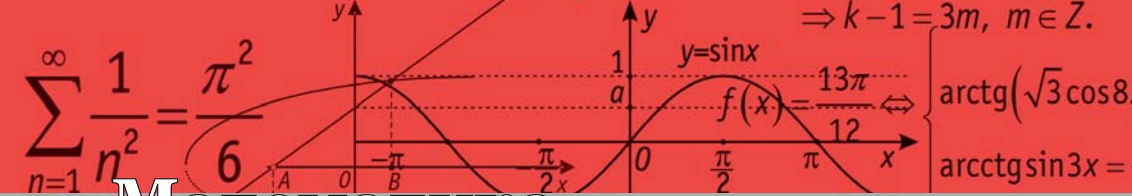


**Прокофьев Александр Александрович**
*Доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда.*

**Корянов Анатолий Георгиевич**
*Методист по математике городского информационно-методического Центра (БГИМЦ), учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска.*

# Внеписанные окружности прямоугольного треугольника

На уроках геометрии учащиеся знакомятся с описанными и вписанными окружностями треугольника. О вневписанных окружностях знает их незначительная часть, причём лишь на уровне определения. В данной статье мы рассмотрим использование свойств вневписанных окружностей применительно к прямоугольному треугольнику, а также получим ряд интересных формул, справедливых в последнем случае. Полученные знания будут полезны участникам математических олимпиад, а также школьникам, сдающим ГИА и ЕГЭ.

**Определение.** *Вневписанной окружностью* треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $ABC$ с прямым углом $C$ (рис. 1). Для него существуют три вневписанные окружности с центрами в точках $O_a$, $O_b$ и $O_c$ и радиусами $r_a$, $r_b$ и $r_c$ соответственно.

Отметим, что положение точек $O_a$, $O_b$ и $O_c$ для каждого треугольника определяется однозначно. Так, например, точка $O_a$ – точка пересечения биссектрис углов, внешних к

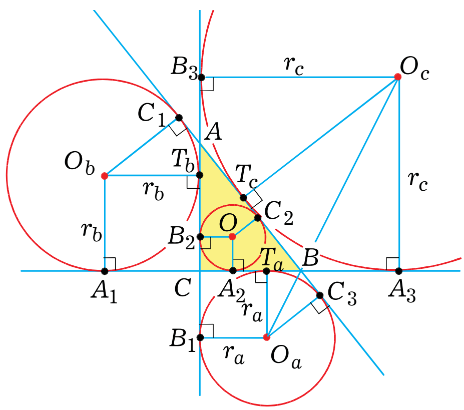
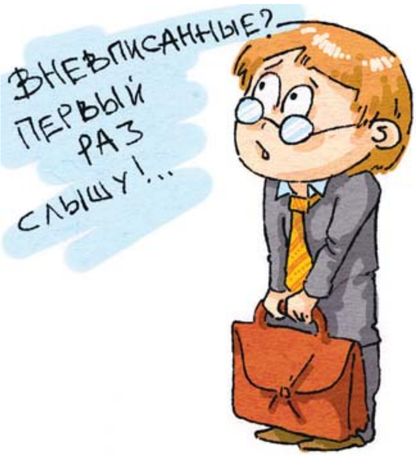



*Рис. 1*

углам $B$ и $C$. Она равноудалена на расстояние $r_a$ от всех трёх прямых

$AB$, $BC$ и $AC$, и через неё также проходит биссектриса внутреннего угла $A$ треугольника $ABC$. Аналогично получаются две другие вневписанные окружности с центрами $O_b$ и $O_c$.




Напомним, что в прямоугольном треугольнике $ABC$ катеты $a$ и $b$ связаны с гипотенузой $c$ теоремой Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр, $S = \dfrac{1}{2}ab$ – площадь, $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ – радиус вписанной окружности, $R = \dfrac{c}{2}$ – радиус описанной окружности.

Кроме этого заметим, что для прямоугольного треугольника справедливо равенство

$$(p-a)(p-b) = \frac{c+(b-a)}{2} \cdot \frac{c-(b-a)}{2} =$$
$$= \frac{c^2-(b-a)^2}{4} = \frac{ab}{2} = S.$$

Рассмотрим свойства вневписанных окружностей прямоугольного треугольника, которые нам понадобятся при решении задач. Отметим, что первые три свойства и их следствия справедливы для произвольного треугольника.

**Свойство 1.** *Длина отрезка касательной, проведённой к вневписанной окружности из противоположной вершины, равна полупериметру треугольника.*

**Доказательство.** Обозначим через $B_1$, $C_3$ и $T_a$ точки касания вневписанной окружности с центром $O_a$ с прямыми $AC$, $AB$ и $BC$ соответственно (см. рис. 1). Тогда имеем

$$CB_1 = CT_a, \ BC_3 = BT_a,$$

и периметр треугольника $ABC$ равен

$$P = AC + CT_a + BT_a + AB =$$
$$= AC + CB_1 + BC_3 + AB = AB_1 + AC_3.$$

Так как $AB_1 = AC_3$, то полупериметр треугольника $ABC$ равен $p = AB_1$.

**Следствие.** Расстояния между точками касаний вневписанных окружностей продолжений сторон за вершины треугольника равны (рис. 1):

$$C_1C_3 = a + b, \ B_1B_3 = a + c,$$
$$A_1A_3 = b + c.$$

**Свойство 2.** *Пусть вписанная окружность треугольника $ABC$* (см. рис. 1) *касается сторон $BC$, $AC$ и $AB$ в точках $A_2$, $B_2$ и $C_2$ соответственно, а вневписанная окружность с центром $O_a$ – стороны $BC$ в точке $T_a$, тогда*

$$CA_2 = BT_a = \frac{a+b-c}{2} = p - c,$$
$$CT_a = BA_2 = \frac{a+c-b}{2} = p - b,$$

*где $a$, $b$, $c$ – длины сторон соответственно $BC$, $AC$ и $AB$ треугольника $ABC$.*

**Доказательство.** Имеем для отрезка касательной к вписанной окружности:

$$CA_2 = \frac{a+b-c}{2}.$$

С другой стороны, если $B_1$, $C_3$ – точки касания данной вневписанной окружности с продолжением сторон $AC$ и $AB$ соответственно, то по свойству 1

$$AB_1 = AC_3 = \frac{a+b+c}{2}.$$

Отсюда

$$BT_a = BC_3 = AC_3 - AB = \frac{a+b-c}{2},$$

то есть

$$CA_2 = BT_a = \frac{a+b-c}{2} = p - c.$$

Аналогично доказывается, что

$$CT_a = BA_2 = p - b.$$

**Следствие.** Точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны.

Рассмотрим формулы, связывающие радиусы вписанной и вневписанных окружностей и основные характеристики треугольника (стороны, периметр, площадь).

**Свойство 3.** *Радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC, вычисляется по формуле* $r_a = \dfrac{S}{p-a}$, *где S, p, a – соответственно площадь, полупериметр и длина стороны BC треугольника ABC.*

**Доказательство.** Выполняются следующие равенства (см. рис. 1):

$$S_{ABC} = S_{O_aCA} + S_{O_aBA} - S_{O_aCB} =$$
$$= \frac{1}{2}r_a b + \frac{1}{2}r_a c - \frac{1}{2}r_a a = r_a(p-a).$$

Отсюда получаем:

$$r_a = \frac{S}{p-a}.$$

Аналогично получаются формулы:

$$r_b = \frac{S}{p-b} \text{ и } r_c = \frac{S}{p-c}.$$

**Следствия.**

**1.** Большей стороне треугольника соответствует касающаяся её вневписанная окружность большего радиуса и наоборот.

**2.** Радиус вневписанной окружности треугольника больше радиуса окружности, вписанной в тот же треугольник.

**3.** Для отношений радиусов вписанной и вневписанных окружностей имеют место равенства:

$$\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}, \quad \frac{r_a}{r_b} = \frac{p-b}{p-a}, \quad \frac{r_a}{r_c} = \frac{p-c}{p-a}.$$

**Свойство 4.** *Радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы прямоугольного треугольника, равен полупериметру этого треугольника, то есть* $r_c = p$.

**Доказательство.** Пусть $A_3$ и $B_3$ – точки касания вневписанной окружности с продолжениями катетов $CB$ и $CA$ соответственно (см. рис. 1).

Радиусы, проведённые в точку касания, перпендикулярны прямым $CB$ и $CA$. Из свойства 1 отрезки $CA_3 = CB_3 = p$. Так как четырёхугольник $CB_3O_cA_3$ – квадрат, то

$$r_c = O_cA_3 = CA_3 = p.$$

**Следствие.** Так как для прямоугольного треугольника имеют место формулы

$$p = 2R + r = c + r,$$

то получаем ещё равенства:

$$r_c = 2R + r = c + r.$$

**Свойство 5**. *Гипотенуза прямоугольного треугольника равна сумме радиусов вневписанных окружностей, касающихся катетов, то есть* $c = r_a + r_b$.

**Доказательство.** Так как четырёхугольники $CT_aO_aB_1$ и $CA_1O_bT_b$ – квадраты (см. рис. 1), то $CT_a = r_a$, $CT_b = r_b$. По свойству 2 имеем:

$$r_a + r_b = CT_a + CT_b =$$
$$= A_2B + B_2A = BC_2 + C_2A = c.$$

**Следствие.** Так как $r_c = c + r$, то получаем $r_c = r + r_a + r_b$.

**Свойство 6.** *Катет прямоугольного треугольника равен сумме радиусов окружностей вписанной и вневписанной, касающейся этого катета, то есть*

$$a = r_a + r \text{ и } b = r_b + r.$$

**Доказательство.**

*1-й способ.* Пусть $O$ – центр вписанной окружности прямоугольного треугольника $ABC$ (см. рис. 1), $A_2$ – точка касания этой окружности с катетом $BC$, $r$ – радиус этой окружности. Соответственно вневписанная окружность с центром в точке $O_a$ и радиусом $r_a$ касается катета $BC$ в точке $T_a$ и, кроме того, касается продолжений катета $AC$ и гипотенузы $AB$. Из доказанного выше свойства 2 для произвольного треугольника

$$BT_a = CA_2 = \frac{a + b - c}{2} = r.$$

Следовательно,

$$BC = CT_a + BT_a = r_a + r.$$

Аналогично доказывается, что

$$CA = r_b + r.$$

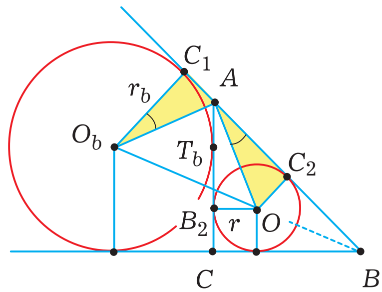



*Рис. 2*

*2-й способ.* Так как $AO$ – биссектриса угла $A$ треугольника $ABC$, а $AO_b$ – биссектриса его внешнего угла (см. рис. 2), то $\angle OAO_b = 90°$. Тогда $\angle AO_bC_1 = \angle OAC_2 = \frac{\angle A}{2}$, как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Поскольку центры рассматриваемых окружностей лежат на биссектрисе угла $B$ треугольника $ABC$, то в прямоугольном треугольнике $BO_bC_1$ имеем $\angle BO_bC_1 = 90° - \frac{\angle B}{2}$. Тогда в прямоугольном треугольнике $O_bAO$ получаем:

$$\angle OO_bA = \angle BO_bC_1 - \angle AO_bC_1 =$$
$$= 90° - \frac{\angle A + \angle B}{2} = 45°.$$

Следовательно, прямоугольный треугольник $O_bAO$ – равнобедрен-

ный и $O_bA = AO$. Тогда треугольники $AO_bC_1$ и $OAC_2$ равны по гипотенузе и острому углу. Поэтому $AC_2 = O_bC_1 = r_b$. Значит,
$AC = CB_2 + B_2A = CB_2 + AC_2 = r + r_b$.

**Следствие.** Расстояния от вершины острого угла прямоугольного треугольника до центра вписанной и вневписанной окружности, касающейся катета, содержащего эту вершину, равны, то есть $AO = AO_b$ и $BO = BO_a$ (см. рис. 1).

**Свойство 7.** *Катеты прямоугольного треугольника $ABC$ с прямым углом в вершине $C$ могут быть найдены через радиусы $r_a, r_b, r_c$ вневписанных окружностей по формулам:*

*а)* $a = r_c - r_b$ и $b = r_c - r_a$;

б) $a = \dfrac{2r_a r_c}{r_a + r_c}$ и $b = \dfrac{2r_b r_c}{r_b + r_c}$.

**Доказательство.**

*а)* По свойству 2 имеем $r_b = CT_b = p - a$ (см. рис. 1). Так как по свойству 4 $r_c = p$, то получаем $a = r_c - r_b$. Вторая формула доказывается аналогично.

б) Так как центры $O_a$ и $O_c$ вневписанных окружностей лежат на биссектрисе внешнего угла $B$ треугольника $ABC$ (см. рис. 1), то прямоугольные треугольники $O_aT_aB$ и $O_cA_3B$ подобны по двум углам. Тогда из равенства отношения сторон, лежащих против равных углов, $\dfrac{O_aT_a}{O_cA_3} = \dfrac{T_aB}{BA_3}$, получаем $\dfrac{r_a}{r_c} = \dfrac{a - r_a}{r_c - a}$.
Отсюда $a = \dfrac{2r_a r_c}{r_a + r_c}$. Вторая формула доказывается аналогично.

**Свойство 8.** *Площадь прямоугольного треугольника $ABC$ с прямым углом в вершине $C$ может быть найдена через радиус $r$ вписанной и радиусы $r_a, r_b, r_c$ вневписанных окружностей по одной из формул*:

а) $S = rr_c$,

б) $S = r_a r_b$,

в) $S = r_a r_c \dfrac{r_c - r_a}{r_c + r_a}$, $S = r_b r_c \dfrac{r_c - r_b}{r_c + r_b}$.

**Доказательство.**

а) Так как $r_c = p$, где $p$ – полупериметр треугольника, то из формулы площади треугольника $S = pr$ получаем $S = rr_c$.

б) Используя формулы
$$r_a = \frac{S}{p-a},\quad r_b = \frac{S}{p-b}$$
и $(p-a)(p-b) = S$,
получаем:
$$r_a r_b = \frac{S^2}{(p-a)(p-b)} = S.$$

в) Подставим в формулу $S = \dfrac{1}{2}ab$ выражения $a = \dfrac{2r_a r_c}{r_a + r_c}$ и $b = r_c - r_a$ (свойства 7 *б* и 7 *а*), получим:
$$S = r_a r_c \frac{r_c - r_a}{r_c + r_a}.$$
Аналогично получается формула
$$S = r_b r_c \frac{r_c - r_b}{r_c + r_b}.$$

**Следствие.** Радиусы $r_a, r_b, r_c$ вневписанных окружностей прямоугольного треугольника $ABC$ с прямым углом в вершине $C$ связаны формулой:
$$r_a = r_c \frac{r_c - r_b}{r_c + r_b} \text{ или } r_b = r_c \frac{r_c - r_a}{r_c + r_a}.$$

**Свойство 9.** *Расстояния между центрами вневписанных окружностей треугольника $ABC$ с прямым углом $C$ выражаются через радиусы этих окружностей формулами:*

а) $O_aO_c^2 = 2(r_a^2 + r_c^2)$;

б) $O_bO_c^2 = 2(r_b^2 + r_c^2)$;

в) $O_aO_b^2 = 2(r_a + r_b)^2$.

**Доказательство.** Докажем первое равенство, остальные предоставим доказать читателю.

Пусть $E$ – проекция точки $O_a$ на прямую $B_3O_c$ (см. рис. 3), тогда $O_aE = r_c + r_a$, $O_cE = r_c - r_a$. Из прямоугольного треугольника $O_aEO_c$ получаем:

$$O_aO_c^2 = (r_c + r_a)^2 + (r_c - r_a)^2 = 2(r_a^2 + r_c^2).$$

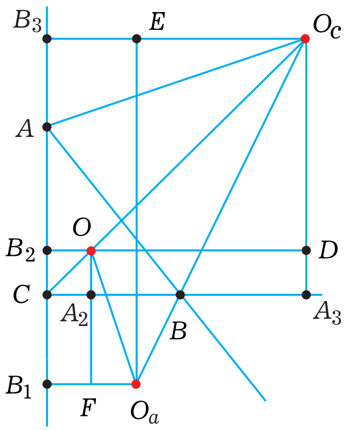



*Рис. 3*

**Свойство 10.** *Гипотенуза видна из центра касающейся её вневписанной окружности под углом* $45°$.

**Доказательство.** Так как $AO_c$ и $BO_c$ – биссектрисы внешних углов $A$ и $B$ треугольника $ABC$ (см. рис. 3), то в треугольнике $AO_cB$ получаем

$$\angle AO_cB = 180° - (\angle O_cAB + \angle ABO_c) =$$
$$= 180° - \frac{2 \cdot 180° - \angle C}{2} = 45°.$$

Продемонстрируем применение полученных результатов при решении задач.

**Пример 1.** Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найти расстояние между центром описанной окружности и центром вневписанной окружности данного треугольника.

**Решение.** Пусть в треугольнике $ABC$ длины катетов $CB = 6$, $CA = 8$ (см. рис. 4). Тогда гипотенуза $AB$ равна 10.

Найдём радиусы вневписанных окружностей, используя свойство 3. Полупериметр $p$ и площадь $S$ треугольника $ABC$ равны 12 и 24 соответственно. Тогда

$$r_a = \frac{S}{p - BC} = \frac{24}{12 - 6} = 4,$$

$$r_b = \frac{24}{12 - 8} = 6, \quad r_c = \frac{24}{12 - 10} = 12.$$

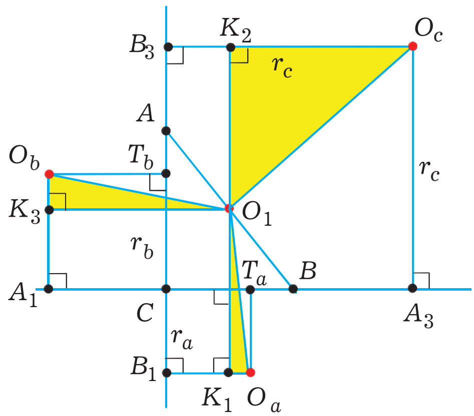



*Рис. 4*

Центр $O_1$ описанной около треугольника $ABC$ окружности совпадает с серединой гипотенузы. Искомые расстояния $O_1O_a$, $O_1O_b$ и $O_1O_c$ найдём из прямоугольных треугольников $K_1O_1O_a$, $K_3O_bO_1$ и $K_2O_cO_1$, учитывая, что $A_1K_3 = \frac{CA}{2} = 4$ и $B_1K_1 = B_3K_2 = \frac{CB}{2} = 3$. Тогда

$$O_1O_a = \sqrt{(r_a + A_1K_3)^2 + (r_a - B_1K_1)^2} = \sqrt{65},$$

$$O_1O_b = \sqrt{(r_b + B_1K_1)^2 + (r_b - A_1K_3)^2} = \sqrt{85},$$

$$O_1O_c = \sqrt{(r_c - A_1K_3)^2 + (r_c - B_1K_1)^2} = \sqrt{145}.$$

**Ответ:** $\sqrt{65}$, $\sqrt{85}$, $\sqrt{145}$.

**Пример 2.** (Диагностическая работа МИОО 18.12.2012) Радиусы двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 5 и 20. Найти площадь треугольника.

**Решение.**

*1-й случай.* Даны радиусы $r_a$ и $r_b$. Пусть $r_a = 20$ и $r_b = 5$. Тогда, используя свойство 8 *б*, получаем:

$$S = r_a r_b = 100.$$

*2-й случай.* Даны радиусы $r_c$ и $r_a$ или $r_c$ и $r_b$. Так как $20 > 5$, то по следствию 1 свойства 3 $r_c = 20$, и пусть $r_a = 5$ (в случае $r_b = 5$ решение аналогично). Тогда, используя свойство 8 *в*, получаем:

$$S = r_a r_c \frac{r_c - r_a}{r_c + r_a} = 5 \cdot 20 \cdot \frac{20-5}{20+5} = 60.$$

**Ответ:** 60 или 100.

**Пример 3.** В прямоугольный треугольник $ABC$ с углом $A$, равным $60°$, вписана окружность радиуса $\sqrt{3} - 1$. Вторая окружность, лежащая вне треугольника, касается стороны $BC$ и продолжений двух других сторон. Найти расстояние между центрами этих окружностей.

**Решение.** Пусть $O$ и $O_a$ – центры вписанной и вневписанной окружностей соответственно (см. рис. 5), и для определённости угол $C$ прямой и $B_1$, $B_2$ – точки касания окружностей с прямой $AC$. Тогда в равнобедренном прямоугольном треугольнике $CB_2O$ сторона $OC = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$. В прямоугольном треугольнике $B_1AO_a$ угол $B_1O_aA$ равен $60°$, а для прямоугольного треугольника $B_1CO_a$ углы $B_1O_aC$ и $B_1CO_a$ равны по $45°$. Значит, $\angle OO_aC = 60° - 45° = 15°$. Так как $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, то

$$OO_a = \frac{OC}{\sin 15°} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cdot 4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 4.$$

**Ответ:** 4.

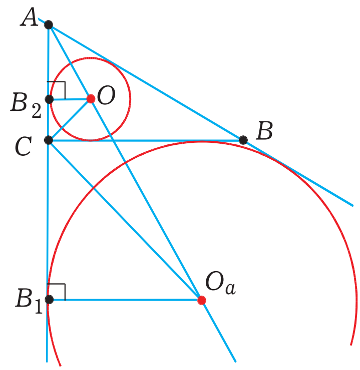



*Рис. 5*

**Пример 4.** (ЕГЭ, 2011) Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного трёугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника, равен 4, а отношение катетов треугольника равно $4 : 3$.

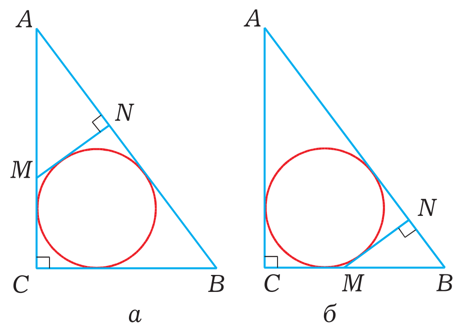



*Рис. 6*

**Решение.** Пусть треугольник $ABC$ (см. рис. 6) такой, что $AC : BC = 4 : 3$. Рассмотрим два случая расположения отрезка $MN$ прямой, перпендикулярной гипотенузе и касающейся вписанной окружности. По условию задачи длина отрезка $MN = 4$.

*1-й случай* (см. рис. 6 *а*). Прямоугольные треугольники $AMN$ и $ABC$ подобны, поскольку имеют общий острый угол. Тогда

$$\frac{AN}{MN} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3} \text{ и } AN = \frac{16}{3},$$

соответственно

$$AM = \sqrt{4^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2} = \frac{20}{3}$$

и полупериметр $p_{MAN} = 8$.

Для треугольника $MAN$ окружность, вписанная в треугольник $ABC$, является вневписанной. Тогда по формуле

$$r = \frac{S_{MAN}}{p_{MAN} - MN}$$

получаем:

$$r = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{16}{3}}{8 - 4} = \frac{8}{3}.$$

*2-й случай* (см. рис. 6 *б*). Из подобия прямоугольных треугольников $MNB$ и $ABC$ получаем:

$$\frac{NB}{MN} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}.$$

Отсюда $NB = 3$. Тогда

$$MB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Для треугольника $MNB$ окружность, вписанная в треугольник $ABC$, является вневписанной. Полупериметр и площадь треугольника $MNB$ равны 6. Тогда получаем:

$$r = \frac{S_{MNB}}{p_{MNB} - MN} = \frac{6}{6 - 4} = 3.$$

**Ответ:** $\frac{8}{3}$ или 3.

В заключение отметим, что нет необходимости запоминать формулы, полученные в свойствах 1–10. Достаточно понять сам принцип их вывода.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Найдите радиусы вписанной и вневписанных окружностей треугольника со сторонами 5, 12 и 13.

**2**. В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен $90°$. Найдите расстояние между точками касания со стороной $AB$ вписанной и вневписанной окружностей, если известно, что радиусы вневписанных окружностей $r_a = 3$ и $r_b = 1$.

**3.** Дан квадрат $ABCD$ со стороной $a$. На сторонах $BC$ и $CD$ даны точки $M$ и $N$ такие, что периметр треугольника $CMN$ равен $2a$. Найдите угол $MAN$.

**4.** (Диагностическая работа МИОО 18. 12. 2012) Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 23. Найдите расстояние между их центрами.

**5**. Докажите, что если в треугольнике $ABC$ угол $C$ прямой, то расстояния между центрами вписанной и вневписанной окружностей, а также центрами вневписанных окружностей выражаются через радиусы окружностей формулами:

а) $OO_a^2 = 2(r_a^2 + r^2)$;

б) $OO_b^2 = 2(r_b^2 + r^2)$;

в) $OO_c^2 = 2(r_c - r)^2$.

**6.** К окружности радиуса $r$ из точки $A$, не лежащей на окружности, проведены касательная $AC$ и секущая $AB$, проходящая через центр окружности, причём $AB = 2AC$. Найдите радиус окружности, которая касается секущей, касательной вне отрезка $AC$, и радиуса данной окружности, проведённого в точку $C$.

**7.** Докажите, что площадь прямоугольного треугольника $ABC$ с прямым углом в вершине $C$ может быть найдена через радиус $r$ вписанной и радиусы $r_a, r_b, r_c$ вневписанных окружностей по одной из формул:

а) $S = r(r + r_a + r_b) = r(r + c)$;

б) $S = r_c(r_c - c)$;

в) $S = \dfrac{1}{2}(r_c - r_a)(r_c - r_b)$.

**8.** (ЕГЭ, 2011) Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 12, а косинус острого угла равен $0,6$.

**9.** (ЕГЭ, 2011) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10. Прямая, перпендикулярная гипотенузе, отсекает от треугольника четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите площадь этого четырёхугольника, если известно, что радиус окружности равен 2.

**10.** Острый угол прямоугольного треугольника равен $\alpha$, а радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений двух катетов, равен $R$. Найдите гипотенузу этого треугольника.

**11.** Радиус вписанной в треугольник $ABC$ окружности равен $\sqrt{3}-1$. Угол $BAC$ равен $60°$, а радиус окружности, касающейся стороны $BC$ и продолжений сторон $AB$ и $AC$, равен $\sqrt{3}+1$. Найдите углы $ABC$ и $ACB$ данного треугольника.


**12.** Вневписанные окружности с центрами $O_a$ и $O_b$ касаются катетов $BC$ и $AC$ прямоугольного треугольника $ABC$ в точках $T_a$ и $T_b$ соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $AT_bT_aB$, если $S_{ABC} = 30$ (см. рис. 1).

## Ответы

**1.** 2; 3; 10; 15.

**2.** 2.

**3.** $45°$. *Указание.* $B$ и $D$ – точки касания вневписанной окружности, а её центр находится в вершине $A$ квадрата $ABCD$.

**4.** 34 или $30\sqrt{2}$.

**6.** $\dfrac{2r}{3}$.

**8.** 8 или 9.

**9.** 18 или $\dfrac{64}{3}$.

**10.** $\dfrac{2R}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$ или $\dfrac{R(\sin\alpha+\cos\alpha-1)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$.

**11.** $\angle ABC = 30°$, $\angle ACB = 90°$.

**12.** 15.