Дворянинов Сергей Владимирович
Кандидат физико-математических наук, доцент.
Редактор журнала «Математика в школе»,
автор статей в журналах «Квант»,
«Математическое образование», «Физика»,
«Математика для школьников», «Фрактал».

Задача ЕГЭ с параметром по силам… девятикласснику!

Наша школа до 9 класса называется основной, 10 и 11 классы – это старшая школа. Слово *основная* – совсем неслучайное. Сейчас мы хотим показать, что именно здесь закладываются будущие успехи на ЕГЭ.

В новом пособии для подготовки к ЕГЭ-2019 есть задачи с параметром. Рассмотрим две из них.

Задача 1. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax-2)(y+x+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

Решение. Сделаем несколько наблюдений. Модуль всегда неотрицателен, поэтому систему следует изучать только для неотрицательных значений параметра. Произведение равно нулю, когда хотя бы один сомножитель равен нулю (а остальные имеют смысл). Следовательно, при $a \geq 0$ мы должны рассмотреть совокупность двух систем:

$$\begin{cases}ay+ax-2=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$
$$\begin{cases}y+x+3a=0,\\ |xy|=a.\end{cases} \qquad (1)$$

Далее естественно освободиться от знака модуля. Во второй строке таблицы 1 на следующей странице записаны четыре системы. Первая система уравнений из (1) заменяется совокупностью систем I и II, вторая система – системами III и IV. Так получаем набор (точнее говоря, совокупность) четырёх систем.

Все системы I-IV – одного типа: первое уравнение – линейное, второе содержит произведение xy. Из первого уравнения системы I $y=\dfrac{-ax+2}{a}$ при $a\neq 0$. Следовательно, случай a=0 надо рассмотреть отдельно. При a=0 исходная систем принимает вид $\begin{cases} y+x=0, \\ xy=0 \end{cases}$ и имеет, как легко видеть, единственное решение (0;0). Отсюда следует, что для рассматриваемой задачи параметр a положителен, a>0.

Итак, доказано, что в таблице 1 параметр a>0.

Таблица 1

I	II	III	IV
$\begin{cases} ay+ax-2=0, \\ xy=-a \end{cases}$	$\begin{cases} ay+ax-2=0, \\ xy=a \end{cases}$	$\begin{cases} y+x+3a=0, \\ xy=-a \end{cases}$	$\begin{cases} y+x+3a=0, \\ xy=a \end{cases}$
$x\cdot\dfrac{-ax+2}{a}=-a$	$x\cdot\dfrac{-ax+2}{a}=a$	$x(-x-3a)=-a$	$x(-x-3a)=a$
$ax^2-2x-a^2=0$	$ax^2-2x+a^2=0$	$x^2+3ax-a=0$	$x^2+3ax+a=0$
$D_1=4+4a^3>0$	$D_2=4-4a^3$	$D_3=9a^2+4a>0$	$D_4=9a^2-4a$
Два корня	?	Два корня	?

В этой таблице четыре столбца. Каждый посвящён одной из четырёх систем. В третьей строке записаны соответствующие им уравнения, в четвертой строке эти уравнения записаны в каноническом виде. Следующая же строка содержит четыре дискриминанта. Дискриминант квадратного уравнения можно было бы назвать индикатором: он говорит нам о количестве корней квадратного уравнения.

Дискриминанты D_1 и D_3 – положительны при любом значении $a>0$. Соответствующие уравнения имеют по два корня, системы I и III – по два решения. Следовательно, системы I и III дают четыре решения исходной системы.

Теперь, следует выяснить, при каких значениях параметра системы II и IV в совокупности имеют два решения. Для этого надо следить за знаками дискриминантов D_2 и D_4. Результат анализа представляет диаграмма на рис.1.

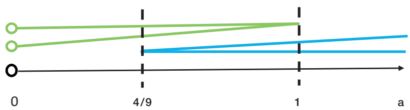

Рис.1

Уравнение II при $a\in(0;1)$ имеет два корня, при a=1 – один корень, при остальных a корней нет. Это отражает зеленая линия.

Уравнение IV при a=4/9 имеет один корень, при a > 4/9 – два корня, при $a\in(0;1)$ – корней нет. Это отражает синяя линия.

Общее число корней этих уравнений равно двум, если $a\in(0;4/9)$ или если $a\in(1;+\infty)$. В итоге для задачи 1 получаем такой ответ:

$$(0;4/9)\cup(1;+\infty).$$

Будем бдительны!

Для закрепления сказанного –

Задача 2. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax-1)(y+x-a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Решение. Если действовать так же, как и при решении задачи 1, то при $a>0$ придём к таблице 2.

Таблица 2

I	II	III	IV
$\begin{cases}ay+ax-1=0,\\ xy=-a\end{cases}$	$\begin{cases}ay+ax-1=0,\\ xy=a\end{cases}$	$\begin{cases}y+x-a=0,\\ xy=-a\end{cases}$	$\begin{cases}y+x-a=0,\\ xy=a\end{cases}$
$x\cdot\frac{-ax+1}{a}=-a$	$x\cdot\frac{-ax+1}{a}=a$	$x(-x+a)=-a$	$x(-x+a)=a$
$ax^2-x-a^2=0$	$ax^2-x+a^2=0$	$x^2-ax-a=0$	$x^2-ax+a=0$
$D_1=1+4a^3>0$	$D_2=1-4a^3$	$D_3=a^2+4a>0$	$D_4=a^2-4a$
Два корня	?	Два корня	?

Системы I и III уже дают четыре решения этой задачи. Следовательно, достаточно выяснить, при каких значениях параметра системы II и IV *не имеют* ни одного решения.

Уравнение II при $a\in\left(0;\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$ имеет два корня, при $a=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ – один корень, при остальных a корней нет.

Уравнение IV при $a=4$ имеет один корень, при $a>4$ – два корня, при $a\in(0;4)$ – корней нет.

Количество корней уравнений II и IV представляет диаграмма на рис.2.

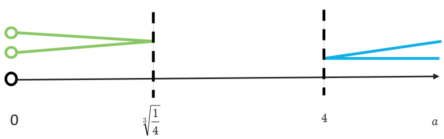

Рис.2

Ясно, что общее количество корней этих уравнений равно нулю, если $a\in\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}};4\right)$. Эти значения параметра и составляют ответ на вопрос задачи 2.

Давайте, однако, рассмотрим нашу систему при значении

$$a=1\in\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}};4\right).$$

Тогда система

$$\begin{cases} y+x-1=0, \\ |xy|=1, \end{cases}$$

как мы ожидаем, должна иметь четыре решения. Система эта равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y+x-1=0, \\ xy=1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y+x-1=0, \\ xy=-1 \end{cases}.$$

Первая система требует решения уравнения $x(-x+1)=1$, или $x^2-x+1=0$. Но это уравнение не имеет корней.... Следовательно, при a=1 задача 2 никаких четырёх решений не имеет.

Итак, пока мы не получили верного ответа для задачи 2. Где же допущена ошибка? Какое обстоятельство мы не учли?

Мы надеемся, что вы разберётесь, в чем тут дело, и затем получите правильный ответ к задаче 2. А заодно выясните, как следует дополнить решение задачи 1 так, чтобы указанный выше ответ был полностью обоснован.

Литература

1. ЕГЭ 2019. Профильный уровень. 50 вариантов. / под ред. И.В. Ященко. М.: Изд. «Экзамен», 2019.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Секрет успеха

До наших дней дошёл слух о том, что Ньютона как-то спросили, трудно ли было ему открыть «его» законы и долго ли он трудился над их формулировкой. Учёный сказал:

– Открытые мной законы природы просты, установить их было легко и сформулировал я их быстро. Но до этого очень долго думал.

Страшнее ограбления

Когда в кабинет редактора одной американской газеты – будущего знаменитого писателя Марка Твена – ворвался вооружённый бандит с криком «Руки вверх! Жизнь или кошелёк!», реакция владельца кабинета была такова, что «обезоружила» бандита. Марк Твен радостно воскликнул:

– Хорошо, что это вы! А я с ужасом подумал, что опять кто-то свои стихи принёс.