, неразрешимой при помощи циркуля и линейки), которая решается Ньютоном (а ранее, и другими учёными) при помощи линейки и заранее вычерченной так называемой конхоиды или циссоиды (обе кривые кинематического происхождения, причём, первая – это кривая четвёртого порядка, а вторая – третьего).

3. К первому изданию книги Ньютона «Всеобщая арифметика» было добавлено приложение, написанное Х. Галлеем, другом Ньютона, для восстановления пробела о приближённых численных приёмах решения уравнений (в русский перевод это приложение не вошло).

Для приближённого решения уравнений Ньютон использовал метод, который привёл к методу, который сейчас называется *методом секущих и касательных Ньютона* (он и изложен в приложении). Этот метод, в частности, для приближённого решения уравнения $x^2 - a = 0$ (то есть для приближённого вычисления квадратных корней) предлагает рассмотреть рекуррентную последовательность чисел $\{x_n\}$, которая получается следующим образом: первое приближенное значение x_1 выбирается довольно произвольно «вблизи» точного значения корня, а все остальные члены последовательности вычисляются по правилу:

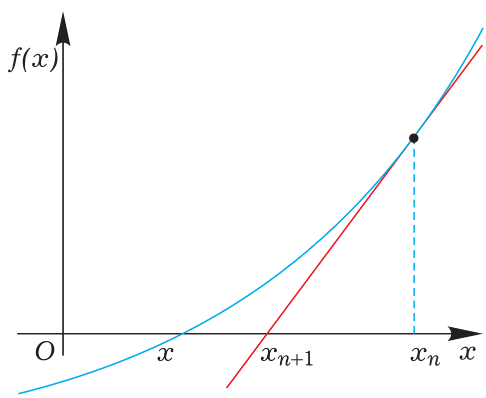
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),\ n = 1,2,3,\ldots$$

Можно показать, что с увеличением n числа x_n все меньше и меньше отличаются от $\sqrt{a}$. Для уравнений общего вида $f(x) = 0$ соответствующая рекуррентная последовательность строится по правилу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 1,2,3,\ldots$$

Эту форму методу придал соотечественник Ньютона и его последователь Д. Рафсон. Сам И. Ньютон разъяснял свой метод приближённого решения уравнений на многочисленных примерах. В частности, для уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$ он для первого приближенного значения $x_1 = 2$ прямыми вычислениями нашёл, что $x_4 \approx 2{,}09455147$, что является значением корня уравнения с восемью верными знаками. Здесь, в частности, сказывается особенность метода Ньютона – его быстрая «сходимость к корню». И. Ньютон не изучал границы применимости этого метода, чему потом было посвящено очень много работ разных учёных, которые продолжаются и до наших дней.

Графическая иллюстрация метода Ньютона для уравнений общего вида $f(x) = 0$ сейчас довольно проста и естественна. Если выбрать какое-то начальное значение x_1, то в качестве следующего приближения x_2 к корню уравнения выбирается точка пересечения касательной к графику функции в точке $(x_1; f(x_1))$ с осью Ox. Аналогично, по уже найденному значению x_n находится x_{n+1} (см. рисунок).



Ньютон не ограничился уравнениями с одной переменной. Он рассмотрел и уравнения вида $f(x, y) = 0$ с двумя переменными, в которых искомой является функция $y = y(x)$, при подстановке которой в уравнение мы получим тождество, справедливое для всех x из некоторого промежутка. Та геометрическая конструкция, которая была предложена при решении этой задачи, сейчас называют *многоугольником Ньютона*. Широта применения этого многоугольника Ньютона для решения многих задач теоретического и практического характера сейчас огромна (подробности см. в [1]).

Но один численный метод Ньютона для приближённого вычисления корней уравнений вида

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

в книге «Всеобщая арифметика» можно усмотреть, и он базировался на рекуррентных формулах для вычисления степенных сумм корней этого уравнения, которые интересны и сами по себе. Например, если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ и $S_k = x_1^k + x_2^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ $(S_0 = 2)$, то по теореме Виета

$$S_0 = 2, S_1 = -p,$$

$$S_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q;$$

для других сумм имеет место формула

$$S_k = -pS_{k-1} - qS_{k-2},$$

которая позволяет последовательно одну за другой вычислять рассматриваемые суммы корней. Отсюда следует, что все суммы S_k выражаются через коэффициенты уравнения. Аналогично дело обстоит и для уравнений более общего вида. Изучение поведения этих сумм позволило Ньютону не только установить интервал, где расположены все действительные корни уравнения, но и предложить алгоритм для нахождения наибольшего из корней (все сказанное Ньютон иллюстрируется только на конкретных примерах). Отметим, что Н.И. Лобачевский глубоко проанализировал эти соображения Ньютона, придав им новую форму, которая сейчас известна как метод Лобачевского для приближённого решения алгебраических уравнений.

4. Во «Всеобщей арифметике» многие задачи приводили к решению уравнений третьей степени, к кривым второго и третьего порядков (см. задачи о нахождении орбиты кометы по наблюдениям, задачу о делении угла на три части и др.). Ещё в студенческие годы (задолго до его чтения лекций по алгебре) Ньютона интересовали кривые третьего порядка, состоящие из точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 +$$

$$+ fxy + gx^2 + hy + kx + l = 0.$$

К вопросу о классификации множества возможных кривых такого типа он возвращался несколько раз. Полученная в итоге Ньютоном впечатляющая классификация состоит в том, что множество кривых третьего порядка состоит из 72 видов (некоторые виды кривых Ньютоном были пропущены и эти пробелы впоследствии были устранены другими учёными). Здесь важно иметь в виду, что Ньютон получил этот результат, используя как чисто геометрические соображения, так и методы аналитической координатной геометрии и, при этом, комбинируя эти две возможности для исследований. В частности, им получен следующий красивый результат: *любая кривая третьего порядка может быть получена при помощи некоторой центральной проекции («тени от светящейся точки») всего одной из пяти конкретных кривых третьего* *порядка.* По этому поводу И. Ньютон пишет: «Если на бесконечную плоскость отбрасывать от светящейся точки тени фигур, то тенями конических сечений всегда будут конические сечения; <...> И совершенно так же, как круг при отбрасывании тени производит все конические сечения, точно так пять расходящихся парабол производят и доставляют все другие кривые второго рода». Отметим, что упомянутое свойство центральной проекции окружности изучал ещё Аполлоний.

Блез Паскаль при изучении кривых второго порядка вида

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

доказал (при помощи одной элегантной геометрической теоремы о «мистическом шестиугольнике», доказанной им в шестнадцатилетнем возрасте), что любая такая кривая определятся своими пятью точками единственным образом. Ньютон, в дополнение к этому классическому результату Паскаля, установил, что *кривая третьего порядка единственным образом определяется своими восьмью точками.*

Приведём ещё одну красивую теорему, полученную Ньютоном для любой алгебраической кривой, сформулировав её только для кривых третьего порядка: *если через некоторую точку O провести две прямые (секущие), которые пересекают кривую третьего порядка в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3, то величина*

$$\frac{OA_1}{OB_1} \cdot \frac{OA_2}{OB_2} \cdot \frac{OA_3}{OB_3}$$

не зависит от положения точки O на плоскости при условии, что направления секущих остаются неизменными.

5. Коротко расскажем две истории, в которых в полной мере проявились интуиция и универсальность гения Ньютона.

1) Легко проверить, что круглую монету можно окружить шестью такими же монетами так, что любая из этих шести монет будет касаться исходной монеты и двух прикладываемых монет.

Поэтому наибольшее число одинаковых кругов на плоскости, которое можно приложить к равному им данному кругу так, чтобы никакие два из них не пересекались (но все они соприкасались с данным кругом), равно 6.

Родственной с этой задачей является такая: *Какое наибольшее число материальных шаров (непересекающихся) можно приложить к равному им данному шару так, чтобы все они своей поверхностью соприкасались с поверхностью данного шара, не пересекая его?*

Ещё в 1611 году И. Кеплер, один из создателей современной астрономии и математики, впервые описал нужное расположение 12 шаров вокруг данного такого же шара. Насчёт 13 шаров в 1964 году разгорелся *спор между естествоиспытателем Дэвидом Грегори и Исааком Ньютоном.* Грегори утверждал, что к шару нельзя приложить 13 равных ему шаров, а Ньютон был с ним не согласен. Прав оказался Ньютон, но выяснилось это окончательно только в 1953 году, когда математически строго было доказано, что 13 шаров к данному шару приложить всё-таки можно (кстати сказать, при помощи теннисных мячей и клея это можно проверить сейчас довольно быстро экспериментально), а 14 шаров уже нельзя. Эта задача «о плотной упаковке шаров» и, особенно в «многомерном случае», оказалась сегодня важной из-за возникших её приложений в различных задачах вычислительной математики и теории связи.

2) В своей знаменитой книге «Математические начала натуральной философии», о которой мы

только упомянули, Ньютон, в частности, обсуждал так называемую аэродинамическую задачу о сопротивлении среды, в которой движется некоторое материальное тело. Сама задача, в её первом приближении, формулируется так: *Найти тело вращения заданной длины и ширины, испытывающее наименьшее сопротивление при движении в некоторой среде*. Здесь следует иметь в виду следующее. Во-первых, имеется в виду тело, являющееся телом вращения вокруг некоторой оси и симметричным относительно плоскости, проходящей через середину оси вращения и перпендикулярной этой оси. Длина тела – это длина по оси вращения, а ширина – радиус серединного сечения тела. При таких соглашениях и ограничениях в задаче можно ограничиться только половиной тела (например, это могут быть половина шара, цилиндра, конус, усечённый конус и др.). Во-вторых, среда, которую имеет в виду Ньютон, является *редкой*, «состоящей из равных частиц, свободно расположенных на равных друг от друга расстояниях». При этом неподвижные частицы имеют равные массы и являются абсолютно упругими шарами. Движущееся тело Ньютон представляет также абсолютно упругим, причём каждый шарик, столкнувшийся с ним, отскакивает от него по закону: угол падения равен углу отражения.

Следуя своему методу решения этой задачи, Ньютон сначала рассматривает её для усечённого конуса (высоты H, радиуса большего основания R и радиуса меньшего основания x). В этом случае рассматриваемая задача сводится к следующей: найти минимум функции

$$f(x) = x^2 + \left(R^2 - x^2\right)\frac{(R-x)^2}{(R-x)^2 + H^2},$$

$$0 \le x \le H.$$

Эта задача сейчас является стандартной (попробуйте её решить самостоятельно). Но тот ответ, который получается, является неожиданным: конус наименьшего сопротивления является усечённым, а не заострённым, причём при малых H меньшее основание этого усечённого конуса образует угол с его боковой поверхностью примерно равный 135°. Комментируя этот вывод, Ньютон отмечает: «Я считаю, что это замечание может быть небесполезно при построении судов».

Решив задачу до конца, Ньютон показал, что и в общем случае, для описанных выше тел вращения качественный ответ получается такой же: тело наименьшего сопротивления в среде, описанной выше, имеет плоскую площадку. Этот ответ (и особенно практические рекомендации Ньютона) вызвал недоверие у учёных того времени и, главным образом, потому, что во-первых, все привычные среды (воздух, вода) не обладает той структурой, которая рассматривалась Ньютоном. Во-вторых, все примеры тел, встречающихся в реальной действительности, такой плоской площадки не имели. В-третьих, здесь у Ньютона возникла задача из так называемой (сейчас) теории оптимального управления, а такие задачи раньше не рассматривались и систематически их стали изучать только спустя 300 лет после Ньютона. Однако в современном мире для расчёта полёта ракет, спутников и космических кораблей все результаты и выводы, полученные Ньютоном, были востребованы и очень пригодились, так как на больших высотах среда как раз и является «редкой». И то, что раньше считалось «заблуждением» или даже «ошибкой» Ньютона, оказалось теорией, стоящей сейчас на передовых рубежах теории космических полётов. В книге [4] по этому поводу её автор пишет: *«…может статься, что мысль Гения, кажущаяся* *нам заблуждением, на самом деле несёт в себе отпечаток истины – доступной ему, но ещё не открывшейся нам».*

6. Наиболее длительный и плодотворный период деятельности Исаака Ньютона связан с Кембриджским университетом. Здесь впервые обнаружил себя его гений, здесь он работал и творил. Можно смело сказать, что он создал этот университет, принеся ему славу крупнейшего центра науки, поднял его на небывалую до этого высоту в области научных достижений уже только тем фактом, что был его студентом, членом его колледжа и профессором.

Надпись на статуе И. Ньютона в Тринити-колледже гласит: «Разумом он превосходил весь род человеческий».

Лагранж, оценивая достижения Ньютона в науке и в истории культуры, говорил, что «Ньютон был счастливейшим из смертных, ибо существует только одна Вселенная, и Ньютон открыл её законы». Примерно так же оценивал достижения гения и Альберт Эйнштейн: *«Ньютон был первым, кто попытался сформулировать элементарные законы, которые определяют временной ход широкого класса процессов в природе с высокой степенью полноты и точности»* и *«…оказал своими трудами глубокое и сильное влияние на всё мировоззрение в целом»*.

М.В. Ломоносов иногда был не согласен с выводами Ньютона, а чаще соглашаясь с ним, выразил своё желание о развитии русской науки, почтительно упоминая имя гения в стихах: *«…Может собственных Платонов и быстрых разумом Невтонов Российская земля рождать»*.

А.Н. Крылов на конференции в честь 300-летия со дня рождения И. Ньютона в 1943 году в своём выступлении говорил о том, что Ньютон *«стоит рядом с Архимедом и выше всех других»*.

Имеется много других лестных и заслуженных характеристик деятельности великого Исаака Ньютона. Сам же он, незадолго до своей кончины, с присущей ему скромностью говорил: *«Не знаю, чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь мальчиком, играющем на морском берегу и развлекающимся тем, что время от времени он находит более блестящий камешек или более красивую ракушку, чем обыкновенно, между тем как весь великий океан истины лежит передо мною неисследованным»*.

Литература

1. *Ньютон И.* Математические работы. Перевод с латинского. Вводная статья и комментарий Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.– Л., 1937.

2. *Вавилов С. И.* Исаак Ньютон. – М.: Издательство Академии наук СССР, 1961.

3. *Ньютон И.* Сборник статей к трёхсотлетию со дня рождения. – М.– Л.: Издательство Академии наук СССР, 1943.

4. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.