Нестеренко Юрий Валентинович
Доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Юлианский календарь
Часть II. Лунная составляющая юлианского календаря

Пасхальные таблицы и правила Дионисия никогда не были санкционированы ни папой, ни собором, а утвердились просто как наиболее рациональное решение сложного и волновавшего тогда умы вопроса.

Н.И. Идельсон («История календаря»)

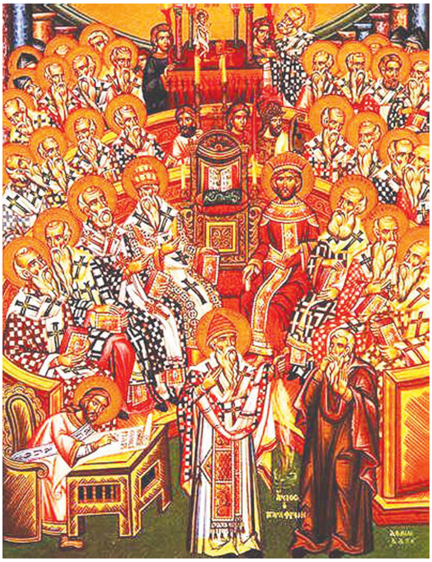
3. «Лунное течение» календаря (распределение новолуний)

В 313 году после Р.Х. римский император Константин издал эдикт (распоряжение) о веротерпимости. В последовавшие затем годы появился ряд законов, поддержавших христианство. Константин оказывал содействие и другим религиям, но сыновьям своим дал христианское воспитание, и постепенно христианство стало государственной религией Римской империи. В 325 году по инициативе Константина в г. Никее был проведён первый Вселенский собор, на котором среди других важных вопросов церковной жизни рассматривалось празднование Пасхи.

Считается, что Собор признал желательным, чтобы все христиане праздновали Пасху в один и тот же воскресный день после первого полнолуния, следующего не ранее дня весеннего равноденствия. История становления действующих правил пасхалии достаточно сложна, и мы не будем её касаться. Отметим только, что решения Никейского собора привели к отказу от исчисления месяцев на основе астрономических наблюдений и постепенному

Римский император Константин

переходу к формальному определению начал календарных лунных месяцев и дат празднования Пасхи.



Никейский собор

Собор, по-видимому, не фиксировал, кто должен определять дни празднования Пасхи. Постепенно возобладали более точные методы, принятые в Александрийской церкви. Этому в значительной степени способствовала работа (525 г.) римского монаха Дионисия Малого, который сумел продолжить таблицы, составленные на период с 437 по 531 год Кириллом Александрийским. Воспользовавшись его правилами вычисления пасхалии, Дионисий смог дать им ясное объяснение. В немалой степени распространению этих правил на Западе способствовало то, что он предложил новую точку отсчёта времени, связанную с рождением Христа. Новая эра, введённая Дионисием, – эра от Рождества Христова – сначала укоренилась в Италии, а потом распространилась по всему миру. Мы пользуемся этой системой отсчёта времени и сейчас.

В правилах пасхалии незримо «присутствуют» вращение Земли вокруг Солнца (день весеннего равноденствия) и Луны вокруг Земли (полнолуние). Описанию календаря, который учитывал бы эти два вращения, посвящён настоящий раздел статьи.

Солнечная часть христианского календаря в точности совпадает с юлианским календарём. Это привело к тому, что христианский календарь – усложнённый вариант календаря, созданного Эратосфеном и Созигеном, сохранил то же название. Система распределения месяцев в нём была придумана также александрийскими учёными – она определяет лунную составляющую юлианского календаря.

Средняя продолжительность астрономического лунного месяца $\beta = 29{,}530588...$ удовлетворяет неравенствам $29 < \beta < 30$. Поэтому календарные лунные месяцы должны состоять из целого числа дней; они имеют продолжительность 29 или 30 дней. В отличие от календаря, которому мы следуем в обыденной жизни, в юлианском церковном календаре не бывает месяцев продолжительностью в 28 и 31 день.

Периодичность в числе дней лунных месяцев этого календаря намного сложнее, чем в годовой последовательности: период равен 940 месяцам. Он в точности равен продолжительности 76 календарных лет и состоит из 27759 дней. Таким образом, средняя продолжительность календарного лунного месяца равна

$$\frac{27759}{940} = 29{,}530851\ldots \text{ дней,}$$

что в силу равенства

$$\beta - \frac{27759}{940} = -\ 0{,}000263\ldots$$

хорошо совпадает со средней длиной синодического месяца.

Теперь рассмотрим правила распределения месяцев с 29 и 30 днями в нужную последовательность, следуя с некоторыми изменениями статье Г. Кинкелина [2]. При этом начала (т. е. первые дни) лунных месяцев будем называть новолуниями. Последовательность лунных месяцев разобьём на так называемые лунные годы, содержащие по 12 или 13 лунных месяцев; дни календарных годов будем именовать, как сейчас общепринято, от «1 января» до «31 декабря», считая, что в каждом високосном году лишний день вставляется по древнеримски – после 24 февраля – и называется «вторым 24 февраля», что отличается от действующего в наши дни григорианского календаря (в нём лишний день вставляется после 28 февраля и называется «29 февраля»).

Конструкцию обеих последовательностей (лунных месяцев и годов) можно описать следующим образом.

«Лунное течение» юлианского календаря:

1. Первое новолуние 1 года до Р.Х. выпало на 23 января.

2. Первое новолуние, следующее после 27 декабря, считается началом нового лунного года. Первый месяц каждого лунного года состоит из 30 дней. Далее продолжительности месяцев чередуются и состоят из 29, 30, 29 и т. д. дней.

Кроме того, делаются две поправки:

3. Если номер лунного года делится на 4, то к его второму месяцу нужно прибавить один день.

4. Если номер лунного года, увеличенный на 1, делится на 19, его последний месяц нужно укоротить на один день.

Правила 1 – 4 определяют единственным способом последовательность новолуний (начал лунных месяцев) и последовательность лунных годов с номерами $n \geq 0$. Например, год первый до Р. Х. ($n = 0$) содержит 12 лунных месяцев, их начала (новолуния) приходятся на следующие даты:

$$23.01,\ 22.02,\ 23.03,\ 22.04,\ 21.05,\ 20.06,\ 19.07,\ 18.08,\ 16.09,\ 16.10,\ 14.11,\ 14.12\ . \qquad (1)$$

Новолуние, следующее за последним в указанном списке

(14 + 29 = 43 декабря = 12 января),

является первым новолунием следующего лунного года, т. е. началом 1 года после Р.Х. Продолжая эти вычисления, можно получить таблицу, содержащую даты новолуний юлианского календаря. Напомним, что это некоторые формальные даты, лишь приближающиеся к истинным датам астрономических новолуний.

Правило 1 определяет начало летоисчисления и возникло по историческим причинам.

Если бы лунные месяцы продолжительностью в 30 и 29 дней просто чередовались и не было бы условия о том, что первый лунный месяц каждого лунного года состоит из 30 дней, если бы отсутствовали поправки, приведённые в пунктах 3 и 4, то средняя длина лунного месяца равнялась бы

$$29\frac{1}{2} = 29{,}5 \text{ дней.}$$

Именно эти три изменения регулярности приводят к тому, что средняя длина лунного месяца в юлианском календаре равна

$$\frac{27759}{940} = 29{,}530851\ldots \text{ дней}$$

и существенно лучше определяет длину астрономического лунного месяца. Нам предстоит разобраться в этом.

Сначала докажем, что все лунные годы определённой выше последовательности состоят из 12 или 13 месяцев. Действительно, из правила 2 следует, что начала лунных годов могут лежать лишь на промежутке от 28 декабря до 25 января следующего года, включая крайние даты. Обозначим буквой A первый день какого-либо лунного года, а буквой B – первый день следующего лунного года. Пусть C будет днём с той же датой, что и A, но из следующего календарного года. Тогда количество дней, прошедших от A до C, равно 365 или 366, а оба дня B и C лежат на промежутке от 28 декабря до 25 января двух соседних календарных годов. Но это значит, что длина лунного года от A до B состоит не более, чем из $366 + 29 = 395$ дней. С другой стороны, этот же лунный год содержит не менее $365 - 29 = 336$ дней. Если обыкновенный лунный год состоит из 12 месяцев, то он содержит $6 \cdot 30 + 6 \cdot 29 = 354$ дня, а если состоит из 13 месяцев, то $354 + 30 = 384$ дня. Следовательно, все лунные годы определённой выше последовательности состоят из 12 или 13 месяцев.

Так как обычный календарный год состоит из 365 дней, то он содержит на 11 дней больше или на 19 дней меньше соответствующего лунного года. Поскольку в високосные годы календарный и лунный годы удлиняются на один день (см. правило 3), эти соотношения сохраняются. Лишь в случае, если номер лунного года, увеличенный на 1, делится на 19, числа 11 и 19 заменятся на 12 и 18. Отсюда следует первое заключение (свойство) юлианского календаря:

С1. *Если известна дата начала лунного года с номером n, причём $n+1$ не делится на 19, то дата начала следующего лунного года получается вычитанием 11 или прибавлением 19 дней к первой дате. Если номер лунного года, увеличенный на 1, делится на 19, то дата начала следующего лунного года получается вычитанием 12 или прибавлением 18 дней к первой дате. Нужная операция (вычитание 11, 12 или прибавление 19, 18) выбирается так, чтобы искомая дата оставалась в пределах от 28 декабря по 25 января включительно.*

Применив заключение С1 к лунным годам, начиная с первого до Р.Х. ($n = 0$), получим такую последовательность первых новолуний двадцати начальных лунных годов:

23.01, 12.01, 1.01, 20.01, 9.01, 29.12, 17.01, 6.01, 25.01, 14.01, 3.01, 22.01, 1.01, 31.12, 19.01, 8.01, 28.12, 16.01, 5.01, 23.01. (2)

Отметим, что в пределах последовательности (2) всякий раз можно было выполнить лишь одну операцию (вычитание или прибавление), так что эта последовательность определяется свойством С1 единственным способом. Лунный год с номером 18 начинается 5.01. В соответствии со свойством С1 дата начала следующего лунного года получается прибавлением 18 дней к 5.01. В результате получается 23.01 – первый член последовательности (2). Это значит, что далее результаты вычислений будут повторяться с периодом 19. Изменение регулярности в распределении новолуний, обеспечивающее замыкание 19-летнего цикла и происходящее один раз в 19 лет, называется «скачком Луны», а правило 4 – поправкой Калиппа.

Между прочим, начала лунных годов в 19-летнем цикле лишь один раз совпадают с началами календарных годов. Это происходит в те годы, номера которых при делении на 19 дают в остатке 2. Начала остальных лунных годов отстоят от начал соответствующих календарных годов менее чем на 25 дней. Они могут наступать как раньше начал календарных годов, так и после них.

Рассмотрим лунные годы с номерами 1992 и 2011. Из равенств $1992 = 19 \cdot 104 + 16$, $2011 = 19 \cdot 105 + 16$ следует, что оба они начинаются 28 декабря. Согласно правилу 2, вторые новолуния этих годов приходятся на 27 января. Год с номером 2011 не високосный, его второй месяц по правилу 2 должен содержать 29 дней. Значит, начало третьего лунного месяца этого года приходится на 25 февраля.

Год с номером 1992 – високосный, согласно правилам 2 и 3, его второй месяц содержит 30 дней. Дополнительный день (второе 24 февраля), вставляется, напомним, на следующий день после 24 февраля. А начало третьего лунного месяца в 1992 году опять приходится на 25 февраля. Итак, в обоих – 2011 и 1992 – лунных годах третье новолуние выпало на 25 февраля. Длины следующих лунных месяцев в этих годах одинаковы, поэтому можно утверждать, что и все новолуния выпадали тогда на одни и те же даты. Подобное обстоятельство, первопричина его в правиле 3 и принятом в юлианском календаре правиле добавления и наименования лишнего дня в високосном году, имеет место и в других лунных годах.

Фреска Рафаэля «Афинская школа» в Ватиканском дворце (символическое собрание выдающихся личностей античности: в центре: Платон и Аристотель, слева от них Александр Македонский, слушающий Сократа; среди остальных – Пифагор, Евклид, Птолемей и др.

Сказанное означает, что в каждом лунном году распределение новолуний однозначно определяется датой первого новолуния и, в частности, *последовательности дат новолуний в лунных годах через каждые 19 лет повторяются.*

Другими словами, распределение новолуний по датам календарного года зависит только от остатка, который имеет номер года от Р.Х. при делении на 19. Например, из равенства $2014 = 19 \cdot 106$ следует, что в 2014 лунном году новолуния распределены так, как указано в (1). Таблицу всех 19 распределений новолуний можно найти, например, в [4]. Примерно треть дней юлианского календаря не становятся новолуниями, в частности, новолуния в високосные годы никогда не выпадают на второе 24 февраля.

Второе важное свойство юлианского календаря заключается в том, что:

С2. *Лунные годы, начинающиеся с 28 декабря по 6 января, содержат по 13 лунных месяцев, остальные лунные годы состоят из 12 месяцев.*

Эту закономерность проще всего проверить, рассматривая последовательность (2). Зная начала лунных годов, конечно же, легко найти и их продолжительности. Длины лунных годов в месяцах образуют бесконечную периодическую последовательность с периодом в 19 лет, начинающуюся с лунного года с номером 0. Период начинается с самого начала этой последовательности и, как следует из (2), имеет вид:

$$12,\ 12,\ 13,\ 12,\ 12,\ 13,\ 12,\ 13,\ 12,\ 12,\ 13,\ 12,\ 12,\ 13,\ 12,\ 12,\ 13,\ 12,\ 13. \quad (3)$$

Он состоит из 7 лет по 13 месяцев и 12 лет по 12 месяцев, так что содержит в точности $7 \cdot 13 + 12 \cdot 12 = 235$ месяцев. Таким образом, измеренная в месяцах средняя длина лунного года юлианского календаря равна $\frac{235}{19}$.

Последовательность (3), распределяющая 235 месяцев по 19 годам, называется *метоновым циклом* по имени древнегреческого астронома Метона, предложившего её в середине первого тысячелетия до Р. Х. Этот цикл был известен также в древних Вавилоне и Китае.

Заметим, что последний год в периоде (3) состоит из 13 месяцев, так что его последний месяц должен содержать 30 дней, но согласно правилу 4 укорачивается на один день и в действительности равен 29 дням.

Последовательность дат, на которые выпадают новолуния юлианского календаря, имеет период 19 лет, или 235 месяцев. Но это не значит, что последовательность длин месяцев имеет тот же период. Начала месяцев могут выпадать на одни и те же даты, но сами месяцы будут при этом иметь разную длину. Например, в рассмотренных выше 1992 и 2011 годах вторые лунные месяцы начинаются 27 января. Но в високосном 1992 году второй месяц имеет длину 30 дней, а в обыкновенном 2011 – 29 дней.

Рассмотрим два лунных года, номера которых отличаются на число лет, кратное $76 = 4 \cdot 19$. Так как разность номеров этих годов делится на 19, то новолуния в них приходятся на одни и те же даты, а сами годы состоят из равного количества месяцев. Оба эти года одновременно являются или високосными, или нет, так что их вторые месяцы имеют равную длину. Если номера этих лет, увеличенные на 1, не делятся на 19 (это происходит одновременно), то их последующие месяцы также имеют равную длину, ведь поправки в них не вносятся. Наконец, если номера этих годов, увеличенные на 1, делятся на 19, то годы состоят из 13 месяцев. Последние их месяцы содержат по 29 дней, а в длины месяцев с 3-го по 12-й поправки не вносятся, так что и они состоят из одинакового количества дней. В результате получаем, что в годах с номерами, отличающимися на 76, длины соответствующих месяцев одинаковы. Другими словами, последовательность длин лунных месяцев юлианского календаря имеет период, равный $4 \cdot 235 = 940$ месяцев.

Итак, мы установили, что каждые 19 лунных лет содержат столько же дней, что и календарные годы с теми же номерами. Мы нашли также, что каждые 4 календарных года состоят из 1641 дней. Значит, в 76 календарных годах содержится $19 \cdot 1461 = 27759$ дней. Эти дни распределяются по 940 месяцам так, что средняя длина лунного месяца равна $\frac{27759}{940}$ дней, что нам и требовалось проверить.

Часть III. Когда наступает Пасха?

Пасха празднуется в первый воскресный день *после* первого полнолуния, следующего не ранее дня весеннего равноденствия.

Установление I Вселенского Собора

4. Юлианская пасхалия

Создав модель, описывающую в целых числах времена вращения Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли, можно приступить к объяснению того, как вычисляется дата празднования православной Пасхи. В католических и в других странах, где христианские церкви приняли григорианский календарь, праздник Пасхи вычисляется с помощью того же канонического правила, что лежит в основе юлианского календаря, но день весеннего равноденствия и полнолуния определяются с помощью григорианского календаря, так что и результат может получиться иной.

Впервые формулы, позволяющие вычислять дату празднования Пасхи по юлианскому и григорианскому календарям, предложил известный немецкий математик К.Ф. Гаусс. Но мы воспользуемся другим расчётом и получим иные формулы, дающие тот же результат.

Днём весеннего равноденствия в юлианской пасхалии считается 21 марта, определённое по юлианскому календарю, а каждое полнолуние – выпадающим на 14 день лунного месяца, т. е. через 13 дней после даты соответствующего новолуния. Первое полнолуние, выпадающее в день весеннего равноденствия или после него, называется *пасхальным полнолунием*. К вычислению дат пасхальных полнолуний мы сейчас и перейдём.

Даты новолуний, с которых начинаются лунные годы, приведены в (2); некоторые из них происходят в декабре. Учитывая, что первый лунный месяц всегда содержит 30 дней, легко находим следующую последовательность циклически повторяющихся январских новолуний с периодом в 19 лет:

23.01, 12.01, 1.01, 20.01, 9.01,
28.01, 17.01, 6.01, 25.01, 14.01,
3.01, 22.01, 11.01, 30.01, 19.01,
8.01, 27.01, 16.01, 5.01.

Отбросим обозначение января; в результате получится такая последовательность целых чисел, расположенных в интервале от 1 до 30:

23, 12, 1, 20, 9, 28, 17, 6, 25, 14,
3, 22, 11, 30, 19, 8, 27, 16, 5. (4)

Теперь проверим, что эта периодическая (с периодом 19) последовательность может быть определена формулой

$$M(n) \equiv 23 + 19n - \left[\frac{n}{19}\right](mod\, 30), \quad (5)$$

$$1 \le M(n) \le 30,\ n \ge 0.$$

Используемая здесь запись $u \equiv v\ (mod\ w)$ обозначает, что разность двух целых чисел u и v делится на w. Другими словами, числа u и v имеют одинаковые остатки при делении на w. При выполнении этого условия говорят, что числа u и v сравнимы друг с другом по модулю w. Кроме того, в формуле участвует элементарная функция $[x]$ – *целая часть* числа x. Она равна наибольшему целому числу k при условии $k \le x$. Например, $[2\frac{3}{4}] = 2$, $[-2\frac{3}{4}] = -3$. Формула (5) означает, что дата январского новолуния года с номером $n \ge 0$ равна лежащему в пределах от 1 до 30 остатку от деления на 30 числа $23 + 19n - \left[\frac{n}{19}\right]$.

Проверим, что последовательности (4) и (5) совпадают. Имеем:

$$M(n+1) - M(n) \equiv 19 - \left[\frac{n+1}{19}\right] + \left[\frac{n}{19}\right] =$$

$$= \begin{cases} 18, \text{ если } n+1 \text{ делится на } 19, \\ 19, \text{ если } n+1 \text{ не делится на } 19. \end{cases}$$

Но именно это свойство выполняется для двух соседних членов циклической последовательности (4). Учитывая, что $M(0) = 23$ и все члены последовательностей (4) и (5) есть целые числа, находящиеся в промежутке от 1 до 30, заключаем, что эти последовательности совпадают. Итак, мы установили формулу для январских новолуний.

Проверим теперь, что числа мартовских и январских новолуний в каждом году совпадают. Рассмотрим два случая.

1) Если n сравнимо по модулю 19 с одним из чисел 5, 13 или 16, то лунный год с номером n начинается в декабре. Значит, январское новолуние этого лунного года есть начало второго лунного месяца, а мартовское – начало четвёртого лунного месяца. Календарь устроен так, что второй и третий лунные месяцы содержат вместе столько же дней, как февраль и март, независимо от того, будет год с номером n високосным или нет. Но это значит, что числа, на которые выпадают мартовское и январское новолуния, одинаковы.

2) Если n не сравнимо по модулю 19 ни с одним из чисел 5, 13 и 16, то лунный год с номером n начинается в январе. Значит, январское новолуние будет началом первого лунного месяца, а мартовское – началом третьего лунного месяца. Но первый и второй лунные месяцы содержат вместе столько же дней, сколько январь и февраль, независимо от того, будет год с номером n високосным или нет. Следовательно, числа мартовского и январского новолуний опять совпадают.

Мы проверили, что мартовские новолуния юлианского календаря определяются формулой (8). Обозначим через $F(n)$ номер дня в марте, на который приходится пасхальное полнолуние в году с номером n. Пасхальное полнолуние может быть и в апреле, скажем при n, делящихся на 19. В этом случае имеем

$$23 + 13 = 36,$$

поэтому дата пасхального полнолуния есть

$$36 - 31 = 5 \text{ апреля}.$$

Но мы в таких случаях будем считать $F(n) = 36$. Тогда $21 \le F(n) \le 50$. Левое неравенство следует из определения пасхального полнолуния. Для доказательства правого заметим, что расстояние между двумя соседними полнолуниями равно длине какого-то лунного месяца и потому не может быть больше 30 дней, так что на промежутке от 21 и до 50 марта включительно должно быть хотя бы одно полнолуние.

Полнолуние в юлианском календаре всегда выпадает на 14 день месяца, т. е. получается прибавлением 13 дней к дате новолуния. Поэтому

$$F(n) = 13 + M(n)(mod\,30). \qquad (6)$$

Пользуясь соотношениями (6) и (5), получаем, что в любом случае выполняются условия:

$$F(n) \equiv 6 + 19\,n - \left[\frac{n}{19}\right](mod\,30),$$

$$21 \le F(n) \le 50, \qquad (7)$$

однозначно определяющие число $F(n)$. Последовательность $F(n)$, $(n \ge 0)$ пасхальных полнолуний, повторяющаяся с периодом 19, выглядит так:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	5.04	25.03	13.04	2.04	22.03	10.04	30.03	18.04	7.04	27.03
n	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	
	15.04	4.04	24.03	12.04	1.04	21.03	9.04	29.03	17.04	

Православная церковь празднует Пасху в ближайшие воскресенья, следующие за этими датами. Присвоим названиям дней недели номера: воскресенье – 0, понедельник – 1, вторник – 2, среда – 3, четверг – 4, пятница – 5 и суббота – 6. День недели, приходящийся на 21 марта года с номером n, обозначим символом $d(n)$. Обычный календарный год состоит из $365 = 7 \cdot 52 + 1$ дней, а високосный из $366 = 7 \cdot 52 + 2$ дней. Поэтому, как легко проверить, выполняется условие:

$$d(n) \equiv n + \left[\frac{n}{4}\right]\ (mod\ 7),\ \ 0 \le d(n) < 7.$$

Эта последовательность имеет период, равный 28.

Обозначим буквой D день недели, на который приходится пасхальное полнолуние. Тогда $(F(n) - D)$ марта и $(21 - d(n))$ марта приходятся на воскресные дни. Следовательно, $F(n) - D \equiv 21 - d\,(n)\ (mod\ 7)$ и

$$D \equiv F(n) + d(n) \equiv$$

$$\equiv n + \left[\frac{n}{4}\right] + F(n)(mod\,7).$$

Пусть буква P обозначает число в марте, на которое приходится праздник Пасхи. Тогда $(F(n) - D)$ марта и $(P - 7)$ марта – воскресные дни, предшествующие пасхальному полнолунию. Следовательно,

$$F(n) - D = P - 7,$$

так что

$$P = F(n) + 7 - D.$$

Итак, для того чтобы вычислить день Пасхи в календарном году с номером n, нужно с помощью условий

$$F \equiv 6 + 19n - \left[\frac{n}{19}\right](mod\,30), \quad (10)$$

$$21 \le F \le 50,$$

определить мартовскую дату пасхального полнолуния F, затем вычислить день недели D пасхального полнолуния

$$D \equiv n + \left[\frac{n}{4}\right] + F(mod\,7),\ 0 \le D \le 6. \quad (11)$$

Пасха приходится на мартовский день с номером

$$P = F + 7 - D \quad (12)$$

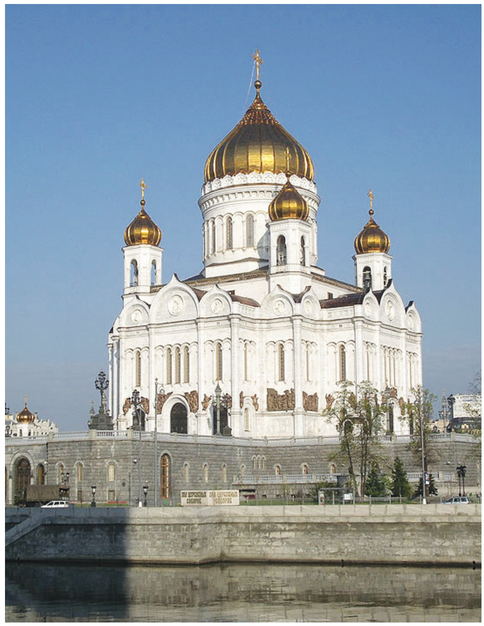
юлианского календаря.

При этом, конечно, нужно иметь в виду правило пересчёта мартовских чисел в апрельские, если $P > 31$.

Функция (7), определяющая F, имеет период 19 и потому принимает не более 19 значений из промежутка $21 \le F(n) \le 50$. В частности, она не может быть равна 50. Из неравенств $21 \le F \le 49$, $0 \le D \le 6$ следует, что $22 \le P \le 56$.

Итак, Пасха может попадать только в промежуток от 22 до 56 марта, т. е. от 22 марта до 25 апреля по юлианскому календарю. В 1983 году Пасха пришлась на 25 апреля, а в 2010 году – на 22 марта.

Наименьшее общее кратное чисел 4, 19 и 28 равно $19 \cdot 28 = 532$. Это значит, что через каждые 532 года даты празднования Пасхи будут повторяться.



Храм Христа Спасителя в Москве

5. Некоторые замечания

Когда в 1582 году папа Григорий XIII проводил реформу церковного календаря, он менее всего думал о множестве связанных с измерением времени дел, важных в обычной жизни. Реформа календаря была внутрицерковным делом – реформой пасхалии, и об этом с полной определённостью было сказано в знаменитой папской булле (акте реформы). При этом решались три проблемы:

1) Вернуть дату весеннего равноденствия к 21 марта – той дате, которая соответствовала этому астрономическому событию во время I Вселенского (Никейского) Собора (325 год от Р.Х.).

2) Изменить систему лунных месяцев так, чтобы пасхальные полнолуния приходились на 14 день лунных месяцев.

3) Усовершенствовать исчисление календарных годов и лунных месяцев так, чтобы в обозримом будущем ни даты весеннего равноденствия, ни даты пасхальных полнолуний не отклонялись бы существенно от указанных выше значений.

Нужно сказать, что авторы реформы хорошо справились с поставленными задачами. И сейчас, по прошествии более 400 лет, весенние равноденствия приходятся на «григорианские» даты 20 или 21 марта, а первое январское полнолуние в XX веке отклонялось более чем на сутки от астрономического лишь два раза: в 1924 и 1976 годах, причём отклонение было не более, чем 1,5 суток. Впрочем, в 2000 году в результате совпадения астрономического полнолуния с днём весеннего равноденствия (20.03) отклонение календарного равноденствия (21.03) на 1 день привело к отклонению «григорианской» Пасхи от рассчитанной по астрономическим данным на 4 недели.

Изменения, внесённые при реформировании в последовательность юлианских календарных годов, были указаны нами выше. А для распределения лунных месяцев один из авторов реформы Л. Лилио нашёл принципиально другую по сравнению с юлианским календарём конструкцию. В основе лежит простая идея: если есть какой-либо способ вычислить для заданного года первое январское новолуние, то можно указать последовательность календарных новолуний, приближающих достаточно точно остальные новолуния этого года, ведь длина астрономического лунного месяца нам известна достаточно точно.

Лунная часть григорианского календаря основана на приближении

$$\beta - \frac{2081882250}{70499183} = 0{,}000001\ldots .$$

Январские новолуния вычисляются по формуле

$$M(n) \equiv 23 + 19n - \left[\frac{n}{19}\right] + \left[\frac{n}{100}\right] - \left[\frac{n}{400}\right] - \left[\frac{8\left[\frac{n}{100}\right] + 13}{25}\right] (mod\ 30), \quad (13)$$

$$1 \le M(n) \le 30.$$

Дополнительные члены в ней по сравнению с формулой (5) связаны с изменением продолжительности календарного года и с иной системой «скачков Луны».

В юлианском календаре существует 19 способов распределения новолуний в пределах лунного года (см., например, [3]). Функция (13) принимает все значения из интервала чисел от 1 до 30 включительно. Значит, в григорианском календаре должно быть не менее 30 различных способов распределения новолуний. Но и этого количества не хватило. Из-за наличия некоторых нежелательных эффектов (например, в близко лежащих годах оказывалось много новолуний, выпадающих на одни и те же дни, или появлялись месяцы продолжительностью в 59 дней) пришлось иногда в годы с номерами $n \equiv 6(mod\,30)$ и $n \equiv 12\ (mod\,30)$ вводить ещё два дополнительных распределения новолуний. Общее количество возросло до 32. Таким способом удалось ликвидировать проблемы лишь частично.

Все 32 распределения новолуний сведены в таблицу и обозначены символами

I, II, III, ..., XXIX, XXX, 19, 25.

«Григорианские» новолуния

Число	Январь	Февраль	Март	...	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1	xxx	xxix	xxx	...	xxv, xxiv	xxiii	xxii	xxi	xx
2	xxix	xxviii	xxix	...	xxiii	xxii	xxi	xx	xix
3	xxviii	xxvii	xxviii	...	xxii	xxi	xx	xix	xviii
4	xxvii	xxvi,25	xxvii	...	xxi	xx	xix	xviii	xvii
5	xxvi	xxv, xxiv	xxvi	...	xx	xix	xviii	xvii	xvi

6	xxv	xxiii	xxv	…	xix	xviii	xvii	xvi	xv
7	xxiv	xxii	xxiv	…	xviii	xvii	xvi	xv	xiv
8	xxiii	xxi	xxiii	…	xvii	xvi	xv	xiv	xiii
9	xxii	xx	xxii	…	xvi	xv	xiv	xiii	xii
10	xxi	xix	xxi	…	xv	xiv	xiii	xii	xi
11	xx	xviii	xx	…	xiv	xiii	xii	xi	x
12	xix	xvii	xix	…	xiii	xii	xi	x	ix
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
29	ii		ii	…	xxvi	xxv, xxiv	xxiv	xxii	xxii
30	i		i	…	25,xxv	xxiii	xxiii	xxi	xxi
31	xxx		xxx	…	xxiv		xxii		19,xx

Часть таблицы из статьи Calendar в Encyclopaedia Britannica

Как же узнать дни, на которые приходятся новолуния заданного лунного года? Для этого достаточно с помощью формулы (13) определить первое январское новолуние этого года. В клеточке, соответствующей этому дню, стоит один из символов. Все другие клетки таблицы, где записан тот же самый символ, будут новолуниями заданного года. Например, с помощью формулы (13) легко найти, что $M(2014)=2$. Значит, первое январское новолуние в 2014 году приходится на 2 января. В клетке, соответствующей 2.01, стоит символ xxix. Другие клетки, где записан этот символ, соответствуют датам 1.02 и 2.03. Остальные содержащие его клетки попали в опущенную здесь часть таблицы. Но если воспользоваться её полным вариантом, получим полный список всех 13 новолуний 2014 лунного года по григорианскому календарю:

2.01, 1.02, 2.03, 1.04, 30.04, 30.05, 28.06, 28.07, 26.08, 25.09, 24.10, 23.11, 22.12.

В таблице особо указаны распределения новолуний, обозначаемые как 19 и 25 – случаются они крайне редко, и число 19 стоит лишь в клетке, соответствующей 31 декабря. Остальные новолуния такого календарного года совпадают с днями, соответствующими в таблице символу xix. Мы опустим объяснения того, в каких случаях выбираются распределения 19 вместо xix и 25 вместо xxv. Рассмотрим далее два примера, взятые нами из [5].

Легко вычислить, что

$$M(4199)=11 \text{ и } M(4200)=1.$$

С помощью таблицы находим, что последнее новолуние года с номером 4199 приходится на 31 декабря, а первое новолуние года 4200 – на 1 января. Возникает лунный месяц продолжительностью в 1 день. По существу это означает, что григорианский календарь вставляет два календарных новолуния вместо одного астрономического.

Имеем также

$$M(16399)=12 \text{ и } M(16400)=30.$$

В клетке, соответствующей 12 января, стоит символ xix. Это значит, что в 16399 году новолуния могут быть распределены одним из способов: xix или 19. Опуская детали, укажем, что нужный способ – xix. Значит, в году с номером 16399 последнее новолуние произойдёт 2 декабря, а первое новолуние 16400 года придётся на 30 января. Возникает лунный месяц продолжительностью в 59 дней – календарь теряет одно астрономическое новолуние.

Проблемы возникают из-за того, что последние месяцы лунных лет в григорианском календаре не согласованы с первыми месяцами

В юлианском календаре есть строгое соответствие между астрономическими и календарными новолуниями, и календарные новолуния следуют друг за другом на примерно равных расстояниях, подобно новолуниям астрономическим. Это и называют лунным течением юлианского календаря. Григорианский календарь основан на рациональных дробях, точнее приближающих длины тропического года и синодического месяца, и потому он с ходом времени допускает меньшие погрешности. Но эти дроби имеют большие числители и знаменатели и приводят к более сложным формулам. По этой причине авторам григорианского календаря не удалось устроить последовательность новолуний таким же образом, как в юлианском календаре. Декабрьские и январские новолуния двух соседних годов не всегда согласуются друг с другом. Потому и возникают месяцы длиной в 1, 59, 58 дней и другие явления, не встречающиеся в действительности, а потому нежелательные. Конечно, всё это происходит в декабре – январе и не затрагивает пасхалию.

Принятое в католической церкви правило вычисления григорианской Пасхи совпадает с каноническим правилом Никейского собора. Только дни весеннего равноденствия, новолуния и полнолуния, а также дни недели вычисляются при помощи григорианского календаря. Именно поэтому две ветви христианской религии – православие и католичество, – пользуясь одним и тем же правилом, часто празднуют Пасху в разные дни. А если определять дату праздника по тому же правилу, но пользуясь астрономическими приборами для точной оценки полнолуния и весеннего равноденствия, то часто получается третья дата, отличная от православной и католической.

Конечно, для нахождения дня православной Пасхи достаточно воспользоваться формулами (10) – (12) или таблицами пасхальных полнолуний и дней недели для определения ближайшего воскресного дня, следующего за пасхальным полнолунием, но стройная теория, объясняющая происхождение формул и таблиц, интересна и проста, а знакомство с этим замечательным произведением античной астрономической и математической науки доставляет удовольствие. В настоящее время никто не станет пользоваться юлианским календарём для определения времени. Для этой цели есть часы: механические, электронные, атомные. Но за более чем полторы тысячи лет использования в церковной жизни юлианский календарь стал частью этой жизни. Не зря ведь все попытки ухода от юлианского календаря встречали протесты и сопротивление.

Литература

1. Календарный вопрос / Сб. статей под ред. А. Чхартишвили. Изд. Сретенского монастыря, 2000.

2. *Кинкелин Г.* Вычисление христианской пасхи, пер. с нем. и доп. Н.Я. Сонина. – Математический сборник, 1870, т. 5. – С. 73 – 92.

3. *Климишин И.А.* Календарь и хронология. – М.: Наука, 1981.

4. *Нестеренко Ю.В.* Диофантовы приближения, церковные календари и пасхалия // Историко-астрономические исследования. Вып. XXXV. – М.: Физматлит, 2010. – С. 215 – 288.

5. *Roegel D.* The missing moon of A. D. 16399 and other anomalies of the Gregorian calendar. – 2004 (см. www.loria.fr/~roegel/articles/epact19.pdf).