**Демидова Анна Андреевна**
*Студентка первого курса*
*Механико-математического факультета*
*МГУ им. М.В. Ломоносова.*

# Задача о касающихся окружностях

В статье в общем виде разбирается сложная и красивая геометрическая задача. В ходе решения рассматриваются частные случаи взаимного расположения различных элементов, фигурирующих в условии задачи, а также доказываются и используются теоремы Птолемея и Стюарта.

В 2015 году на ЕГЭ предлагалась такая задача:

Две окружности касаются внутренним образом в точке $A$, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда $BC$ большей окружности касается меньшей в точке $P$. Хорды $AB$ и $AC$ пересекают меньшую окружность в точках $M$ и $K$ соответственно.

а) Докажите, что прямые $KM$ и $BC$ параллельны.

б) Пусть $L$ – точка пересечения отрезков $KM$ и $AP$. Найдите $AL$, если радиус большей окружности равен 34, а $BC = 32$.

Чертёж пришлось делать от руки, так как на ЕГЭ линейка остаётся в одиночестве без своего геометрического спутника – циркуля. А он весьма необходим в случае касающихся окружностей.

На экзамене удалось решить только пункт а) задачи следующим образом.

Пусть $A_1$ – это точка пересечения продолжения радиуса $OA$ с большей окружностью. Из подобия треугольников $ABA_1$ и $AMO$ по двум углам ($\angle OAM = \angle A_1AB$ и $\angle OMA = \angle A_1BA$) следует, что

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AO}{AA_1} = \frac{1}{2},$$

откуда $AM = \dfrac{AB}{2}$. Из подобия треугольников $ACA_1$ и $AKO$ по двум углам ($\angle OAK = \angle A_1AC$ и $\angle OKA = \angle A_1CA$) следует, что

$$\frac{AK}{AC} = \frac{AO}{AA_1} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$AK = \frac{AC}{2}.$$

Значит, отрезок $MK$ является средней линией треугольника $ABC$, следовательно, $MK$ параллельно $BC$.

Красивая задача осталась в памяти и просто требовала быть решённой до конца. И это получилось сделать после экзамена с помощью хороших и крупных чертежей, выполненных циркулем и линейкой.

Задачу будем решать в общем виде. Пусть $OA = R$ ($R$ – радиус большей окружности),

$$BC = a,\quad AC = b,\quad AB = c.$$

Обозначим искомую величину как $AL = x$.

## 1. Частные случаи

Сначала рассмотрим задачу в двух частных случаях.

*Первый случай*: точка $P$ совпадает с точкой $O$ – центром большей окружности (рис. 1). Очевидно, что тогда $x = R/2$.

*Второй случай*: точка $B$ совпадает с точкой $A_1$ (рис. 2). Из прямоугольного треугольника $O_1PB$ следует, что

$$\sin(\angle PBO_1) = \left(\frac{R}{2}\right)\Big/\left(\frac{3R}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Очевидно, что величина угла $\angle PO_1A$ равна $\dfrac{\pi}{2} + \arcsin\dfrac{1}{3}$.

Применим к треугольнику $PO_1A$ теорему косинусов:

$$AP^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - $$

$$- 2\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{R^2}{2}\cdot\left(1 + \sin(\arcsin\frac{1}{3})\right) = \frac{4R^2}{6},$$

откуда получим, что

$$x = \frac{R}{\sqrt{6}}.$$

По соображениям симметрии рассматриваем только верхнюю половину меньшей окружности (точка $P$ лежит на ней). Если точка $P$ совпадает с точкой $A$, то имеем вырожденный случай: $x = 0$.

При движении точки $P$ против часовой стрелки $x$ увеличивается до максимального значения, равного $\dfrac{R}{2}$ (рис. 1).

Для дальнейшего решения потребуются две важные теоремы планиметрии: *теорема Птолемея* и *теорема Стюарта.*

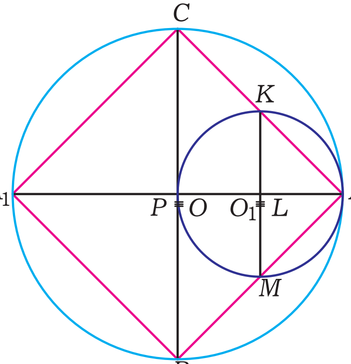


*Рис. 1*

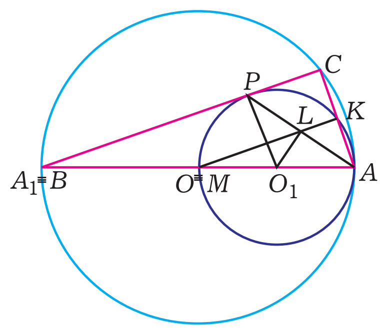


*Рис. 2*

## 2. Теорема Птолемея

Клавдий Птолемей – древнегреческий астроном, математик, механик, оптик, географ.

*Теорема Птолемея*: Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений его противоположных сторон:

$$ef = ac + bd.$$

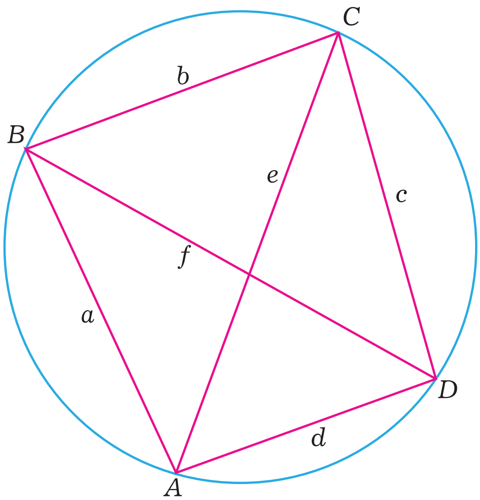


*Рис. 3*

**Доказательство.** Применим к треугольнику $ACD$ (рис. 3) теорему косинусов:

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\angle ADC).$$

Учтём, что угол

$$\angle ABC = \pi - \angle ADC$$

и

$$\cos(\angle ABC) =$$
$$= \cos(\pi - \angle ADC) = -\cos(\angle ADC).$$

Тогда из треугольника $ABC$ по теореме косинусов имеем:

$$e^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\angle ADC).$$

Исключив $\cos(\angle ADC)$ из двух равенств для $e^2$, получим:

$$e^2(ab + cd) =$$
$$= abc^2 + abd^2 + cda^2 + cdb^2 =$$
$$= ac(bc + ad) + bd(ad + bc) =$$
$$= (ac + bd)(ad + bc).$$

Отсюда:

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

Аналогичным образом для $f^2$ имеем:

$$f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Перемножая почленно равенства для $e^2$ и $f^2$, получим

$$(ef)^2 = (ac + bd)^2,$$

откуда

$$ef = ac + bd.$$

Теорема доказана.

## 3. Теорема Стюарта

Теорема названа по имени английского математика М. Стюарта, доказавшего и опубликовавшего её в труде «Некоторые общие теоремы» (1746, Эдинбург).

*Теорема Стюарта*: Если точка $D$ лежит на стороне $BC$ треугольника $ABC$ (рис. 4), то

$$AD^2 = \frac{BD \cdot CA^2 + DC \cdot AB^2}{BD + DC} - BD \cdot DC.$$

**Доказательство.** На рис. 4 представлен треугольник $ABC$. Пусть высота треугольника равна $h$, $D$ – точка, лежащая на стороне $BC$ треугольника $ABC$ и выбранная произвольным образом. Найдём выражение для $AD^2$ через $BD$, $DC$, $AB$ и $CA$.

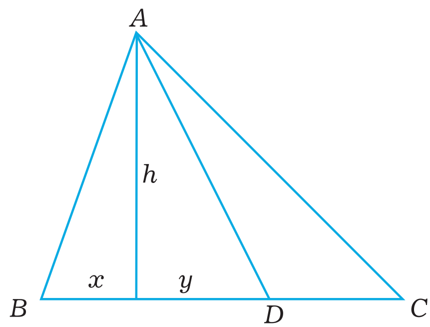


*Рис. 4*

Основание высоты $h$ делит отрезок $BD$ на отрезки $x$ и $y$. Длины сторон треугольника, высоты $h$ и отрезков $x$ и $y$ можно связать с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2+h^2=AB^2, \\ y^2+h^2=AD^2, \\ (y+DC)^2+h^2=CA^2, \\ x+y=BD. \end{cases}$$

Вычтем сначала первое уравнение из второго, а затем – второе уравнение из третьего, получим систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} y^2-x^2=AD^2-AB^2, \\ (y+DC)^2-y^2=CA^2-AD^2, \\ x=BD-y. \end{cases}$$

Так как $y+x=BD$, то:

$$\begin{cases} (y-x)\cdot BD=AD^2-AB^2, \\ DC\cdot(y+DC+y)=CA^2-AD^2, \\ x=BD-y. \end{cases}$$

Подставив $x=BD-y$ из третьего уравнения в первое и выполнив преобразования, получим:

$$\begin{cases} 2y=BD+\dfrac{AD^2-AB^2}{BD}, \\ 2y=-\,DC+\dfrac{CA^2-AD^2}{DC}. \end{cases}$$

Приравняем правые части уравнений системы:

$$BD+\frac{AD^2-AB^2}{BD}=-DC+\frac{CA^2-AD^2}{DC}.$$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{BD^2+AD^2-AB^2}{BD}=\frac{CA^2-AD^2-DC^2}{DC}.$$

Приведём обе части полученного уравнения к общему знаменателю:

$$BD^2\cdot DC+AD^2\cdot DC-AB^2\cdot DC=$$
$$=CA^2\cdot BD-AD^2\cdot BD-DC^2\cdot BD.$$

Выразим $AD^2$ из последнего уравнения:

$$AD^2=\frac{BD\cdot CA^2+DC\cdot AB^2}{BD+DC}-BD\cdot DC.$$

Теорема доказана.

## 4. Общий случай

Из теоремы Фалеса сразу следует, что $AL=PL$.

По теореме о касательной и секущей, применённой к касательной $BP$ и секущей $BA$, а также к касательной $CP$ и секущей $CA$, имеем:

$$BP^2=\frac{c^2}{2} \text{ и } PC^2=\frac{b^2}{2}.$$

Так как $BP+PC=a$, то легко находим, что $b+c=a\sqrt{2}$.

По *теореме Стюарта*, применённой к треугольнику $ABC$ и отрезку $AP$, имеем:

$$AP^2=\frac{BP\cdot b^2+PC\cdot c^2}{a}-BP\cdot PC,$$

откуда легко получим, что $bc=8x^2$.

Далее общий случай разбивается на 2 варианта:

1. Точка $B$ лежит выше точки $A_1$.
2. Точка $B$ лежит ниже точки $A_1$.

*Вариант 1.* Применяя к четырёхугольнику $ACBA_1$ (рис. 5) теорему Птолемея и воспользовавшись уравнениями, полученными в предыдущем пункте, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} b+c=a\sqrt{2}, \\ bc=8x^2, \\ 2Ra+b\sqrt{4R^2-c^2}=c\sqrt{4R^2-b^2}. \end{cases}$$

Возводя первое и третье уравнения системы в квадрат, получим:

$$\begin{cases} b^2+c^2+2bc=2a^2, \\ bc=8x^2, \\ 4R^2\left(b^2+c^2\right)-2b^2c^2-2bc\sqrt{16R^4-4R^2\left(b^2+c^2\right)+b^2c^2}=4R^2a^2. \end{cases}$$

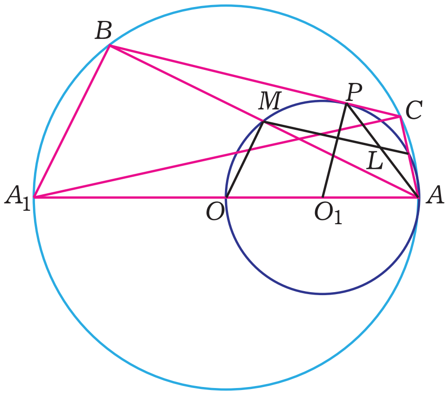


*Рис. 5*

Обозначив для краткости $bc = t$ и исключив слагаемое $b^2 + c^2$, получим:

$$\frac{2R^2a^2}{t} - t - 4R^2 =$$
$$= \sqrt{t^2 + 8R^2t + 16R^4 - 8R^2a^2}.$$

Очевидно, что

$$\frac{2R^2a^2}{t} - t - 4R^2 > 0.$$

Отметим, однако, что решение последнего уравнения существует, исходя из геометрических соображений. Если возвести обе части последнего уравнения в квадрат, то после приведения подобных членов получим квадратное уравнение

$$t^2 - 4R^2t + R^2a^2 = 0$$

с корнями

$$t_1 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2}$$

$$\text{и } t_2 = 2R^2 + R\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Соответственно

$$x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - R\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}}$$

$$\text{и } x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + R\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}},$$

так как $bc = t$ и $bc = 8x^2$.

Решение $x_2$ не удовлетворяет условию задачи, так как $x_2 > \frac{R}{2}$, а решение $x_1$ – удовлетворяет, так как $x_1 < \frac{R}{2}$.

Несложно проверить, что при этом

$$\frac{2R^2a^2}{t_1} - t_1 - 4R^2 =$$
$$= R\left(3\sqrt{4R^2 - a^2} - 2R\right) > 0.$$

*Вариант 2.* Применяя к четырёхугольнику $ACA_1B$ (рис. 6) теорему Птолемея, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} b + c = a\sqrt{2}, \\ bc = 8x^2, \\ 2Ra = b\sqrt{4R^2 - c^2} + c\sqrt{4R^2 - b^2}. \end{cases}$$

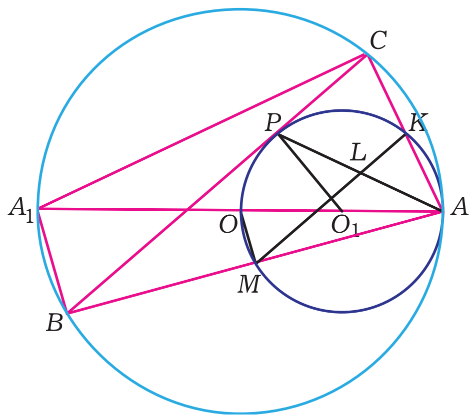


*Рис. 5*

Решение данной системы во многом похоже на только что приведённое в варианте 1. Аналогично положим $bc = t$ и исключим слагаемое $b^2 + c^2$. В результате получим уравнение

$$t + 4R^2 - \frac{2R^2a^2}{t} =$$
$$= \sqrt{t^2 + 8R^2t + 16R^4 - 8R^2a^2},$$

которое после возведения в квадрат и приведения подобных членов сводится к уже решённому квадратному уравнению

$$t^2 - 4R^2t + R^2a^2 = 0.$$

Как и в варианте 1, получим, что искомым решением $x$ является только

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - R\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}}.$$

Хотя существование решения следует из геометрических соображений, читатель легко проверит, что

$$t_1 + 4R^2 - \frac{2R^2a^2}{t_1} =$$

$$= R\left(2R - 3\sqrt{4R^2 - a^2}\right) > 0.$$

Подставляя данные числовые значения, вычислим, что $x = \sqrt{34}$.

Решение и исследование в общем виде красивой и сложной геометрической задачи успешно завершено.

## Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

### Роковая ошибка

Классный руководитель сообщил отцу по телефону о плохом поведении сына. Тот долго беседовал с сыном и в конце концов спросил:

– Ты понял, что неправильно вёл себя?

– Да, я совершил ошибку.

Чтобы удостовериться в осознании сыном недопустимости нарушения школьной дисциплины, отец задал ещё вопрос:

– Какую же?

– Я дал твой номер телефона.

### Признак «троечки»

Студент вытаскивает экзаменационный билет, читает его и кладёт на стол. Берёт другой билет, читает его и снова возвращает на место. Затем третий – с тем же результатом. После чего молча уходит. Экзаменаторы хотят поставить ему «двойку», но один из них говорит:

– По-моему, «троечку» ему поставить можно.

– За что же? – недоумевают остальные.

– Он ведь что-то искал, значит, что-то знает.