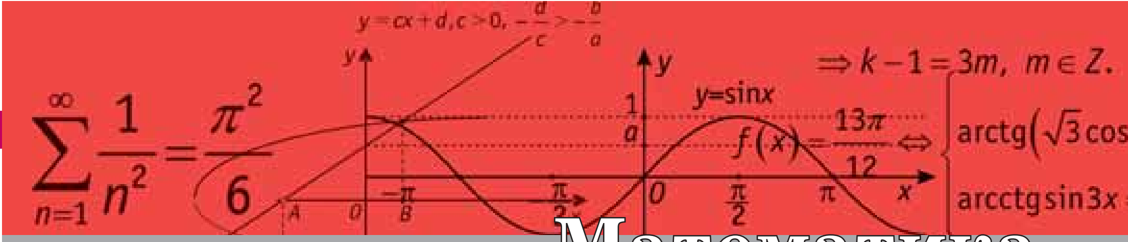


Беклемишева Людмила Анатольевна
Доктор физико-математических наук, профессор. (С 1956 г. по 2000 г. работала на кафедре высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ).)

Задача Вовы

Введение

Не всякая задача, постановка которой проста, легко решается. Иногда существует элементарное решение в виде формулы, которое можно выписать явно, но его аккуратное исследование довольно трудоёмко.

Вот пример задачки, которую придумал один мой знакомый девятиклассник.

Дан остроугольный треугольник, и пусть отрезок MN соединяет точку пересечения его высот с точкой пересечения биссектрис. Возможно ли, что отрезок MN окажется параллельным одной из сторон треугольника? Если да, то при каких условиях? Как его вычислить?

При решении физических задач впереди всегда идёт эксперимент. Теперь и в математике есть возможность проводить эксперименты: получать решение при помощи компьютера. Вот и мы сначала получили компьютерную картинку треугольника, в котором необходимый отрезок имеется, и даже убедились, что таких картинок можно нарисовать много.

В этой заметке я собираюсь привести подробное «алгебраическое» решение задачи. А кто-нибудь из вас, может быть, сам нарисует решение с помощью компьютера или даже придумает геометрическое решение. Было бы также неплохо, если бы кто-то сам попытался придумывать задачки и сделал попытки их самостоятельно решать.

Приступим. Но начнём, однако, с геометрического исследования задачи для некоторых знакомых нам замечательных типов треугольников.

1. Простые случаи

Треугольник, как обычно, обозначаем ABC. Считаем, конечно, известным, что все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, так же, как и высоты. Точку пересечения высот будем обозначать через M, точку пересечения биссектрис через N. Скажем, что треугольник «хороший», если отрезок MN параллелен одной из его сторон, и «плохой» в другом случае.

Прямые, содержащие стороны треугольника BC, AC, AB, а также искомый отрезок MN обозначаем

a, b, c, l соответственно. Заметим, что «плохие» треугольники характерны тем, что для них прямая l пересекает каждую из прямых a, b, c.

Рассмотрим случаи, когда треугольник равносторонний, равнобедренный, прямоугольный или тупоугольный.

1. Равносторонний треугольник (рис. 1). В этом случае биссектрисы равны высотам, значит, интересующий нас отрезок MN превращается в точку. Это особенный случай, о нём поговорим попозже.

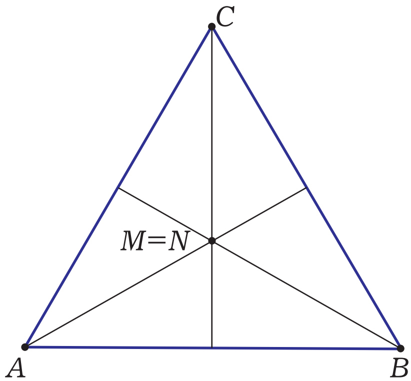


Рис. 1

2. Пусть треугольник ABC равнобедренный, но не равносторонний: $|AC|=|BC|\neq|AB|$ (рис. 2). Высота CP пересекает стороны AC и BC в

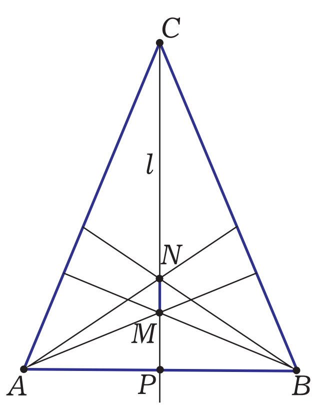


Рис. 2

точке C, а сторону AB в её середине. В этом случае высота CP совпадает с биссектрисой угла C. Поэтому и точка пересечения биссектрис, и точка пересечения высот, и весь отрезок MN лежат на CP. Следовательно, прямая пересекает все стороны треугольника. Таким образом, равнобедренные треугольники «плохие».

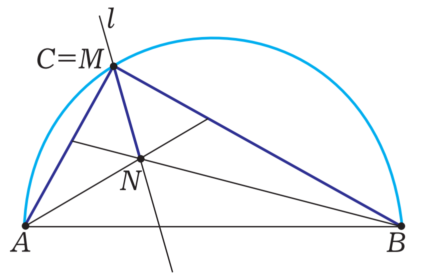


Рис. 3

3. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой (рис. 3). В таком треугольнике катеты AC и BC суть высоты, а их точка пересечения C совпадает с M. Значит, прямая l, содержащая отрезок MN, пересекает оба катета треугольника. Теперь заметим, что точка пересечения биссектрис любого треугольника лежит внутри треугольника, и любая прямая, содержащая такую точку, пересекает границу треугольника в двух различных точках. Поэтому прямая l пересекает также и гипотенузу AB. Значит, прямоугольные треугольники «плохие», отрезок MN не параллелен ни одной из сторон.

4. Наконец, тупоугольные треугольники также «плохие». Сделаем чертёж (рис. 4).

На чертеже длина AC меньше длины BC, противоположный случай аналогичен, а случай равенства уже рассмотрен.

В треугольнике ABC угол C тупой, поэтому две высоты лежат

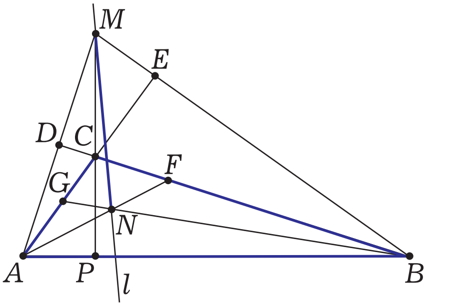


Рис. 4

вне треугольника. В точке M пересекаются прямые m и n, которые являются продолжениями высот, опущенных из вершин A и B на прямые a, b – продолжения сторон BC и AC. Точка N, как всегда, вместе с биссектрисами лежит внутри треугольника. Замечательно, что точки M и N расположены теперь внутри противоположных вертикальных углов, образованных прямыми a и b.

Поэтому прямая l, соединяющая точки M и N, пересекает обе прямые a и b. То, что прямая l пересекает и сторону AB, обнаруживается так же, как и в случае 3. Отсюда заключаем, что и тупоугольные треугольники «плохие».

Возможно, такие выводы натолкнут некоторых на мысль, что вообще задача решений не имеет. Но наше рассуждение просто показывает, что условие остроугольности треугольника выдвинуто при постановке задачи не зря: оно является необходимым для того, чтобы была надежда на положительное решение.

2. Вывод основного уравнения

Разобравшись с некоторыми случаями, мы вникли в проблему. Теперь с помощью компьютера нарисуем «хороший» треугольник. Мы уже знаем, что он остроугольный и все стороны такого треугольника различны.

На рис. 5 BD и CP – высоты, AF и BG – биссектрисы. Отрезок MN соединяет точки пересечения высот и биссектрис. На рис. 5 он параллелен стороне AB: $MN \parallel AB$.

Задача состоит в том, чтобы найти условия, при которых свойство $MN \parallel AB$ имеет место. Это условие можно выразить через связи между сторонами треугольника, или через

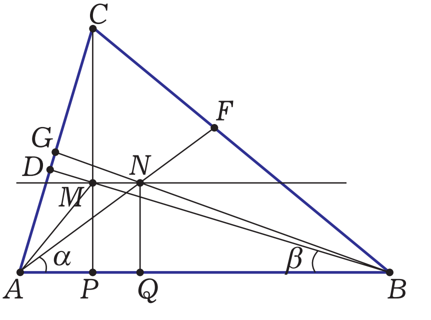


Рис. 5

связи между его углами, или какнибудь иначе. В дальнейшем мы примем за главные параметры треугольника половины величин углов A и B. Введя перпендикуляр NQ к стороне AB, замечаем, что условие $MN \parallel AB$

выполняется тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$|NQ| = |MP|.$$

Геометрического решения задачи не видно. Постараемся найти решение в алгебраической форме. Для упрощения записи введём обозначения длин отрезков и величин углов треугольника:

$$|AP| = x,\ |BQ| = y,\ |CP| = h,$$

$$|MP| = u,\ |NQ| = v,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = z,\ \operatorname{tg}\beta = w.$$

(К сожалению, запись значений углов не совсем аккуратна, но соответствует школьному обыкновению не различать углы и их размеры.)

Не ограничивая общности, мы можем принять длину отрезка AB за единицу измерения. Тогда

$$|BP| = 1 - x,\ |AQ| = 1 - y.$$

В наших обозначениях условие $|NQ| = |MP|$ выглядит как $u = v$.

Мы будем искать соотношение между углами A и B, которое обеспечивает равенство $u = v$. Это соотношение выразим через величины w и z.

Так как в нашем треугольнике углы A и B острые, то

$$0 < w < 1 \quad \text{и} \quad 0 < z < 1.$$

Такие w и z будем называть «допустимыми». Через допустимые w и z однозначно выражаются величины углов A и B:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}A = \frac{2z}{1 - z^2},$$

$$\operatorname{tg}2\beta = \operatorname{tg}B = \frac{2w}{1 - w^2}.$$

Найдём связь между величинами u, v и w, z. Заметим, что следующие треугольники подобны:

$$\Delta BMP \sim \Delta CAP \ \text{ и } \ \Delta AMP \sim \Delta BPC.$$

Поэтому верны соотношения

$$\operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}A = \frac{h}{x} = \frac{1 - x}{u} \quad \text{и}$$

$$\operatorname{tg}2\beta = \operatorname{tg}B = \frac{h}{1 - x} = \frac{x}{u}.$$

Складываем правые и левые части этих равенств и получаем

$$\frac{1}{u} = \operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\beta.$$

Вычисляем v, рассматривая треугольники BQN и NQA:

$$\frac{y}{v} = \operatorname{ctg}\beta,\ \frac{1 - y}{v} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Сложим правые и левые части этих равенств:

$$\frac{1}{v} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta.$$

Искомое условие $u = v$ теперь можно записать так:

$$\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\beta = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta.$$

Используя формулы $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\operatorname{tg}\alpha = z$, $\operatorname{tg}\beta = w$ и

$$\operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}A = \frac{2z}{1 - z^2},$$

$$\operatorname{tg}2\beta = \operatorname{tg}B = \frac{2w}{1 - w^2},$$

получаем

$$\frac{2w}{1 - w^2} + \frac{2z}{1 - z^2} = \frac{1}{w} + \frac{1}{z}.$$

Преобразуем уравнение, отбрасывая неравные нулю множители и не забывая, что нас интересуют только допустимые значения величин z и w, для которых справедливы неравенства $0<w<1$ и $0<z<1$. Мы получаем уравнение

$$2wz(1-wz)=\left(1-w^2\right)\left(1-z^2\right),$$

которое можно назвать «основным».

3. Решение и исследование основного уравнения

Основное уравнение содержит две неизвестные величины w и z. Решениями таких уравнений называются пары чисел, превращающие уравнение в тождество при подстановке вместо неизвестных величин. Всевозможные пары допустимых значений w, z, которые удовлетворяют основному уравнению

$$2wz(1-wz)=\left(1-w^2\right)\left(1-z^2\right),$$

определяют углы всевозможных «хороших» треугольников. Задав одну из величин w, z, можно искать другую из основного уравнения.

В основное уравнение переменные z и w входят симметрично, но для определённости будем считать w аргументом, или параметром, а z – неизвестной величиной. Запишем основное уравнение в форме

$$z^2\left(3w^2-1\right)-2zw+\left(1-w^2\right)=0.$$

Сначала рассмотрим особый случай:

$$\left(3w^2-1\right)=0,\ \text{т.е.}\ w=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Допустимое $w=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Уравнение

$$z^2\left(3w^2-1\right)-2zw+\left(1-w^2\right)=0$$

превращается в $\dfrac{2z}{\sqrt{3}}=1-\dfrac{1}{3}$, откуда получаем допустимое $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Далее по формулам

$$\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}A=\frac{2z}{1-z^2},$$

$$\operatorname{tg}2\beta=\operatorname{tg}B=\frac{2w}{1-w^2}$$

находим $\angle A=60^\circ$, $\angle B=60^\circ$. Третий угол треугольника ABC, очевидно, также равен 60°, т.е. треугольник равносторонний. С ним мы уже знакомы. В равностороннем треугольнике точки пересечения биссектрис и высот совпадают, отрезок MN превращается в точку. Позднее мы поговорим о том, можно ли объявить такой треугольник «хорошим».

А пока забудем о $w=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и будем считать, что область допустимых значений w состоит из двух интервалов: $0<w<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<w<1$.

Решаем уравнение

$$z^2\left(3w^2-1\right)-2zw+\left(1-w^2\right)=0:$$

$$z=\frac{1}{3w^2-1}\left(w\pm\sqrt{w^2-\left(3w^2-1\right)\left(1-w^2\right)}\right).$$

Разделим знаки и упростим подкоренное выражение:

$$z=\frac{1}{3w^2-1}\left(w+\sqrt{3w^4-3w^2+1}\right),$$

$$z=\frac{1}{3w^2-1}\left(w-\sqrt{3w^4-3w^2+1}\right).$$

Займёмся исследованием двух последних формул на множествах

$$0<w<\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}<w<1.$$

Ответим на вопросы: дают ли полученные нами формулы вещественные решения и всегда ли эти решения допустимы? Так как

$$3w^4-3w^2+1=3\left(w^4-w^2+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=$$

$$=3\left(w^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>0,$$

то при всех значениях w решения для

$$z=\frac{1}{3w^2-1}\left(w+\sqrt{3w^4-3w^2+1}\right) \text{ и}$$

$$z=\frac{1}{3w^2-1}\left(w-\sqrt{3w^4-3w^2+1}\right)$$

существуют.

Проверим, будут ли значения z допустимыми, т.е. удовлетворяют ли они неравенству $0<z<1$, если допустимы значения w, т.е. если w принадлежат множествам

$$0<w<\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}<w<1.$$

1) Рассмотрим формулу

$$z=\frac{1}{3w^2-1}\left(w+\sqrt{3w^4-3w^2+1}\right).$$

Проследим за знаком z. Так как допустимые значения w положительны, то числитель формулы положителен и знак z совпадает со знаком знаменателя $3w^2-1$. Следовательно, $z<0$ при $0<w<\frac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому на интервале $0<w<\frac{1}{\sqrt{3}}$ рассматриваемая формула не даёт допустимых значений z.

А на втором интервале $\frac{1}{\sqrt{3}}<w<1$, оказывается, не выполняется второе требование допустимости z, которое, напомню, состоит в том, что $z<1$. Чтобы это обнаружить, применим так называемый метод доказательства «от противного». Допустим, что для некоторого w из нашего интервала справедливо неравенство

$$z=\frac{1}{3w^2-1}\left(w+\sqrt{3w^4-3w^2+1}\right)<1.$$

Выпишем цепочку следствий из этого предполагаемого неравенства:

$$w+\sqrt{3w^4-3w^2+1}<3w^2-1,$$

$$\sqrt{3w^4-3w^2+1}<3w^2-w-1.$$

Так как обе части неравенства положительны, его можно возвести в квадрат. Получим:

$$3w^4-3w^2+1<$$

$$<9w^4+w^2+1-6w^3-6w^2+2w,$$

$$6w^4-6w^3-2w^2+2w>0,$$

$$w\left(3w^2-1\right)(w-1)>0.$$

Но последнее неравенство на рассматриваемом интервале значений w невозможно! Значит, наше предположение неверно, следовательно, $z\geq 1$ и недопустимо при каждом w из интервала $\frac{1}{\sqrt{3}}<w<1$.

Таким образом, формула

$$z=\frac{1}{3w^2-1}\left(w+\sqrt{3w^4-3w^2+1}\right)$$

на всём множестве $0<w<\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}<w<1$ не даёт допустимых решений и должна быть отброшена. Заметим, что выписывая цепочку следствий, мы не искали всех решений неравенства

$$z=\frac{1}{3w^2-1}\left(w+\sqrt{3w^4-3w^2+1}\right)<1,$$

нашей целью было только обнаружить в нём противоречие.

2) Исследуем формулу

$$z=\frac{1}{3w^2-1}\left(w-\sqrt{3w^4-3w^2+1}\right).$$

Теперь нам будет удобно преобразовать её правую часть. Для этого временно обозначим дискриминант $3w^4-3w^2+1$ буквой D. Заметим, что

$$\left(w-\sqrt{D}\right)\left(w+\sqrt{D}\right)=$$
$$=w^2-D=4w^2-3w^4-1=$$
$$=\left(3w^2-1\right)\left(1-w^2\right).$$

Поэтому исследуемую формулу, умножив и разделив её правую часть на $w+\sqrt{D}$, можно записать в виде

$$z=\frac{1-w^2}{w+\sqrt{D}}.$$

Становится очевидным неравенство $z>0$ при всех допустимых w. Убедимся, что при таких w выполнено и второе требование допустимости z: $z<1$. Для этого снова применим «метод доказательства от противного», воспользовавшись полученным нами удобным выражением для z. Предположим, что хотя бы для одного допустимого w

$$z=\frac{1-w^2}{w-\sqrt{D}}\geq 1.$$

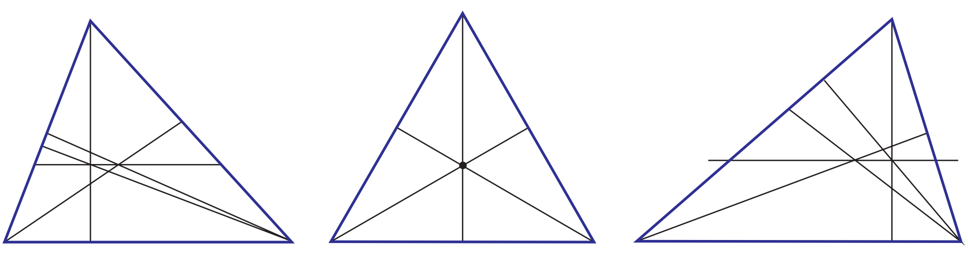
Выписываем цепочку следствий, аналогичную приведённой выше:

$$1-w^2\geq w+\sqrt{3w^4-3w^2+1},$$
$$\sqrt{3w^4-3w^2+1}\leq 1-w-w^2,$$
$$w\left(w^2-1\right)\left(w-1\right)\leq 0.$$

Мы пришли к противоречию с допустимостью w, что и требовалось.

Суммируя результаты проведённого исследования, делаем вывод, что исследуемая формула исчерпывает все допустимые решения основного уравнения. Каждая пара допустимых величин w, z определяет пару углов A, B искомого «хорошего» треугольника. Таким образом, мы получаем всевозможные решения поставленной в начале задачи.

Иллюстрация общей картины на рис. 6 *а*, *б*, *в*.



а *б* *в*

Рис. 6

4. Некоторые замечания

1. Обратим внимание на то, что основное уравнение

$$2wz(1-wz)=\left(1-w^2\right)\left(1-z^2\right)$$

накладывает ограничения только на углы искомого треугольника, и каждое допустимое решение этого уравнения определяет сразу целое семейство подобных между собой «хороших» треугольников.

2. К описанному выше множеству решений можно добавить и особую пару значений $w=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$, отброшенную раньше. Почему? Потому что в геометрии «нулевой отрезок» удобно считать отрезком, у которого просто концы совпадают. Такой отрезок имеет длину, равную нулю, но не

имеет одного определённого направления. Нулевой отрезок можно считать параллельным любой прямой. Действительно, в этом случае через его «оба конца» можно провести прямую в любом направлении. Таким образом, введение такого странного отрезка не приводит к противоречиям в рассуждениях. В нашем случае решение $w=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ соответствует углам $\angle A=60^\circ$, $\angle B=60^\circ$ и даёт в качестве «хороших» все правильные треугольники. В них искомый отрезок MN оказывается нулевым.

3. В наших вычислениях мы никак не использовали сведения о третьем угле треугольника, хотя, применив некоторые хитрые геометрические соображения, ранее убедились, что в искомых «хороших» треугольниках и этот угол острый. Исходя из основного уравнения, тот же результат легко получить и алгебраически.

Вернёмся к рисунку 5. Заметим, что угол C острый только тогда, когда вершина C лежит вне круга, построенного на диаметре AB (см. рис. 7). А это свойство угла C выполнено вместе с неравенством

$$h^2 > x(1-x),\ \text{или}\ \frac{h^2}{x(1-x)} > 1.$$

(Пояснение мы на всякий случай приводим ниже, в замечании 4.)

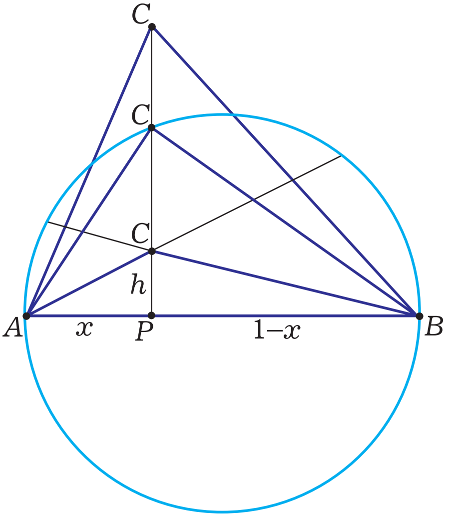


Рис. 7

Выразим левую часть последнего неравенства через переменные w и z с помощью формул

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} A = \frac{h}{x} = \frac{1-x}{u},$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} B = \frac{h}{1-x} = \frac{x}{u},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} A = \frac{2z}{1-z^2},$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} B = \frac{2w}{1-w^2}:$$

$$\frac{h^2}{x(1-x)} = \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\beta = \frac{4wz}{\left(1-w^2\right)\left(1-z^2\right)}.$$

Теперь вспомним основное уравнение, связывающее величины w и z в случае, если треугольник «хороший»:

$$2wz(1-wz) = \left(1-w^2\right)\left(1-z^2\right).$$

Значит, в «хорошем» треугольнике

$$\frac{h^2}{x(1-x)}=\frac{4wz}{2wz(1-wz)}=\frac{2}{1-wz}>2.$$

Сравнив это неравенство с неравенством

$$h^2>x(1-x),\text{ или }\frac{h^2}{x(1-x)}>1,$$

замечаем, что, действительно, в «хорошем» треугольнике все углы острые. Таким образом, тупоугольных и прямоугольных «хороших» треугольников не бывает.

Вывод о том, что равнобедренным, но не равносторонним, «хороший» треугольник быть не может, тоже легко получить из основного уравнения, положив в нём $w=z$.

4. Пояснение неравенства

$$h^2>x(1-x),\text{ или }\frac{h^2}{x(1-x)}>1.$$

Рассмотрим три угла, образованные хордами, которые опираются на диаметр, с вершинами внутри, на и вне окружности.

Угол между двумя хордами измеряется полусуммой дуг, если вершина угла лежит внутри круга, и полуразностью дуг, если вершина вне круга. Отсюда следует, что в первом случае угол тупой, во втором – острый. В пограничном случае, когда вершина угла на окружности, угол прямой. По свойству высоты прямоугольного треугольника в этом случае $h^2=x(1-x)$, а по свойству проекций и наклонных для острого угла отсюда следует неравенство $h^2>x(1-x)$, или $\frac{h^2}{x(1-x)}>1$, а для тупого – противоположное.

5. Другой способ решения основного уравнения

При исследовании решений основного уравнения

$$2wz(1-wz)=\left(1-w^2\right)\left(1-z^2\right)$$

мы приняли за независимую переменную величину w, назвав её аргументом, или параметром. Параметр можно вводить в уравнение и иными способами. Метод введения параметра тесно связан с заменой переменных. Покажем это на примере основного уравнения.

Сначала сделаем в рассматриваемом уравнении замену переменных. Постараемся подобрать её так, чтобы преобразованное уравнение стало попроще. После некоторых попыток показалась удобной такая замена: $zw=\frac{1-t}{3}$, $z^2+w^2=\tau$. Подставим полученные формулы в основное уравнение, предварительно раскрыв в нём скобки. Получим

$$2wz-3w^2z^2+w^2+z^2-1=0,$$

$$\frac{2(1-t)}{3}-\frac{3(1-t)^2}{9}+\tau-1=0\Rightarrow\tau=\frac{t^2+2}{3}.$$

Теперь основное уравнение эквивалентно двум соотношениям:

$$zw=\frac{1-t}{3},\ z^2+w^2=\frac{t^2+2}{3}.$$

Подставив эти соотношения в уравнение, получим тождество при всех значениях t, но поскольку мы ищем не любые, а лишь допустимые решения, в новых соотношениях на параметр t надо наложить ограничения. Неравенства $0<w<1$, $0<z<1$ и формула $zw=\frac{1-t}{3}$ приводят к ограничению $-2<t<1$. Вычислим квадрат произведения zw:

$$z^2w^2=\left(\frac{1-t}{3}\right)^2=\frac{(1-t)^2}{9}.$$

Из формул

$$z^2+w^2=\frac{t^2+2}{3} \text{ и } z^2w^2=\frac{(1-t)^2}{9},$$

ввиду обратной теоремы Виета, следует, что величины z^2 и w^2 являются парой решений квадратного уравнения

$$3X^2-\left(2+t^2\right)X+\frac{(1-t)^2}{3}=0.$$

Поэтому

$$\left\{z^2;\ w^2\right\}=X=\frac{1}{6}\left(2+t^2\pm\sqrt{t^4+8t}\right).$$

И тут возникает новое ограничение на параметр t: $t^4+8t\geq 0$, так как нас интересуют вещественные значения w и z. Указанное неравенство возможно в трёх случаях:

1) $t=0$;
2) $t^3+8\geq 0,\ t>0$;
3) $t^3+8\leq 0,\ t<0$.

В первом случае $z=w=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Это, очевидно, особое решение, оно соответствует правильному треугольнику. Ввиду условия $-2<t<1$ третий случай отпадает, а второй приводит к ограничению $0<t<1$.

Рассмотрим уравнение

$$3X^2-\left(2+t^2\right)X+\frac{(1-t)^2}{3}=0$$

и его решения

$$\left\{z^2;\ w^2\right\}=X=\frac{1}{6}\left(2+t^2\pm\sqrt{t^4+8t}\right)$$

при $0<t<1$. Заметим, что если это ограничение выполнено, то оба решения положительны. Действительно, больший корень уравнения положителен – это очевидно, а положительность второго следует из положительности свободного члена уравнения, который известным образом выражается через произведение корней. Так же просто проверить и неравенства

$$\frac{1}{6}\left(t^2+2+\sqrt{t^4+8t}\right)>\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{6}\left(t^2+2-\sqrt{t^4+8t}\right)<\frac{1}{3}.$$

Итак, все допустимые решения уравнения $3X^2-\left(2+t^2\right)X+\frac{(1-t)^2}{3}=0$ определяются формулами

$$\left\{z^2;\ w^2\right\}=X=\frac{1}{6}\left(2+t^2\pm\sqrt{t^4+8t}\right)$$

при $0<t<1$.

Для вычисления z, w надо извлечь из правых частей положительные квадратные корни.

Описание решений с помощью параметра t имеет некоторые привлекательные стороны. Во-первых, углы A и B выступают теперь симметрично, равноправно. Во-вторых, из уравнения

$$\left\{z^2;\ w^2\right\}=X=\frac{1}{6}\left(2+t^2\pm\sqrt{t^4+8t}\right)$$

и неравенств

$$\frac{1}{6}\left(t^2+2+\sqrt{t^4+8t}\right)>\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{6}\left(t^2+2-\sqrt{t^4+8t}\right)<\frac{1}{3}$$

следует, что при возрастании t от нуля до единицы меньший корень уравнения убывает от $\frac{1}{3}$ до нуля, больший возрастает от $\frac{1}{3}$ до единицы. Это определяет границы изменения углов «хорошего» треугольника, прилежащих к стороне, параллельной искомому отрезку: меньший убывает от 60° до нуля, больший возрастает от 60° до 90°, когда параметр t возрастает от 0 до 1.

Можно выразить через параметр t также третий угол «хорошего» треугольника. Обозначим его 2γ и вспомним обозначения $\angle A=2\alpha$,

$\angle B=2\beta$, $\operatorname{tg}\alpha=z$, $\operatorname{tg}\beta=w$ других параметров нашего треугольника. Очевидно,

$$\gamma=\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta,$$

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{1-wz}{z+w}.$$

Используя формулы

$$zw=\frac{1-t}{3},\quad z^2+w^2=\frac{t^2+2}{3},$$

получаем

$$\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{(1-wz)^2}{z^2+2wz+w^2}==\frac{(2+t)^2}{3\left(t^2-2t+4\right)}=\frac{(2+t)^3}{3\left(t^3+8\right)}.$$

Теперь можно показать, что $60^\circ<2\gamma<90^\circ$. Для этого заменим параметр t временно на новый, который обозначим через θ, и введём функцию $f(\theta)$. Пусть

$$2+t=\frac{1}{\theta},\quad f(\theta)=3\left(12\theta^2-6\theta+1\right).$$

Легко проверить, что при $0<t<1$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{3}<\theta<\frac{1}{2},$$

а формула

$$\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{(1-wz)^2}{z^2+2wz+w^2}==\frac{(2+t)^2}{3\left(t^2-2t+4\right)}=\frac{(2+t)^3}{3\left(t^3+8\right)}$$

превращается в

$$\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{1}{3\left(12\theta^2-6\theta+1\right)}=\frac{1}{f(\theta)}.$$

Функция $f(\theta)$ представляет собой параболу с вершиной в точке $\theta=\frac{1}{4}$, а её ветви растут вверх. Действительно,

$$f(\theta)=3\left(12\theta^2-6\theta+1\right)=6\left(\theta-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Поэтому на интервале $\frac{1}{3}<\theta<\frac{1}{2}$ функция $f(\theta)$ возрастает, и справедливы неравенства $1=f\left(\frac{1}{3}\right)<f(\theta)<f\left(\frac{1}{2}\right)=3.$

Из формул

$$\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{1}{3\left(12\theta^2-6\theta+1\right)}=\frac{1}{f(\theta)}\text{ и}$$

$$1=f\left(\frac{1}{3}\right)<f(\theta)<f\left(\frac{1}{2}\right)=3$$

следует оценка величины третьего угла «хорошего» треугольника:

$$\frac{1}{3}<\operatorname{tg}^2\gamma<1,\quad \frac{1}{\sqrt{3}}<\operatorname{tg}\gamma<1,$$

$$30^\circ<\gamma<45^\circ,\quad 60^\circ<2\gamma=\angle C<90^\circ,$$

и легко заметить, что при возрастании t от 0 до 1 угол C возрастает.

Общий вывод: «хорошие» треугольники – остроугольные, в них два угла всегда больше 60°, один меньше. Искомый отрезок параллелен стороне, прилегающей к наименьшему из углов.

Таким образом, мы постарались дать на вопрос Вовиной задачи довольно полный ответ. Как видим, можно и простую на вид задачку превратить в «исследование»!