



Титов Вячеслав Константинович

Профессор кафедры ПВК Российского государственного технологического университета им. К.Э. Циолковского.

Кандидат физико-математических наук, доцент.

Организатор и активный участник многих всесоюзных, всероссийских и московских олимпиад по математике и программированию.



Волшебные игральные кубики, парадоксы соревнований и противоречивые голосования

Представьте себе, что у меня есть три кубика. Обычные шестигранные кубики, на каждой грани которых написаны некоторые числа. Я предлагаю своему партнёру выбрать любой из этих кубиков, который ему больше понравился, а сам беру себе другой кубик из двух оставшихся. Далее мы начинаем играть: каждый бросает свой кубик, и выигрывает тот, на чьём кубике выпадет большее число. Оказывается, что при очень большом числе бросаний в среднем я буду в выигрыше, то есть я буду чаще выигрывать у партнёра. Даже если партнёр поменяет кубик, например, возьмёт кубик, которым играл я, то он всё равно будет проигрывать, если я воспользуюсь правом выбрать себе кубик из двух оставшихся.

Может ли такое быть? Оказывается, может. Весь секрет в числах, которые расставлены на гранях кубиков.

Задача заключается в том, чтобы найти эти числа и расставить их на гранях трёх кубиков так, чтобы кубики обладали описанным выше «волшебным» свойством.

Попробуем решить эту задачу. Сконструируем такие кубики. Очевидно, что указанные кубики обладают следующим свойством: для любого из них среди двух других найдётся кубик «лучше» его. Именно поэтому я буду выигрывать у партнёра, потому что я выбираю кубик после него и выбираю кубик «лучший», чем выбрал он.

Обозначим кубики А, В, С. Это значит, что, возможно, кубик А лучше кубика В, кубик В лучше кубика С, а кубик С лучше кубика А. То есть отношение «лучше» между кубиками не транзитивно.

Упростим немного задачу: будем кубики считать не шестигранными, а

трёхгранными. Это легко реализовать, если мы будем на двух гранях каждого, например на противоположных, писать одинаковые числа. Тогда каждый кубик будет характеризоваться тремя числами, каждое из которых написано на двух гранях кубика.

Чтобы понять, что значит один кубик «лучше» другого, нужно понять, что значит одна тройка чисел «лучше» другой. Несомненно, тройка (5,6,7) лучше тройки (1,2,3), потому что кубик с числами (5,6,7) всегда будет выигрывать у кубика с числами (1,2,3).

А как в общем случае определить, что одна тройка чисел лучше другой? Для нас важны не абсолютные значения чисел, а их относительные значения, важно больше одно число другого или меньше. Поэтому удобно рассматривать изображения чисел на числовой оси и сравнивать, какая тройка точек на числовой оси лучше другой тройки точек. Например, на рис. 1 точки на числовой оси обозначены крестиками и ноликами.

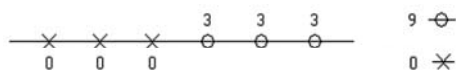


Рис. 1

Числа, соответствующие точкам, расположенным левее, имеют меньшие значения, чем те, что правее. На этом рисунке над и под точками написаны числа, которые имеют следующий смысл: сколько точек из другой тройки находятся левее данной точки. Здесь левее каждой точки, обозначенной ноликом, имеются 3 точки, обозначенные крестиками, поэтому над каждым ноликом стоит число 3. А левее каждого крестика нет ни одного нолика, поэтому под крестиками стоят нули. Справа от оси

показано, что нолики выигрывают у крестиков со счетом 9:0. Это значит, что кубик с числами, соответствующими ноликам, в 9 случаях выигрывает у кубика с числами, соответствующими крестикам, 9 раз, и наоборот, кубик с крестиками не выигрывает ни разу.

Интуитивно ясно, что для того чтобы 3 кубика были не в транзитивном отношении, нельзя, чтобы выигрыш одного кубика над другим был таким большим, как в рассмотренном случае. Нужно постараться выигрыш сделать минимальным, например со счетом 5:4.

Рассмотрим некоторые варианты возможного расположения двух троек точек на числовой оси с различными отношениями между точками из разных троек.

На рис. 2 тройка точек, обозначенных крестиками, выигрывает у тройки точек, обозначенных ноликами, со счетом 5:4. Это значит, что кубик с числами, соответствующими крестикам, в 9 случаях будет выигрывать у кубика с числами, соответствующими ноликам, в среднем 5 раз, а кубик с ноликами только 4.

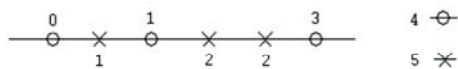


Рис. 2

На рис. 3 тройка точек, обозначенных ноликами, выигрывает у тройки точек, обозначенных квадратами, также со счетом 5:4.

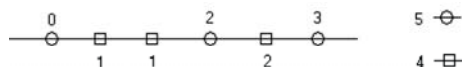


Рис. 3

А на рис. 4 тройка точек, обозначенных квадратами, выигрывает у

тройки точек, обозначенных крестиками, и тоже со счётом 5:4.

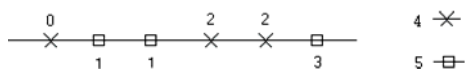


Рис. 4

Давайте теперь объединим нолики, крестики и квадратики с рисунков 2, 3 и 4 так, чтобы сохранились их относительные расположения, указанные на этих рисунках. Тогда мы получим то, что видим на рис. 5.

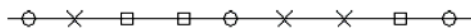


Рис. 5

Действительно, если мы из рис. 5 удалим квадратики, то получим расположение нулей и крестиков такое же, как на рис. 2. Аналогично удалением крестиков или ноликов из рис. 5 проверяется соответствие расположению точек на рис. 3 и 4.

Теперь остаётся только придать конкретные значения девяти точкам рис. 5. Например, просто присвоить им целые числа от 1 до 9, что показано на рис. 6.

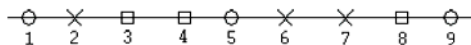


Рис. 6

Таким образом, мы получили следующие три тройки чисел: (1, 5, 9), (2, 6, 7) и (3, 4, 8). Первая тройка соответствует ноликам, вторая крестикам, а третья квадратам. Как было показано, вторая тройка лучше первой (рис. 2), третья тройка лучше второй (рис. 4), а первая лучше третьей (рис. 3).

Кубики с найденным решением изображены на рис. 7.



Рис. 7

Естественно, полученное решение не является единственным.

Пронумеровав точки рис. 5 числами от 10 до 18 и объединив с нумерацией рис. 6, получим шестёрки, удовлетворяющие указанным требованиям: (1,5,9,10,14,18), (2,6,7,11,15,16) и (3,4,8,12,13,17). Здесь также вторая шестёрка лучше первой, третья лучше второй, а первая лучше третьей.

Если разрешить повторять числа на гранях кубиков, то можно обойтись всего четырьмя цифрами. Вот пример таких чудесных кубиков с числами на гранях 1, 2, 3 и 4:

- (1,1,1,2,4,4),
- (1,1,1,3,3,3),
- (1,2,2,2,2,2).

Нетрудно проверить, что при равновероятном бросании кубиков в приведённом примере первый кубик выигрывает у второго со счётом 15:12, второй у третьего – со счётом 18:15, а третий у первого – со счётом 15:13.

В статье [1] приведено 43 возможных варианта волшебных кубиков с минимальным количеством чисел на гранях.

Ситуация с «волшебными» кубиками выглядит парадоксальной. Казалось бы, в соответствии со здравым смыслом, если А лучше Б, а Б лучше В, то и А должно быть лучше В. Это естественное свойство отношений и принято называть транзитивностью.

Кажущаяся парадоксальность, которая возникает с «волшебными» кубиками, основана на нарушении транзитивности. Во всех приведённых примерах нарушение транзи-

тивности является циклическим. Такие парадоксы, основанные на нарушении транзитивности, иногда появляются и в других жизненных ситуациях.

Рассмотрим парадоксы, возникающие в командных соревнованиях для индивидуальных видов спорта, таких, например, как шахматы. Будем считать, что сила каждого игрока определяется некоторым числом, называемым рейтингом. Для простоты будем считать, что команды состоят из «идеальных» игроков, то есть игрок всегда побеждает игрока с меньшим рейтингом и делает ничью с равным по силе.

Есть два типа (способа) проведения командных соревнований:

1) Каждый игрок играет со всеми игроками другой команды (всего N^2 партий, где N – количество игроков в команде).

2) В каждой команде игроки упорядочиваются «по доскам» (обычно в порядке убывания рейтинга), и каждый игрок играет только одну партию с соответствующим партнером другой команды (всего N партий).

Удивительно, но команда, проигравшая в матче одного типа, может выиграть в матче другого типа.

Пусть имеются 2 команды А и В по 5 игроков в каждой и рейтинги игроков этих команд будут следующие:

А (6 4 3 3 2),

В (5 4 4 3 1).

Составим таблицу игр в соревнованиях этих команд по типу 1:

	5	4	4	3	1	Σ
6	1	1	1	1	1	5
4	0	1/2	1/2	1	1	3
3	0	0	0	1/2	1	$1\frac{1}{2}$
3	0	0	0	1/2	1	$1\frac{1}{2}$
2	0	0	0	0	1	1

В первом столбце таблицы – рейтинги игроков команды А, в первой строке – команды В. Результаты матча 1-го типа показаны в клетках пересечения соответствующих строк и столбцов: 1 – выигрыш игрока команды А, 0 – проигрыш, 1/2 – ничья.

Последний столбец – суммы очков игроков команды А для матча 1-го типа. Общая сумма очков команды А равна 12. Так как разыгрывалось 25 очков (5х5), то у команды В получается 13 очков. Следовательно, команда А проигрывает команде В.

Чтобы определить результат игр для матча 2-го типа, достаточно рассмотреть только диагональ приведённой таблицы (всего 5 игр). Здесь мы видим, что в матче 2-го типа у команды А 3 очка из 5 возможных, у команды В только 2 очка. То есть в этом случае побеждает команда А. Также получаем парадоксальную ситуацию.

Обратим внимание, что между рейтингами игроков выполняется отношение транзитивности. Так, например, если X, Y и Z – рейтинги некоторых трёх игроков, то из того, что $X > Y$ и $Y > Z$, следует $X > Z$. Но при сравнении сил разных команд транзитивность может не соблюдаться.

Рассмотрим пример из трёх команд А, В и С, с тремя игроками в каждой, со следующими рейтингами:

А (5 2 2),

В (4 4 1),

С (3 3 3).

Сравнивая силы этих команд в матчах обоих типов, мы видим, что команды обыгрывают друг друга циклически: А сильнее В, В сильнее С, а С сильнее А, что выглядит парадоксально. Действительно, в случае матча 1-го типа имеем: А:В = 5:4, В:С = С:А = 6:3. А в случае матча 2-го типа: А:В = В:С = С:А = 2:1.

А вот совсем парадоксальный пример, в котором цикличность отношения сил команд имеет противоположные направления в зависимости от типа матча.

Рассмотрим 3 команды по 5 игроков в каждой со следующим распределением рейтингов:

А (11 9 6 3 1),

В (10 7 5 5 4),

С (8 7 7 5 2).

В этом примере в соревнованиях 1-го типа $A < B$, $B < C$, $C < A$, а в соревнованиях 2-го типа $A > B$, $B > C$, $C > A$. Везде преимущество минимальное – 1 очко.

Аналогичные противоречия возникают в задачах «Теории группового выбора» или «Теории экспертных оценок» (есть такие теории, основанные на математических методах). Вот типичная задача:

Имеется N альтернатив и M индивидуумов. Каждый индивидуум высказывает определённые предпочтения относительно заданных альтернатив. Какой должна быть процедура учёта этих предпочтений для выявления группового предпочтения этих альтернатив? Например, какую из рассматриваемых альтернатив можно считать наиболее предпочтительной для всей группы из M индивидуумов в целом?

Сравнивая такую задачу с командными соревнованиями, видно, что «игроками» здесь выступают альтернативы, а результатами игр, или рейтингами игроков, – результаты голосования индивидуумов.

Оказывается, что процедура выявления групповых предпочтений между альтернативами, которая выглядит совершенно естественной, может привести к нетранзитивности полученного отношения предпочтения.

Чтобы обосновать предлагаемую процедуру группового выбора, приведём такой пример.

Пусть имеется 35 индивидуумов и 3 альтернативы (X , Y , Z), из которых нужно коллективно выбрать одну. Альтернативами могут быть кандидаты на выборную должность.

Пусть за X – 17 человек, за Y – 16, а за Z – только 2. Кажется очевидным, что победит X , а у Z никаких шансов. Но представим, что Z вовремя отказался от участия или, что часто практикуется, был второй тур. Тогда возможна победа Y , если те, кто был за X , проголосуют за Y . За X – 17, за Y – 18.

Теперь представим, что X и Y настолько антагонистичны, что те, кто голосовал за X , предпочтут Z , но не Y , а те кто за Y , предпочтут Z , а не X . То есть, если перед голосованием умрёт Y , то будет: за X – 17, за Z – 18, а если убьют X , то будет: за Y – 16, за Z – 19. В обоих случаях побеждает «безнадёжный» Z .

Поэтому более правильно (справедливо) рассматривать предпочтения, упорядочивая для каждого индивидуума все имеющиеся альтернативы.

Но тогда рассмотрим следующую таблицу предпочтений (3 индивидуума (A , B , C) и 3 альтернативы (X , Y , Z)):

$A (X Y Z)$,

$B (Y Z X)$,

$C (Z X Y)$.

Здесь для A X предпочтительнее Y и Z , а Y предпочтительнее X . Обозначим это так: $X > Y > Z$. Тогда для B $Y > Z > X$, а для C $Z > X > Y$.

Логично процедуру выявления группового предпочтения строить по принципу большинства индивидуальных предпочтений, то есть по принципу: выигрывает та альтерна-

тива, за которую голосует большинство индивидуумов.

Так, в рассматриваемой таблице предположений $X > Y$ для двух индивидуумов против одного, следовательно, естественно считать $X > Y$ и для группового выбора, то есть считать, что для группы большинством X предпочтительнее Y .

Но тогда для группового выбора получаем: $X > Y$ (A и C против B), $Y > Z$ (A и B против C) и $Z > X$ (B и C против A). Здесь налицо нарушение транзитивности. Это противоречит нашему интуитивному пониманию предпочтений. Мы не можем допустить нарушение транзитивности для индивидуальных предпочтений (если игру в шахматы я предпочитаю игре в шашки, а играть в шашки я люблю больше, чем играть в карты, то абсолютно ясно, что если мне предложат сыграть в шахматы или в карты, я выберу шахматы).

Приведённый пример предпочтений простой (три индивидуума и три альтернативы). Нетрудно построить более сложные примеры, с большим числом индивидуумов и альтернатив, в которых также может быть нарушена транзитивность в групповом выборе предпочтений по принципу простого большинства. Процедуры группового выбора могут быть основаны и на более интересных принципах, чем принцип простого большинства, но которые также в определённых случаях приводят к нетранзитивным результатам. Более абстрактный и основательный подход к изучению таких процедур был предложен К. Дж. Эрроу [3].

Как было показано в начале статьи, различные процедуры командных соревнований приводят к разным, даже противоположным результатам, так и различные проце-

дуры голосования могут приводить к разным результатам, чем и пользуются политики, во власти которых приспособливать процедуры выборов под свои интересы.

Вернёмся к нашему первому примеру голосования, рассмотрим соответствующую таблицу:

$$17 \ (X \ Z \ Y),$$

$$16 \ (Y \ Z \ X),$$

$$2 \ (Z \ Y \ X)$$

(первый столбец – количества индивидуумов, имеющих соответствующие одинаковые предпочтения).

Здесь $Z > X$ (18 против 17), $Z > Y$ (19:16), $Y > X$ (18:17), транзитивность есть. И коллективным предпочтением по принципу простого большинства будет: $Z > Y > X$.

Но подсчёт очков можно построить с весами, например, за первый уровень предпочтения присваивать 3 очка, за второй – 2 и за третий – 1 очко. Тогда у X $17 \times 3 + 16 + 2 = 69$ очков, у Y $16 \times 3 + 2 \times 2 + 17 = 69$ очков, у Z $17 \times 2 + 16 \times 2 + 6 = 72$ очка. Побеждает Z , но X и Y одинаковы.

Но если применить силовой приём (как это делают заинтересованные политики) и потребовать, чтобы за первое место присваивать 4 очка (оставив остальные прежними, в этом есть своя логика, и этого часто добиваются, надо только знать, когда это выгодно, а когда – нет), то расклад очков будет такой: у X $4 \times 17 + 16 + 2 = 86$ очков, у Y $17 + 16 \times 4 + 2 \times 2 = 85$ очков, а у Z $2 \times 17 + 2 \times 16 + 4 \times 2 = 74$ очка. Снова выигрывает X , а Z проигрывает с большим отрывом. Здесь коллективным предпочтением будет $X > Y > Z$, что диаметрально противоположно первому случаю.

На основе подобных нарушений транзитивности в голосовании строится известный «Парадокс Эрроу» в теории группового выбора. Лауреат

Нобелевской премии Кеннет Джозеф Эрроу построил систему аксиом, интуитивно справедливых для любых

процедур группового выбора, которая неожиданно оказывается противоречивой [3].

Литература

1. *Титов В.К.* «Олимпиады по программированию в МАТИ. Задачи прошлых лет», журнал «Потенциал», № 7, 2007, с. 68 – 76.
2. *Ильков Л.В.* «Парадоксы командных соревнований», журнал «КВАНТ», № 1, 2009, с. 44.
3. *Kenneth J. Arrow*, Social Choice and Individual Values, Yale University Press, 1963.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Незаменимость общения

У двух живущих в соседних комнатах общежития друзей-студентов был один будильник, и его владелец будил соседа, когда тому было нужно. Но однажды они поссорились и перестали разговаривать, обмениваясь в случае острой необходимости записками. И как-то утром разбуженный звонком будильника, как обычно, в 7 часов утра студент видит записку: «Разбуди меня в 6 часов».

Необходима другая планета

Пациенту, весившему более 100 кг, врач сказал, что со здоровьем у него скоро возникнет из-за этого большая проблема. Но тот уверенно возразил: «Недавно я узнал, – сообщил он, – что на Марсе я весил бы 40 кг. Значит проблема в том, что я живу не на той планете, которая нужна».

Проявление самокритичности

Художник проснулся с мыслью, что Достоевский прав: красота спасёт мир. Но посмотрев на картину, которую накануне закончил, засомневался в этом.

Уважительная причина

Старт ракеты не состоялся. Из центра управления запрос:

- Что случилось? Почему ракета не взлетела?
- Всё в полном порядке. Мы считали: 10, 9, 8, 7,...но потом сбились со счёта

Теорема

Какую бы глупость вы ни придумали, найдётся человек, который эту глупость сделает. (Доказательство не требуется.)

Напутствие учащемуся

Не жалуйся на обширность учебного материала и на быструю его забываемость. Учтите: образованность – это то, что остаётся после того, как вы забудете всё, чему вас учили.