Пукас Юрий Остапович
Закончил в 1974 году физфак МГУ, работал в Королёве, принимал участие в программе «Союз – Аполлон», с 1978 по 2004 работал в ФИАЭ им. Курчатова. Участник всех Творческих конкурсов учителей, учитель математики.

Вспоминая ЕГЭ – 2017. Параметры

Летний ЕГЭ-2017 по математике отличается от всех предыдущих большим разнообразием задач. Порой даже варианты, над которыми склонились утром 2 июня выпускники, сидящие в одной аудитории, могли очень сильно отличаться друг от друга. Для наблюдающих сейчас со стороны, вроде нас с вами, это замечательно, это интересно, но ведь выпускники 2017 года на Едином экзамене оказались в неравных условиях! Знакомство с заданиями этого экзамена мы начнём с уравнений, содержащих параметр.

Сами же задания начали появляться в Интернете вскоре после окончания экзамена, их выкладывали на форумах вернувшиеся домой его участники. Так, на форуме сайта Александра Ларина (http://alexlarin.com/) первые две задачи (с параметром и олимпиадная) появились в 15.10. Ими поделился с нами выпускник из Московской области, подписавшийся как ***ITwearsmeout.*** Вот первая из этих задач:

1. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5x-3}\cdot\ln(a+3x)=\sqrt{5x-3}\cdot\ln(4x-a)$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Для тех, кто ещё мало знаком с логарифмами, задачу можно заменить другой, записав уравнение в условии в виде: $\dfrac{\sqrt{5x-3}}{\sqrt{a+3x}}=\dfrac{\sqrt{5x-3}}{\sqrt{4x-a}}$, или $\dfrac{\sqrt{5x-3}}{\sqrt{4x-a}}=\dfrac{\sqrt{5x-3}}{\sqrt{a+3x}}$.

Первые шаги очевидны:

$$\sqrt{5x-3}\cdot\left(\ln(a+3x)-\ln(4x-a)\right)=0.$$

Начинаем решать это уравнение, проверяя корни на принадлежность отрезку $\left[0;1\right]$. Возможны два случая: подкоренное выражение равно нулю (при условии существования обоих логарифмов) и равенство логарифмов (при условии существования корня).

Первый случай: $\begin{cases} 5x-3=0, \\ a+3x>0, \\ 4x-a>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{3}{5}, \\ -\frac{9}{5}<a<\frac{12}{5}. \end{cases}$

Отрезку $\left[0;1\right]$ этот корень принадлежит.

Второй случай: $\begin{cases} a+3x=4x-a, \\ a+3x>0, \\ 5x-3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=2a, \\ a\geq \frac{3}{10}. \end{cases}$ Корень x_2 принадлежит отрезку $\left[0;1\right]$, если $\frac{3}{10}\leq a\leq \frac{1}{2}$. Отметим, что $x_1=x_2=\frac{3}{5}$, если $a=\frac{3}{10}$.

На основной вопрос задачи (при каких значениях a уравнение имеет ровно один корень на отрезке $\left[0;1\right]$) мы без труда найдём ответ, если представим полученные результаты в виде таблицы:

Значения параметра a	$\left(-\frac{9}{5};\frac{3}{10}\right)$	$\frac{3}{10}$	$\left(\frac{3}{10};\frac{1}{2}\right]$	$\left(\frac{1}{2};\frac{12}{5}\right)$
Корни уравнения	x_1	$x_1=x_2$	$x_1;x_2$	x_1

Всё теперь наглядно, и мы без хлопот получаем надёжный **ответ**: $\left(-\frac{9}{5};\frac{3}{10}\right];\left(\frac{1}{2};\frac{12}{5}\right)$.

Следующая задача полностью аналогична только что разобранной. Решите её самостоятельно, и вы получите достаточно полное представление об основном типе и об уровне сложности задач с параметром, предлагавшихся на ЕГЭ-2017.

2. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5x-3}\cdot\ln\left(3x-a\right)=\sqrt{5x-3}\cdot\ln\left(4x+a\right)$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Действуя, как в задаче **1**, вы получите вот такую таблицу:

Значения параметра a	$\left(-\frac{12}{5};-\frac{1}{2}\right)$	$\left[-\frac{1}{2};-\frac{3}{10}\right)$	$-\frac{3}{10}$	$\left(-\frac{3}{10};\frac{9}{5}\right)$
Корни уравнения	x_1	$x_1;x_2$	$x_1=x_2$	x_1

Ответ. $\left(-\frac{12}{5};-\frac{1}{2}\right);\left[-\frac{3}{10};\frac{9}{5}\right)$.

А вот как (по информации ФИПИ) справились прошлым летом с этими вполне решаемыми задачами выпускники 2017 года: Ненулевые баллы за это задание получили около

3% участников экзамена. Основной проблемой оказалось неумелое применение графического метода решения. В работах массово отсутствовало описание сделанных чертежей и конструкций, было также значительное количество работ, в которых ответ на поставленный вопрос отсутствовал, несмотря на обилие всевозможных построений.

Но дело здесь не только в неумелом применении графического метода, хорошо зарекомендовавшего себя при решении очень многих задач с параметром, предлагавшихся ранее на ЕГЭ, например на досрочных экзаменах этого года (31.03.2017 и 14.04.2017).

Дело в том, что большинство задач летнего ЕГЭ-2017 были явно ориентированы на алгебраический метод решения, в них для любого значения параметра все корни предлагаемых уравнений находились в удобном для их последующего анализа виде. Здесь переход к геометрическому методу только усложнял решение, запутывал ситуацию.

Так, разбираясь с задачей **2**, только что предложенной вам для самостоятельного решения, надо было выполнить чёрной гелевой ручкой на гладком листе примерно такой замечательный рис.1 (соревнуясь с Геогеброй), объяснив смысл всех-всех проведённых (от руки!) линий и отмеченных точек (указав, как найдены их координаты).

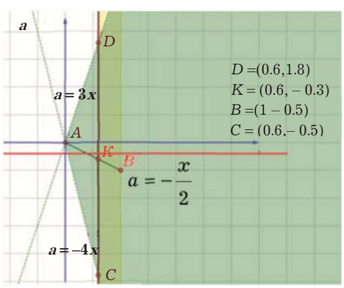

Рис. 1

Затем, на основании полученного рисунка, надо было найти ответ на вопрос о единственном корне, принадлежащем отрезку [0;1].

Корню $x_1 = \frac{3}{5}$ на рисунке соответствуют внутренние точки отрезка *CD*. Корню $x_2 = -2a$, принадлежащему отрезку $[0;1]$, – отрезок *AB* без крайней точки *A*. В точке *K* $x_1 = x_2$. Но внутренние точки отрезка *AK* не могут быть решением исходного уравнения, так как в них нарушается условие $5x - 3 \geq 0$. При размещении рисунка на форуме первоначально этот момент был упущен, что привело к неверному **ответу**: $\left(-\frac{12}{5}; -\frac{1}{2}\right)$; $\left\{-\frac{3}{10}\right\}$; $\left[0; \frac{9}{5}\right)$, вскоре исправленному.

Встречались ли в вариантах тренировочных работ или на самом ЕГЭ подобные задачи раньше? Конечно! В первую очередь это те привычные тригонометрические уравнения, которые в вариантах ЕГЭ идут сейчас под номером **13**. В них перекрёстная проверка и отбор корней – дело привычное. Для тех, кто понимает логику таких задач, появление в них параметров не намного усложняет их решение. Вот один простой и один сложный примеры 2011 года.

3. Решите уравнение

$$(\cos x - 1)\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right)\sqrt{\cos x} = 0.$$

Так как в уравнении присутствует $\operatorname{tg} x$, то стоящий под корнем $\cos x \neq 0$, следовательно, левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x > 0$. Рассматриваем два случая:

1) $\cos x = 1$, тогда $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

2) $\operatorname{tg}x = -\sqrt{3}$, тогда $x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$ (рис. 2).

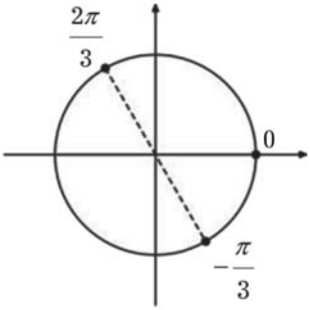

Рис. 2

Но в точках $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$, не выполняется условие $\cos x > 0$, поэтому $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Ответ. $2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

В том же 2011 году мне очень понравилась следующая задача. Решив её самостоятельно, получите удовольствие и вы.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\cos y} \cdot \sqrt{6x - x^2 - 8} = 0, \\ \sqrt{\sin x} \cdot \sqrt{2 - y - y^2} = 0. \end{cases}$$

Ответ. $(2;1),\ \left(\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right).$

Но главный опыт в решении рассматриваемых нами задач мог быть приобретён во время тренировочной работы, предложенной российским выпускникам 6 марта 2017. Посмотрите: две следующие задачи, встретившиеся в той работе, именно такого типа, что были предложены 2 июня!

5. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\left(2x + a + 1 - \operatorname{tg}x\right)^2 = \left(2x + a - 1 + \operatorname{tg}x\right)^2$ имеет единственный корень на отрезке $[0; \pi]$.

$\left(2x + a + 1 - \operatorname{tg}x\right)^2 - \left(2x + a - 1 + \operatorname{tg}x\right)^2 = 0;$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2 - 2\operatorname{tg}x)(4x + 2a) = 0.$

Рассматриваем два случая.

Первый случай: $\operatorname{tg}x = 1$, это уравнение при любом значении параметра a имеет на отрезке $[0; \pi]$ единственный корень $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Второй случай: $4x + 2a = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_2 = -\dfrac{a}{2}$ при условии, что $\operatorname{tg}x$ определён. То есть, $x_2 \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Число $-\dfrac{a}{2}$ принадлежит отрезку $[0; \pi]$, если $-2\pi \le a \le 0$. Но при $a = -\pi$ корень $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$, а это недопустимо. Если же $a = -\dfrac{\pi}{2}$, то $x_1 = x_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

Таблица поможет нам записать ответ:

Значения параметра a	$(-\infty; -2\pi)$	$[-2\pi; -\pi)$	$-\pi$	$\left(\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right)$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$	$(0; +\infty)$
Корни уравнения	x_1	$x_1; x_2$	x_1	x_1	$x_1 = x_2$	$x_1; x_2$	x_1

Ответ: $a < -2\pi;\ a = -\pi;\ a = -\dfrac{\pi}{2};\ a > 0.$

6. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(2x+\ln\left(x+2a\right)\right)^2=\left(2x-\ln\left(x+2a\right)\right)^2$$

имеет единственный корень на отрезке $\left[0;1\right]$.

$\left(2x+\ln\left(x+2a\right)\right)^2-\left(2x-\ln\left(x+2a\right)\right)^2=0;$

$\Leftrightarrow x\cdot\ln\left(x+2a\right)=0.$

Рассматриваем два случая.

Первый случай: $\begin{cases}x=0,\\x+2a>0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0,\\a>0.\end{cases}$$

Отрезку $\left[0;1\right]$ этот корень принадлежит.

Второй случай: $x+2a=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_2=1-2a$. Корень x_2 принадлежит отрезку $\left[0;1\right]$, если $0\le a\le\frac{1}{2}$. Если же $a=\frac{1}{2}$, то $x_1=x_2=0$.

Суммируем результаты:

1) $a<0$, нет корней;

2) $a=0$, единственный корень $x_2=1$;

3) $0<a<\frac{1}{2}$, два корня: $x_1=0$ и $x_2=1-2a$;

4) $a=\frac{1}{2}$, $x_1=x_2=0$. Один корень!

5) $a>\frac{1}{2}$, единственный корень $x_1=0$.

Ещё удобнее представить всё это в виде таблицы:

Значения параметра a	0	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$
Корни уравнения	x_2	$x_1;x_2$	$x_1=x_2$	x_1

Ответ. $0;\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Возвращаемся к задачам летнего ЕГЭ. Очень много их (и не только с параметрами) можно найти на образовательном портале «Решу ЕГЭ» Дмитрия Гущина. Решайте их по разобранным здесь образцам и сравнивайте с приведёнными на https://ege.sdamgia.ru/ решениями.

7. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+\left(x-1\right)\sqrt{3x-a}=x$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[0;1\right]$.

$$x^2+\left(x-1\right)\sqrt{3x-a}=x;\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\left(x-1\right)+\left(x-1\right)\sqrt{3x-a}=0;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x+\sqrt{3x-a}\right)=0$. Рассматриваем два случая: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=0,\\3x-a\ge0;\end{cases}\\\sqrt{3x-a}=-x\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\a\le3;\end{cases}\\\begin{cases}3x-a=x^2,\\-x\ge0.\end{cases}\end{array}\right.$ Помня, что нас интересуют только корни, принадлежащие отрезку $\left[0;1\right]$, получаем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=1,\\a\le3;\end{cases}\\\begin{cases}x_2=0,\\a=0.\end{cases}\end{array}\right.$

Получается, что исходное уравнение имеет на отрезке $[0;1]$ ровно один корень, если $a\in(-\infty;0)\cup(0;3]$.

Ответ. $(-\infty;0)$; $(0;3]$.

8. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-a}\cdot\sin x=-\sqrt{x-a}\cdot\cos x$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;\pi]$. Эта задача из тех, что предлагались в Москве. Приводим уравнение к виду

$$\sqrt{x-a}\cdot(\sin x+\cos x)=0.$$

На отрезке $[0;\pi]$ получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=a,\\ 0\le a\le\pi;\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=\dfrac{3\pi}{4},\\ x_2-a\ge 0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=a,\\ 0\le a\le\pi;\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=\dfrac{3\pi}{4},\\ a\le\dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Если $a=\frac{3\pi}{4}$, то $x_1=x_2$.

Представим полученные результаты в виде таблицы. Это поможет нам получить ответ:

Значения параметра a	$(-\infty;0)$	$\left[0;\frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right]$
Корни уравнения	x_2	$x_1;x_2$	$x_1=x_2$	x_1

Ответ: $(-\infty;0)\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$.

9. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5x-3}\cdot\ln\left(x^2-6x+10-a^2\right)=0$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;3]$.

Будем действовать, как в предыдущих задачах. Сначала найдём корни, а затем исследуем вопрос об их принадлежности отрезку $[0;3]$.

Рассмотрим два случая:

$$\begin{cases}5x-3=0,\\ x^2-6x+10-a^2>0\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}x^2-6x+10-a^2=1,\\ 5x-3\ge 0.\end{cases}$$

В первом случае получаем:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{5},\\ \dfrac{9}{25}-\dfrac{18}{5}+10-a^2>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{5},\\ -\dfrac{13}{5}<a<\dfrac{13}{5}.\end{cases}$$

Второй случай: $\begin{cases}(x-3)^2=a^2,\\ 5x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=3+a,\\ a\ge-\dfrac{12}{5}\end{cases}\text{ и }\begin{cases}x_3=3-a,\\ a\le\dfrac{12}{5}.\end{cases}$$

Исследовав вопрос о принадлежности отрезку $\left[0;3\right]$ корней x_2 и x_3, в итоге получаем:

$$\begin{cases} x_2 = 3 + a, \\ -\dfrac{12}{5} \le a \le 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_3 = 3 - a, \\ 0 \le a \le \dfrac{12}{5}. \end{cases}$$

Заметим, что $x_2 = x_3 = 3$, если a=0.

Найдём теперь, что $x_2 = x_1$, если $a = -\dfrac{12}{5}$, и $x_3 = x_1$, если $a = \dfrac{12}{5}$.

Представим теперь полученные результаты в виде таблицы:

Значения параметра a	$\left(-\dfrac{13}{5};-\dfrac{12}{5}\right]$;	$-\dfrac{12}{5}$	$\left(-\dfrac{12}{5};0\right)$	0	$\left(0;\dfrac{12}{5}\right)$	$\dfrac{12}{5}$	$\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{13}{5}\right)$
Корни уравнения	x_1	$x_1 = x_2$	$x_1; x_2$	$x_1;x_2{=}x_3$	$x_1; x_3$	$x_1 = x_3$	x_1

С помощью этой таблицы мы без труда найдём, при каких значениях a уравнение имеет ровно один корень на отрезке $\left[0;3\right]$.

Ответ. $\left(-\dfrac{13}{5};-\dfrac{12}{5}\right]$; $\left[\dfrac{12}{5};\dfrac{13}{5}\right)$.

10. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\ln\left(4x-3\right)\cdot\sqrt{x^2+4x-4a-a^2}=0$ имеет ровно один корень на отрезке [0;2].

Будем действовать, как в предыдущей задаче. Сначала найдём корни, а затем исследуем вопрос об их принадлежности отрезку [0;2].

Рассмотрим два случая:

$$\begin{cases} 4x - 3 = 1, \\ x^2 + 4x - 4a - a^2 \ge 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 4a - a^2 = 0, \\ 4x - 3 > 0. \end{cases}$$

В первом случае получаем:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ 5 - 4a - a^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ -5 \le a \le 1. \end{cases}$$

Второй случай: $\begin{cases} \left(x+2\right)^2 = \left(a+2\right)^2, \\ 4x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = a, \\ a > \dfrac{3}{4} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_3 = -a - 4, \\ a < -\dfrac{19}{4}. \end{cases}$$

Исследовав вопрос о принадлежности отрезку $\left[0;2\right]$ корней x_2 и x_3, в итоге получаем:

$$\begin{cases} x_2 = a, \\ \dfrac{3}{4} < a \le 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_3 = -a - 4, \\ -6 \le a < -\dfrac{19}{4}. \end{cases}$$

Корни могут совпадать: $x_2 = x_1$, если $a = 1$, и $x_3 = x_1$, если a=–5. Случай же, когда $x_2 = x_3$, здесь невозможен, так как интервалы, на которых эти корни определены, не имеют общих точек.

Представим теперь полученные результаты в виде таблицы:

Значения параметра a	[–6; –5]	–5	$\left(-5;-\dfrac{19}{4}\right)$	$\left[-\dfrac{19}{4};\dfrac{3}{4}\right]$	$\left(\dfrac{3}{4};1\right)$	1	(1;2]
Корни уравнения	x_3	$x_3 = x_1$	$x_1; x_3$	x_1	$x_1; x_2$	$x_1 = x_2$	x_2

Согласитесь, что с помощью этой таблицы выяснить, при каких значениях a уравнение имеет ровно один корень на отрезке [0;2], намного легче, чем с помощью вот такого красивого рисунка 3, взятого с вышеназванного форума:

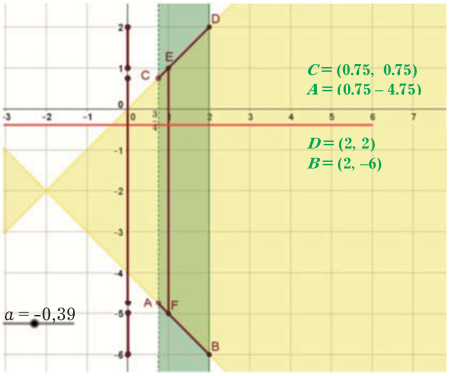

Рис. 3

Ответ. $[-6;-5];\ \left[-\frac{19}{4};\frac{3}{4}\right];\ [1;2]$.

11. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{2-5x}\cdot\ln\left(36x^2-a^2\right)=\sqrt{2-5x}\ln\left(6x+a\right)$ имеет ровно один корень.

Обратите внимание на то, что в этом задании не ставится условия о принадлежности корней отрезку [0;1]. Но мы скоро убедимся, что все возможные корни этому отрезку принадлежат. Но сначала их надо найти!

Приводим уравнение к виду $\sqrt{2-5x}\cdot\left(\ln\left(36x^2-a^2\right)-\ln\left(6x+a\right)\right)=0.$

Рассмотрим два случая:

$$\begin{cases}\sqrt{2-5x}=0,\\ 36x^2-a^2>0,\\ 6x+a>0\end{cases}$$

и $\begin{cases}\ln\left(36x^2-a^2\right)=\ln\left(6x+a\right),\\ 2-5x\ge 0.\end{cases}$

Первый случай:

$$\begin{cases}x_1=\frac{2}{5},\\ 36\cdot\frac{4}{25}-a^2>0,\\ \frac{12}{5}+a>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{2}{5},\\ -\frac{12}{5}<a<\frac{12}{5}.\end{cases}$$

Второй случай: $\begin{cases}6x-a=1,\\ 6x+a>0,\\ 2-5x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\frac{a+1}{6},\\ 2a+1>0,\\ 2-\frac{5}{6}(a+1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\frac{a+1}{6},\\ -\frac{1}{2}<a\le\frac{7}{5}.\end{cases}$$

Если $a=\frac{7}{5}$, то $x_1=x_2$.

Теперь можно убедиться, что корень x_2 принадлежит отрезку [0;1].

Действительно: $\begin{cases}0\le\frac{a+1}{6}\le 1,\\ -\frac{1}{2}<a\le\frac{7}{5}\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le a\le 5,\\ -\frac{1}{2}<a\le\frac{7}{5}\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<a\le\frac{7}{5}.$$

А таблица поможет нам получить ответ:

Значения параметра a	$\left(-\frac{12}{5};-\frac{1}{2}\right]$	$\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{5}\right)$	$\frac{7}{5}$	$\left(\frac{7}{5};\frac{12}{5}\right)$
Корни уравнения	x_1	$x_1;x_2$	$x_1=x_2$	x_1

Ответ. $\left(-\frac{12}{5};-\frac{1}{2}\right];\ \left[\frac{7}{5};\frac{12}{5}\right)$.

12. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\ln(3a-x)\cdot\ln(2x+2a-5)=$$
$$=\ln(3a-x)\cdot\ln(x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке [0;2].

Приводим уравнение к виду $\ln(3a-x)\cdot\left(\ln(2x+2a-5)-\ln(x-a)\right)=0.$

Рассмотрим два случая:

$$\begin{cases}\ln(3a-x)=0,\\ 2x+2a-5>0,\\ x-a>0\end{cases}$$

и $\begin{cases}\ln(2x+2a-5)=\ln(x-a),\\ x-a>0,\\ 3a-x>0.\end{cases}$

Первый случай:

$$\begin{cases}x_1=3a-1,\\ 2(3a-1)+2a-5>0,\\ (3a-1)-a>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=3a-1,\\ a>\frac{7}{8}.\end{cases}$$

Второй случай:

$$\begin{cases}2x+2a-5=x-a,\\ x-a>0,\\ 3a-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=5-3a,\\ 5-4a>0,\\ 6a-5>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=5-3a,\\ \frac{5}{6}<a<\frac{5}{4}.\end{cases}$$

Во всех ранее рассмотренных уравнениях один из найденных корней не зависел от параметра. Здесь же оба корня от параметра зависят.

Теперь выясним, при каких условиях корни x_1 и x_2 принадлежат отрезку [0;2].

Для x_1: $\begin{cases}0\le 3a-1\le 2,\\ a>\frac{7}{8}\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}\le a\le 1,\\ a>\frac{7}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{7}{8}<a\le 1.$$

Для x_2: $\begin{cases}0\le 5-3a\le 2,\\ \frac{5}{6}<a<\frac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1\le a\le\frac{5}{3},\\ \frac{5}{6}<a<\frac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow 1\le a<\frac{5}{4}.$$

Если $a=1$, то $x_1=x_2=2.$

Суммируем результаты:

1) $a\le\frac{7}{8}$, нет корней, принадлежащих отрезку [0;2];

2) $\frac{7}{8}<a<1$, на отрезке [0;2] единственный корень x_1;

3) $a=1$, тогда $x_1=x_2=2$;

4) $1<a<\frac{5}{4}$, на отрезке [0:2] единственный корень x_2;

5) $a\ge\frac{5}{4}$, нет корней, принадлежащих отрезку [0:2].

Объединяя случаи **2**, **3** и **4**, получаем ответ: $\left(\frac{7}{8};\frac{5}{4}\right)$.

Всё оказалось так просто, что даже привычная таблица здесь не потребовалась! А нам осталось только «восхититься» компьютерной иллюстрацией геометрического решения этой задачи (см. рис. 4).

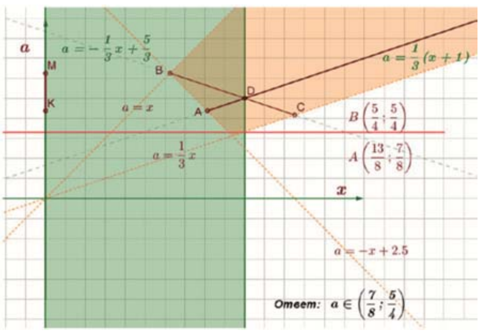

Рис. 4

У тех, кто сдавал экзамен в резервный день 28.06.2017, было почти 4 недели, чтобы изучить опыт основного экзамена. Для задач с параметрами это оказалось полезным.

13. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $x\cdot\sqrt{x-a}=\sqrt{4x^2-(4a+2)x+2a}$ имеет ровно один корень на отрезке [0;1].

Так как

$$4x^2-(4a+2)x+2a=(x-a)(4x-2),$$

исходное уравнение равносильно уравнению

$$x\cdot\sqrt{x-a}=\sqrt{(x-a)(4x-2)}.$$

Как и в задачах от 2.06.2017, рассматриваем два случая.

В первом случае $x_1=a$ при всех значениях параметрах a. Этот корень принадлежит отрезку [0;1] при $0\le a\le 1$.

Второй случай: $\begin{cases}\sqrt{4x-2}=x,\\ x\ge a\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=4x-2,\\ x\ge 0,\\ x\ge a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=2-\sqrt{2},\\ x_3=2+\sqrt{2},\\ x\ge a.\end{cases}$$

Корень $x_3>1$, его мы не рассматриваем. Принадлежащий же отрезку [0;1] корень $x_2=2-\sqrt{2}$ определён при $a\le 2-\sqrt{2}$. Заносим результаты в привычную таблицу:

Значения параметра a	$(-\infty;0)$	$\left[0;2-\sqrt{2}\right)$	$2-\sqrt{2}$	$\left(2-\sqrt{2};1\right]$
Корни уравнения	x_2	$x_1;x_2$	$x_1=x_2$	x_1

Ответ. $a<0;\ 2-\sqrt{2}\le a\le 1$.

14. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}}=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[4;8]$.

$$\begin{cases}(x-a-7)(x+a-2)=0,\\ 10x-x^2-a^2>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=a+7,\\ \dfrac{2-\sqrt{46}}{2}<a<\dfrac{2+\sqrt{46}}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=2-a,\\ \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Если $a=-\frac{5}{2}$, то $x_1=x_2=\frac{9}{2}$.

Учитывая принадлежность корней отрезку $[0;1]$, получаем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=a+7,\\ -3\le a\le 1;\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=2-a,\\ \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}<a\le -2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Аккуратно заполняем таблицу:

Значения параметра a	$\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2};-3\right)$	$\left[-3;-\frac{5}{2}\right)$	$-\frac{5}{2}$	$\left(-\frac{5}{2};-2\right]$	$(-2;1]$
Корни уравнения	x_2	$x_1;x_2$	$x_1=x_2$	$x_1;x_2$	x_1

Ответ. $\frac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<-3$; $a=-\frac{5}{2}$; $-2<a\le 1$.

Каледоскоп Каледоскоп Каледоскоп

53-я международная выставка композитов JEC World 2018

В Париже завершилась 53-я Ведущая международная выставка композитов JEC World 2018, основным событием которой стала презентация российских компаний.

Данный форум проводится ежегодно с 1965-го года, и за это время JEC World стал самым значимым событием в области композитных материалов. Во время выставки в Париж стягиваются лучшие мировые специалисты не только химической отрасли или индустрии пластмасс, но и представители аэрокосмической, судостроительной, автомобильной, строительной, железнодорожной промышленности. Форум 2018-го года запомнится не только обширным количеством новых изобретений, но и «невероятно большой» делегацией из России.

Российские экспоненты были представлены на коллективном стенде, организованном Российским экспортным центром на территории общей площадью 96 квадратных метров. Здесь можно было увидеть продукцию таких российских компаний, как «Русбазальт», «НИИграфит», «НИИКАМ», «Химпроминжиниринг» и многих других. Производители из России представили свои последние разработки: производственное оборудование, полимерные материалы и пластмассы, технический текстиль, углеродные волокна, армированные и жаропрочные материалы, которые не только широко используются на родине, но также пользуются большим спросом за рубежом.

По словам участников выставки, российские композиты отличаются высоким качеством и востребованы на мировом рынке. Высокотехнологичные углеродные материалы, строительные полимерные связующие вещества и ткани, произведенные в России, успешно конкурируют с лучшими мировыми образцами. При этом российский рынок композитов может похвастаться почти 20-процентным годовым темпом роста. Сейчас композиционное производство в России оценивается в 60 миллиардов рублей. При этом в данную отрасль вовлечены более 150 предприятий, разработки которых впоследствии используются в авиастроении, судостроении, энергетике, нефтегазовой добыче и космической промышленности.