Сгибнев Алексей Иванович
Кандидат физико-математических наук, учитель математики школы-интерната «Интеллектуал», г. Москва.

Задача о кубиках, или Кости Зихермана

Этот сюжет необычен для школьной математики. Во-первых, он был изучен около 30 лет назад, тогда как традиционной школьной математике в основном 2 – 2,5 с половиной тысячи лет (Пифагор, Фалес, Евклид) или хотя бы 400 лет (Декарт). Во-вторых, сюжет связывает воедино совсем разные разделы математики – алгебру и комбинаторику.

Упражнением мы будем называть вопрос, который надо продумать, прежде чем читать дальше. **Заданием** – вопрос «в сторону», над которым можно думать независимо от развития сюжета.

Рассмотрим *стандартную* игральную *кость*. Это кубик, на шести гранях которого написаны числа от 1 до 6. Если кубик «честный», то каждое число выпадает с равной частотой. Нам будет удобно говорить, что распределение чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 равно {1, 1, 1, 1, 1, 1}.

Теперь будем подбрасывать два кубика и считать сумму чисел, выпавших на каждом из них. Что будет выпадать чаще?

Чтобы понять это, составим таблицу:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Здесь в «нулевых» строке и столбце написаны числа, выпадающие на кубиках, а на пересечении строк и столбцов – суммы соответствующих чисел. Для удобства одинаковые суммы выделены одинаковым цветом. Видно, что суммы 2 и 12 встречаются по одному разу, 3 и 11 – по два раза, 4 и 10 – по три раза, ..., 7 – шесть раз. Для краткости будем говорить, что распределение сумм для двух кубиков такое: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1}. Чаще всего выпадает сумма семь, реже всего – два и двенадцать.

Задача (основная). *а*) Существуют ли две кости с другими наборами натуральных чисел на гранях, для которых распределение сумм такое же, как и для пары стандартных костей? *б*) Найдите все такие пары нестандартных костей.

Терпеливый читатель может запастись бумагой и попробовать составить таблицу, в которой числа «нулевых» строки и столбца другие, а суммы – такие же и встречаются столько же раз. Подскажем, что один такой набор костей точно есть (мы его приведём ниже). Но если мы его и найдём «вручную», то как проверить, что нет других наборов? Можно попытаться устроить полный перебор, но это задача скорее для программиста.

Задание 1. Могут ли нестандартные кубики быть одинаковыми?

Полное исследование основной задачи требует новой идеи. Как это часто бывает, идея приходит из совсем другого раздела математики.

Производящие функции

Понятие производящей функции введём на совсем простом примере. Рассмотрим две монеты. На одной стороне каждой монеты написано 1, на другой 2. Подбрасываем обе монеты и складываем числа, оказавшиеся на верхних гранях. Даже без таблицы понятно, что возможны суммы 2, 3 и 4 с распределением {1, 2, 1}. (Проверьте!)

Посчитаем произведение следующих многочленов (сейчас нам удобно не опускать единичные коэффициенты и степени):

$$(1x^1+1x^2)(1x^1+1x^2)=1\cdot1\cdot x^{1+1}+$$
$$+(1\cdot x^{1+2}+1\cdot x^{2+1})+1\cdot1x^{2+2}=$$
$$=1x^2+2x^3+1x^4.$$

Заметим, что коэффициенты многочленов соответствуют распределению сумм, а показатели степеней – самим суммам:

(*Количество вариантов*) $x^{\text{сумма}}$.

В самом деле, показатели степеней складываются, как и величины, а коэффициенты перемножаются и складываются, если они при одинаковых степенях, как и распределение сумм.

Определение. *Производящей функцией* для распределения $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ величин (чисел, сумм и т. д.) 1, 2, ..., n называется многочлен

$$s_1x^1+s_2x^2+\ldots+s_nx^n.$$

Мы поняли, что производящая функция для суммы величин равна произведению производящих функций этих величин.

Производящая функция для одной стандартной кости есть

$$L(x)=1x+1x^2+1x^3+1x^4+1x^5+1x^6.$$

А производящая функция для пары стандартных костей есть

$$\left(1x+1x^2+1x^3+1x^4+1x^5+1x^6\right)^2.$$

С другой стороны, мы уже знаем из таблицы, что эта функция равна

$$1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+$$
$$+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12}.$$

Упражнение 1. Вычислите $(L(x))^2$ вручную, проследите, как образуются коэффициенты и сравните с тем, как они образовывались в таблице.

Итак, вместо составления таблицы можно перемножать многочлены!

Упражнение 2. Докажите: чтобы многочлен был производящей функцией для кости (с натуральными числами на гранях), необходимо, чтобы *а*) сумма его коэффициентов равнялась 6, *б*) у многочлена не было свободного члена.

Задание 2. Являются ли условия *а*) и *б*) вместе достаточными?

Теперь мы можем действовать так: попробуем разложить производящую функцию для двух стандартных костей на множители, которые являлись бы производящими функциями для нестандартных костей.

Приступим к выполнению нашего плана.

Разложим производящую функцию одной стандартной кости на множители:

$$1x+1x^2+1x^3+1x^4+1x^5+1x^6=$$
$$=x\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)=$$
$$=x\left(1+x+x^2+x^3\left(1+x+x^2\right)\right)=$$
$$=x(1+x^3)(1+x+x^2)=$$
$$=x(1+x)(1-x+x^2)(1+x+x^2).$$

(Использована группировка и разложение на множители суммы кубов.)

Теперь надо понять, какие многочлены можно составить из полученных множителей.

Целые числа и многочлены: аналогия

Вспомогательная задача 1. Разложите число 30 на два множителя, отличных от 1, всеми возможными способами.

Решение. Разложим 30 на простые множители: $30=2\cdot3\cdot5$.

Теперь любые множители числа 30 можно получить, комбинируя эти числа: $30=(2\cdot3)\cdot5$, $30=2\cdot(3\cdot5)$, $30=3\cdot(2\cdot5)$.

Таким образом, простые числа – это «кирпичики», из которых строятся составные числа.

Попробуем перенести эту идею на многочлены. Заметим, что многочлены и целые числа «ведут себя» очень похоже:

При сложении или вычитании двух целых чисел получается целое число	При сложении или вычитании двух многочленов получается многочлен
При умножении двух целых чисел получается целое число	При умножении двух многочленов получается многочлен
Правда, при делении двух целых чисел может получиться НЕ целое число	Правда, при делении двух многочленов может получиться НЕ многочлен
Однако при делении с остатком целых чисел в неполном частном и остатке получаются целые числа	Однако при делении с остатком многочленов в неполном частном и остатке получаются многочлены

(Математики говорят, что и множество целых чисел, и множество многочленов с операциями сложения и умножения являются *кольцами*.)

Так вот, аналогом простых чисел служат *неприводимые многочлены*:

Простые числа	Неприводимые многочлены
Не раскладываются в произведение двух чисел, больших 1.	Не раскладываются в произведение двух многочленов степени выше нулевой.

Упражнение 3. Приводимы или нет многочлены: x, x^2+1, x^2-1?

Оказывается, *неприводимыми*[1] *являются только многочлены нулевой степени, первой степени, и те многочлены второй степени, у которых нет корней.*

Первые два класса очевидны, третий менее очевиден. И совсем неожиданно, что все многочлены третьей и более высоких степеней раскладываются на множители ненулевой степени с действительными коэффициентами. (Отчасти этот вопрос будет объяснён в дополнении.)

Задание 3. Приведите (разложите на множители) многочлены

$$x^4+2x^2+1,\quad x^4+4.$$

Решение основной задачи

Вернёмся к нашей производящей функции, запишем её сразу для двух стандартных костей:

$$x^2(1+x)^2(1-x+x^2)^2(1+x+x^2)^2.$$

Упражнение 4. Проверьте, что все составляющие её множители – неприводимые многочлены.

Это значит, что все многочлены, на которые мы можем разложить эту функцию, являются произведениями функций

$$f(x)=x,\quad g(x)=1+x,$$

$$h(x)=1-x+x^2,\quad k(x)=1+x+x^2$$

(как во вспомогательной задаче с числами). Итак, каждый из четырёх этих сомножителей мы можем либо поместить в первой степени в обе конструируемые функции, либо во второй степени только в одну из них. Однако если мы хотим при этом получить не просто многочлен, а производящую функцию для нестандартного кубика, то надо соблюсти требования упражнения 2.

Утверждение (*б*) для нас означает, что $f(x)=x$ присутствует в обоих многочленах.

А что означает (*а*)?

Вспомогательная задача 2. Сумма коэффициентов одного многочлена равна 2, а сумма коэффициентов другого равна 3. Докажите, что сумма коэффициентов произведения многочленов равна 6.

Решение 1, техническое. Проведём сначала доказательство для многочленов малых степеней. Перемножим их:

$$\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)\left(b_0+b_1x\right)=$$
$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+$$
$$+\left(a_2b_0+a_1b_1\right)x^2+a_2b_1x^3.$$

Выпишем сумму коэффициентов и преобразуем её:

$$a_0b_0+a_0b_1+a_1b_0+a_2b_0+a_1b_1+a_2b_1=$$
$$=\left(a_0+a_1+a_2\right)\left(b_0+b_1\right)=2\cdot 3=6.$$

Обобщите сами для многочленов произвольной степени.

Решение 2, идейное. Найдём значения многочленов при $x=1$. У первого многочлена это будет 2, а у второго 3. Значит, произведение при $x=1$ имеет значение 6. То есть сумма его коэффициентов равна 6.

[1] Имеется в виду – многочлены с действительными коэффициентами, которые не разлагаются на многочлены меньшей степени с действительными коэффициентами

Итак, мы поняли, что *при перемножении многочленов суммы их коэффициентов также перемножаются*, а ещё – что *сумму коэффициентов удобно находить как значение многочлена при* $x = 1$.

Задание 4. Знакопеременная сумма коэффициентов одного многочлена равна 5, а другого 7. Найти знакопеременную сумму коэффициентов произведения этих многочленов. (*Знакопеременной суммой чисел* a, b, c, d *называется* $a - b + c - d$. *При этом свободный член берём со знаком* +.)

Поскольку
$$f(1) = 1, \quad g(1) = 2, \quad h(1) = 1, \quad k(1) = 3,$$
а нам нужно получить в каждом из конструируемых произведений 6, то ясно, что $g(x)$ и $k(x)$ должны содержаться в обоих произведениях, как и $f(x)$. То есть вся свобода выбора сосредоточилась в функции $h(x)$, и у нас есть два варианта:

а) либо две одинаковые производящие функции: $f(x)g(x)h(x)k(x)$ и $f(x)g(x)h(x)k(x)$,

б) либо две разные: $f(x)g(x)k(x)$ и $f(x)g(x)h^2(x)k(x)$.

Первый случай – это две стандартные кости
$$x(1 + x)(1 - x + x^2)(1 + x + x^2) \text{ и}$$
$$x(1 + x)(1 - x + x^2)(1 + x + x^2),$$
второй – это
$$x(1 + x)(1 + x + x^2) \text{ и}$$
$$x(1 + x)(1 + x + x^2)(1 - x + x^2)^2.$$

Раскрыв скобки, нетрудно посчитать (проверьте!), что этим функциям соответствуют кости с такой таблицей:

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

Цветом выделены одинаковые суммы, чтобы удобно было проверить количество выпадений каждой суммы. Других вариантов нет.

Исследовательское задание 1. *а*) Найдите *три* кости с натуральными числами на гранях, для которых распределение сумм такое же, как у трёх стандартных. *б*) Найдите *все* такие тройки костей.

Исследовательское задание 2. Есть всего пять типов правильных многогранников. Напишем на гранях правильного n-гранника натуральные числа от 1 до n и назовём его стандартным. Перечислите все пары нестандартных *а*) тетраэдров ($n = 4$), *б*) октаэдров ($n = 8$), *в**) додекаэдров ($n = 12$), *г**) икосаэдров ($n = 20$) с распределением сумм таким же, как у пары стандартных.

Ответ для самоконтроля: у тетраэдров есть одна нестандартная пара, у октаэдров – три, у додекаэдров и икосаэдров – по семь. При этом у трёх последних существуют нетривиальные «тройки» нестандартных костей (дающие такое же распределение сумм, как тройки стандартных)!

Интересно также поискать наборы костей разных «гранностей», которые вместе дают одинаковые распределения.

При больших n могут возникнуть сложности с разложением производящей функции. В дополнении изложен метод разложения.

Напоследок заметим, что производящие функции – не просто трюк для решения задачи о кубиках. Это мощный современный метод решения целого класса задач.

Нестандартные кубики были открыты Колонелом Джорджем Зихерманом (отсюда и название «кости Зихермана»). Первое сообщение о них опубликовал в 1978 году Мартин Гарднер – недавно скончавшийся знаменитый популяризатор математики.

Автор благодарен за обсуждение задачи Tommy Chiang (Hong Kong), А. Воронцову, Д. Калинову и Е. Крылову.

Дополнение для тех, кто знаком с комплексными числами

Взглянем на нашу задачу с ещё одной стороны. Для этого понадобится знакомство с комплексными числами, а именно – умение извлекать комплексный корень степени n из 1, понятие о геометрическом представлении комплексных чисел и умение комплексные числа перемножать. Надо также помнить, что если число z_0 является корнем многочлена $P(z)$, то $(z-z_0)$ является множителем $P(z)$.

Заметим, что многочлен

$$L(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6,$$

являющийся производящей функцией для одной стандартной кости, можно записать в виде:

$$L(x) = x\frac{x^6-1}{x-1}.$$

(Это следует из равенства

$$(x-1)\left(x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1\right) = = x^{n+1} - 1,$$

которое можно проверить простым перемножением скобок.)

Рассмотрим функцию комплексного аргумента $L(z)$. Чтобы разложить $L(z)$ на множители, найдём комплексные корни уравнения $z^6 - 1 = 0$. Это числа 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\frac{3\pi}{3}} = -1$, $e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. На комплексной плоскости они расположены в шести вершинах правильного шестиугольника, вписанного в единичную окружность с центром в начале координат (см. рис. 1).

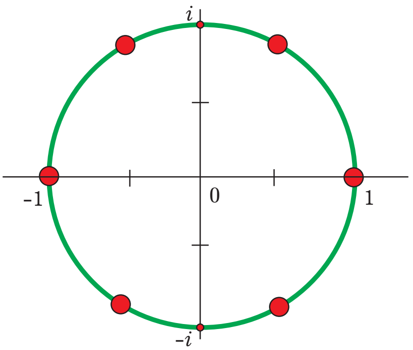
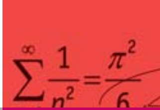


Рис. 1



Поэтому

$$L(z) = z(z+1)(z+e^{i\frac{\pi}{3}})(z+e^{-i\frac{\pi}{3}})\times$$
$$\times(z+e^{i\frac{2\pi}{3}})(z+e^{-i\frac{2\pi}{3}}).$$

(Корень $z = 1$ исчезает при делении на $z - 1$.)

Первые два слагаемые нам знакомы (кстати, теперь понятно, откуда множитель $x + 1$ в производящей функции). А где же спрятаны остальные действительные множители? Надо перемножить пары соседних скобок:

$$(z+e^{i\frac{\pi}{3}})(z+e^{-i\frac{\pi}{3}}) = z^2 + (e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}})z + +1 = z^2 + 2\cos\frac{\pi}{3}z + 1 = z^2 + z + 1, \quad (1)$$

$$(z+e^{i\frac{2\pi}{3}})(z+e^{-i\frac{2\pi}{3}}) = z^2 + (e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}})z + +1 = z^2 + 2\cos\frac{2\pi}{3}z + 1 = z^2 - z + 1. \quad (2)$$

Упражнение 5. Докажите, что если скобки группировать и перемножать по-другому, то не получатся многочлены с действительными коэффициентами.

Теперь проясняется природа неприводимых действительных многочленов. Многочлен на комплексной плоскости всегда раскладывается на линейные множители (это следствие основной теоремы алгебры на комплексной плоскости).

1) Если у многочлена *корень* z_0 *расположен на вещественной оси*, то мы получаем неприводимый множитель $z - z_0$.

2) Если же *корень комплексный*: $z_1 = a + ib$, где $b \neq 0$, то есть и комплексный корень, ему сопряжённый: $z_2 = a - ib$. (Докажите это. Напоминаем, что у многочлена действительные коэффициенты!) Тогда произведение

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - 2az + a^2 + b^2$$

является многочленом с действительными коэффициентами и при этом неприводимым (проверьте, что дискриминант отрицательный). Других случаев нет.

С помощью описанной техники можно попытаться решить обобщённую задачу – для двух *рулеток* с n секторами. Пусть на стандартной рулетке на n равных секторах расставлены натуральные числа от 1 до n. Подразумевается, что все числа выпадают равновероятно, т. е. распределение величин для одной рулетки: {1, 1, ..., 1}.

Исследовательское задание 3. Перечислить пары нестандартных рулеток с n секторами с натуральными числами, для которых распределение сумм такое же, как для пары стандартных рулеток.

План действий. Нетрудно обобщить формулы (1), (2) для случая корней n-й степени из 1 и получить производящие функции для стандартной рулетки с n секторами. (Случаи чётного и нечётного n удобно рассматривать отдельно.) Тем самым мы решим вопрос о разложении функции на неприводимые множители. Однако дальше встанет вопрос о натуральности её коэффициентов. Например, при $n = 4$ («игральные тетраэдры») нестандартная пара легко получается. А вот при $n = 5$ в неприводимых множителях возникают иррациональные коэффициенты. Это означает, что при комбинировании множителей надо проверять, получатся ли в итоге натуральные коэффициенты. Как кажется, эта задача не имеет общего решения, надо рассматривать каждое значение n отдельно. Возможно, здесь полезнее будут сами навыки работы с комплексными числами, чем результат.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Мир будущего будет миром всё более упорной борьбы за устранение барьеров, ограничивающих наш разум.

Р. Винер

Границ научному познанию и предсказанию предвидеть невозможно.

Д.И. Менделеев

Смелые мысли играют роль передовых шашек в игре; они гибнут, но обеспечивают победу.

И. Гёте

Единственная сила, которую можно применять всегда – это сила разума...

А.А. Любищев

Моя вера – это вера в то, что счастье человечеству даёт прогресс науки.

И.П. Павлов

Лишь тот обогащает человечество, кто помогает ему познать себя, кто углубляет его творческое самосознание.

С. Цвейг

Если у вас есть яблоко и у меня есть яблоко, и если мы обменяемся ими, то у вас и у меня останется по одному яблоку. А если у вас есть идея и у меня есть идея, и мы обменяемся ими, то у каждого будет по две идеи.

Б. Шоу

Человечество было сформировано не императорами, жрецами, полководцами, а теми, кто создал колесо, самолёт, кто нашёл злаки, проводники, радиоволны.

Д.А. Гранин