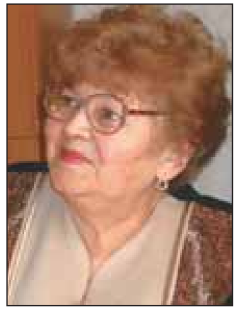
Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист Федеральной заочной физико-технической школы (ФЗФТШ) при МФТИ. Окончила Московский государственный университет (МГУ), имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор пособий «Интенсивный курс подготовки ЕГЭ», «Решение сложных задач ЕГЭ».



Выпускнику 2008-2009 гг.

(продолжение)

В данной статье мы решим ещё одну задачу ЕГЭ – 2008-2009. Она представляет самостоятельный интерес. С одной стороны, речь идёт о последовательностях, которые изучаются в 9-ом классе, а с другой – таких последовательностей в школе обычно не рассматривают – последовательность задана рекуррентно, но *формула* общего члена для произвольной последовательности, так заданной, не существует; функции, задающие рекуррентное соотношение, определяются на разных промежутках различными формулами, что тоже необычно.

При решении задачи большую роль будет играть множество значений заданных функций — тема, на которой в школе обычно не акцентируют внимание.

Задачу будем решать методом «итераций». Сначала будем работать как бы с помощью «обратных итераций», переходя от n-го элемента к $(n-1)$-му, во втором способе — с помощью обычных «итераций», переходя от $(n-1)$-го элемента к n-му. Приведённые рисунки помогут «увидеть» ход решения.

3. Последовательность, заданная разными формулами на промежутках

Пример 4. Для чисел a_1, $a_2, \dots, a_{37}$ верны равенства $a_{n+1} = F(a_n)$, $n=1, 2, \dots, 36$. Найдите $a_9 - a_{10}$, если $a_{37}=0$, а

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x<8; \\ g(x), & x\geq 8, \end{cases}$$

где $f(x)=8+\dfrac{24}{x-8}$, $x<8$, а

$$g(x)=10-\frac{111}{x}+\log_3\left(3-\frac{20}{x-1}\right),\ x\geq 8.$$

Ответ. – 5.

Прочитав условие, многие школьники просто растерялись: у них всегда рекуррентное соотношение задавалось конкретно, а здесь задана последовательность и функция, причём на разных промежутках различными формулами. Как они могут быть вообще связаны между собой? Они совершенно забыли, что такое функция. Напомним, что если функция задана формулой, то это значит, что задано правило, по которому каждому значению аргумента из области определения ставится в соответствие число. В нашем случае одно и то же правило связывает a_{n+1} и a_n, $F(x)$ и x. Школьники, конечно, работали с функциями, заданными разными формулами на промежутках, но чтобы так была задана последовательность, думаю, что видели впервые (и многие учителя тоже!).

Рекуррентно заданные последовательности.

Прежде чем решать задачу, вспомним понятие рекуррентно заданной последовательности.

Говорят, что последовательность задана рекуррентно (от латинского *recurrens* «возвращающийся»), если, во-первых, даны несколько первых членов последовательности, а во-вторых, задана формула, выражающая последующие члены через предыдущие.

Многие последовательности задаются соотношением $x_{n+1}=f(x_n)$, $x_1=a$, $n=1, 2,...$ Формула $x_{n+1}=f(x_n)$ даёт возможность переходить последовательно от одного элемента к следующему. Этот переход называется *итерацией.*

Если необходимо вычислить n последовательных членов, надо провести $(n-1)$ раз итерацию. В качестве примеров можно привести самые известные последовательности – арифметические и геометрические прогрессии, которые как раз определяются рекуррентно. Например,

арифметическая прогрессия определяется соотношением

$$x_{n+1}=f(x_n),$$

где $f(x)=x+d$, и поэтому $x_{n+1}=x_n+d$. В частности:

$$x_2=f(x_1)=x_1+d,$$

$$x_3=f(x_2)=f(f(x_1))=$$

$$=(x_1+d)+d=x_1+2d,$$

$$x_4=f(x_3)=(x_1+2d)+d=$$

$$=x_1+3d,$$

$$...$$

$$x_{n+1}=x_1+nd,$$

т. е. для неё оказалось возможным записать формулу n-го члена, или n-ой итерации. Но это сделать не всегда удаётся.

Первый способ решения примера 4 (решаем с помощью «обратных итераций», переходя от n-го элемента к $(n-1)$-му).

Нам дано, что $a_{37}=0$, но $a_{37}=F(a_{36})$ – это значит, что

$$F(a_{36})=0.$$

Надо найти a_{36}. Как это сделать? В какую формулу подставлять? Это надо выяснять.

1. Подставим сначала в более простую формулу:

$$8+\frac{24}{a_{36}-8}=0 \Leftrightarrow \frac{8(a_{36}-5)}{a_{36}-8}=0 \Leftrightarrow a_{36}=5.$$

Годится: $a_{36}<8$, $a_{36}\in$ ОДЗ. Теперь найдём $a_{36}=F(a_{35})$. Куда подставлять? Пробуем туда же:

$$\frac{8(a_{35}-5)}{a_{35}-8}=5 \Leftrightarrow a_{35}=0.$$

Годится. (Если бы, например, было бы $a_{37}=9$, то подстановка в первую формулу даёт:

$$8+\frac{24}{a_{36}-8}=9 \Leftrightarrow a_{36}=32.$$

Не годится, т. к. формула определена лишь для $x<8$!) Ясно теперь, что найденная последовательность устроена так, что все члены с чётными номерами равны 5, а все члены с нечётными номерами равны 0, кроме, быть может, первого. Поэтому a_9- $-a_{10}=0-5=-5$.

Ответ. –5.

Замечание. Можно разрешить уравнение $a_{n+1}=f(a_n)$ относительно a_n:

$$8+\frac{24}{a_n-8}=a_{n+1} \Leftrightarrow 8a_n-40=$$

$$=a_{n+1}a_n-8a_{n+1} \Leftrightarrow a_n=\frac{8(a_{n+1}-5)}{a_{n+1}-8}.$$

Отсюда сразу видно, что если $a_{n+1}=0$, то $a_n=5$, а если $a_{n+1}=5$, то $a_n=0$.

Задача решена? А вдруг есть ещё решение? Никто не сказал, что такая последовательность единственная.

2. Будем искать a_{36} по второй формуле:

$$a_{37}=0 \Leftrightarrow 10-\frac{111}{a_{36}}+\log_3\left(3-\frac{20}{a_{36}-1}\right)=0.$$

Уравнение не решается. Что бы это значило? Скорее всего то, что здесь решений нет. Только теперь надо это показать.

Заметим, что при $x\geq 8$ функция $g(x)=10-\frac{111}{x}+\log_3\left(3-\frac{20}{x-1}\right)$ — левая часть уравнения — является непрерывной, монотонно возрастающей (как сумма двух монотонно возрастающих), при этом она возрастает от $g(8)=-\frac{31}{8}-\log_3 7<-4$ и стремится к 11 при $x\to+\infty$, т. е. принимает все значения из промежутка

$$\left[-\frac{31}{8}-\log_3 7;\ 11\right).$$

Отсюда следует, что уравнение $g(x)=0$ имеет на этом промежутке единственный корень, т. е. a_{36} существует. Найти его можно только приближённо, например, графически. Но раз мы его не можем найти, то тем более, наверное, не сможем найти a_{35}. Что делать? Прикинем, где корень (начнём со значения, при котором исчезает логарифм): $g(11)=$ $=-\frac{1}{11}<0$ — функция все ещё отрицательна, значит, $a_{36}>11$. Вычисляем $g(12)=\frac{9}{12}+\log_3\frac{13}{11}>0$ — функция сменила знак, значит, $a_{36}<12$. Итак,

$$11<a_{36}<12.$$

Теперь по найденному a_{36} будем искать a_{35}. Подставим сначала опять во вторую формулу:

$$a_{36}=10-\frac{111}{a_{35}}+\log_3\left(3-\frac{20}{a_{35}-1}\right).$$

Но это уравнение не имеет решений, т. к. $g(x)$ не принимает значений, больших 11. Тогда подставим в первую формулу: $8+\frac{24}{a_{35}-8}=a_{36}$. Но оно тоже не имеет решений, т. к. его левая часть не принимает на области определения значений больших, чем 8

$$\left(8+\frac{24}{x-8}<8 \text{ при } x<8\right).$$

3. Подставим полученное из первой формулы a_{36} во вторую формулу:

$$a_{36}=5=F(a_{35})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10-\frac{111}{a_{35}}+\log_3\left(3-\frac{20}{a_{35}-1}\right)=5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5-\frac{111}{a_{35}}+\log_3\left(3-\frac{20}{a_{35}-1}\right)=0.$$

Но график функции $y(x)=5-\frac{111}{x}+$ $+\log_3\left(3-\frac{20}{x-1}\right)$ — это опущенный на 5 график функции $g(x)=10-$ $-\frac{111}{x}+\log_3\left(3-\frac{20}{x-1}\right)$, а потому корень уравнения $5-\frac{111}{a_{35}}+\log_3\left(3-\frac{20}{a_{35}-1}\right)=$ $=0$ тоже заведомо больше 11, поэтому дальнейшие действия с ним невозможны.

Ответ. -5.

Второй способ (решаем с помощью обычных «итераций», переходя от $(n-1)$-го элемента к n-му.

Заметим, что функция $f(x)$ монотонно убывает на $(-\infty;\ 8)$, а $g(x)$ монотонно возрастает на $[8;\ +\infty)$.

В отличие от первого способа, в котором мы отталкивались непосредственно от заданных условий, т. е. решали задачу «в лоб», в этом способе начнём с самого начала – с того, что задана последовательность. Посмотрим, что из этого последует.

1. По условию $a_{n+1}=F(a_n),\ n=$ $=1,\ 2,\ \ldots,\ 36$, значит, $a_2=F(a_1)$. Однако a_1 не задано, а потому не ясно, по какой из двух формул находить a_2:

1) если $a_1<8$, то $a_2=f(a_1)$;

2) если $a_1\geq 8$, то $a_2=g(a_1)$.

Ничего не прояснилось — a_1 играет роль параметра.

2. Чтобы «продвинуться» дальше, попробуем выяснить, как a_2 «связано» с числом 8.

1) Видно, что если $a_1<8$, то и $a_2=f(a_1)=8+\frac{24}{a_1-8}<8$, и для такого a_1 следующие a_k находятся по той же формуле: $a_3=f(a_2)=f(f(a_1))$ и т. д.

2) Если же $a_1\geq 8$, то ситуация сложнее:

$$a_2=g(a_1)=10-\frac{111}{a_1}+\log_3\left(3-\frac{20}{a_1-1}\right),$$

где $-\frac{31}{8}-\log_3 7\leq g(a_1)<11$. Опять *не ясно*, так как a_2 по этой формуле может быть и больше 8, и меньше 8. При таком a_1 член последовательности a_3 может быть описан как одной, так и другой формулами.

Таким образом, пока имеем следующее:

1) если $a_1<8$, то $a_2=f(a_1)$, $a_3=$ $=f(a_2),\ \ldots,\ a_{k+1}=f(a_k),\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ 36;$

2) если $a_1 \geq 8$, но $a_2 < 8$, то $a_2 = g(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, $a_4 = f(a_3), \ldots, a_{k+1} = f(a_k)$, $k = 2, 3, \ldots, 36$;

3) если $a_1 \geq 8$ и $a_2 \geq 8$, то $a_3 = g(a_2)$, и пока не известно, что будет дальше.

Посмотрим, что происходит с a_3 из пункта 3) — оценим $g(a_2)$. Функция $g(x)$ монотонно возрастает и не превосходит 11, значит, в нашем случае $8 \leq a_2 < 11$, а поэтому $g(8) \leq g(a_2) < g(11) \Leftrightarrow g(8) \leq g(a_2) < -\frac{1}{11} < 8.$

Это значит, что если $a_1 \geq 8$ и $a_2 \geq 8$, то $a_3 < 8$, и уже $a_4 = f(g(a_2)) < 8$. Отсюда следует, что и в этом случае

$$a_{k+1} = f(a_k),\ k = 3, 4, \ldots, 36.$$

Всё стало ясно: при *любом* значении a_1 значение a_3 *всегда* меньше 8! Это значит, что все последовательности, начиная с a_4, описываются *единой* формулой:

$$a_{n+1} = f(a_n),\ n = 3,\ 4, \ldots,\ 36.$$

Теперь решим задачу. Нам дано, что $a_{37} = 0$, но $a_{37} = f(a_{36}) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{a_{36} - 5}{a_{36} - 8} = 0 \Leftrightarrow a_{36} = 5;\ 8 + \frac{24}{a_{35} - 8} = 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a_{35} = 0$. Ясно, что найденная последовательность, по крайней мере до a_4 включительно, устроена так, что все члены с чётными номерами равны 5, а все члены с нечётными номерами равны 0. Это ясно и из того, что тогда

$$8 + \frac{24}{a_n - 8} = a_{n+1} \Leftrightarrow a_n = \frac{8(a_{n+1} - 5)}{a_{n+1} - 8}.$$

Отсюда сразу видно, что если $a_{n+1} = 0$, то $a_n = 5$, а если $a_{n+1} = 5$, то $a_n = 0$. Поэтому $a_9 - a_{10} = 0 - 5 = -5$.

Ответ. -5.

Третий способ (геометрическая интерпретация итераций).

Пусть последовательность задана формулой $a_{n+1} = f(a_n)$, где графиком $f(x)$ является ломаная ABC – рис. 1.

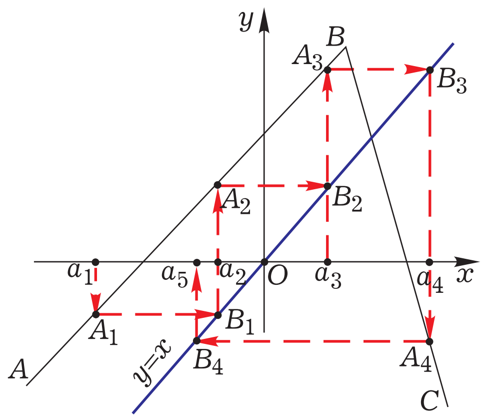


Рис. 1

Пусть первый элемент последовательности равен a_1, находим на графике $a_2 = f(a_1)$ – точка $A_1\ (a_1;\ f(a_1))$. Чтобы определить $a_3 = f(a_2)$, надо найти a_2 на числовой оси. Для этого проведём биссектрису $y = x$. Затем из точки A_1 проводим прямую, параллельную оси Ox, до пересечения с биссектрисой, получаем точку B_1 – в этой точке $x = y = f(a_1) = a_2$. Из неё проводим прямую, параллельную оси Oy, до пересечения с заданной кривой. Получаем две точки: на оси Ox точка a_2, на кривой – точка $A_2\ (a_2;\ f(a_2))$, в которой $f(a_2) = a_3$. Из точки A_2 опять проводим прямую, параллельную оси Ox, до пересечения с биссектрисой – получаем точку B_2: в этой точке $x = y = f(a_2) = a_3$. Из неё проводим опять прямую, параллельную оси Oy, до пересечения с осью Ox и заданной кривой (ломаной) – получаем a_3 и $f(a_3)$, и т. д. – рис. 1.

Для нашего примера 4 построим биссектрису $y=x$ и прикинем эскиз графика функции $F(x)$.

1) График $f(x)$ строится просто – это часть гиперболы

$$y=8+\frac{24}{x-8}=\frac{8(x-5)}{x-8}.$$

Так как у $f(x)$ асимптота $y=8$, то

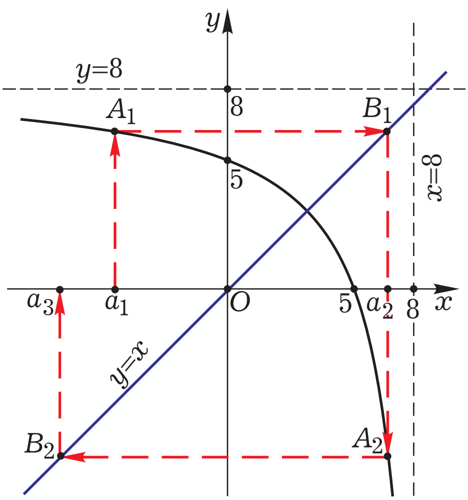


Рис. 2

учитывая, как строятся итерации, какое бы $a_k<8$ мы ни взяли, получим, что и $a_{k+1}<8$ – рис. 2.

2) С $g(x)$ ситуация иная. Функция $g(x)$ является непрерывной, монотонно возрастающей (как сумма двух монотонно возрастающих), при этом она возрастает от $y(8)$ и стремится к 11 при $x\to+\infty$, т. е. принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{31}{8}-\log_3 7;\,11\right)$. Это означает, что $g(a_1)$ может быть и меньше 8, и больше 8, и равно 8.

Точка $A(11;\,11)$ – точка пересечения биссектрисы и асимптоты $y=11$, точка $B(11;\,0)$ – проекция точки A на ось Ox (рис. 3). Найдём значение $g(x)$ в этой точке:

$$g(11)=10-\frac{111}{11}+$$
$$+\log_3\left(3-\frac{20}{11-1}\right)=-\frac{1}{11}<0.$$

Найдём ещё, для определённости, значение в соседней «целой» точке:

$$g(12)=10-\frac{111}{12}+$$
$$+\log_3\left(3-\frac{20}{12-1}\right)=\frac{3}{4}+\log_3\left(\frac{13}{11}\right)>0.$$

Это значит, что корень уравнения $g(x)=0$ принадлежит промежутку $(11;\,12)$.

Проследим теперь за ходом итераций. Видно, что если a_1 таково, что $g(a_1)=a_2<8$, то все остальные a_k тоже меньше 8 – рис. 3.

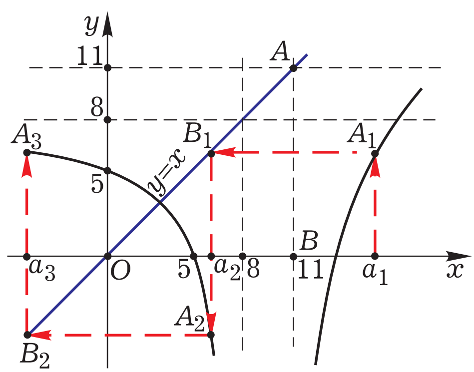


Рис. 3

Если же $g(a_1)\geq 8$, то в любом случае $g(a_1)=a_2<11$, а тогда, в силу монотонного возрастания функции $g(x)$, $a_3=g(a_2)<g(11)<0<8$, и уже $a_4=f(a_3)$ – рис. 4.

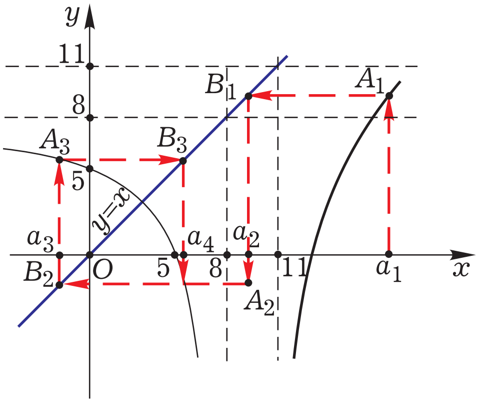


Рис. 4

Таким образом, при любом значении x_1 элементы любой последовательности, по крайней мере, начиная с четвёртого члена, описываются формулой

$$a_{n+1}=f(a_n),\ n=4,\ 5,\ \dots,\ 36.$$

Ну, а дальше все понятно. Решаем задачу: нам дано, что $a_{37}=0$, но

$$a_{37}=f_1(a_{36})=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(a_{36}-5)}{a_{36}-8}=0 \Leftrightarrow a_{36}=5,$$

$$a_{36}=5 \Leftrightarrow f(a_{35})=5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8+\frac{24}{a_{35}-8}=5 \Leftrightarrow a_{35}=0.$$

Ясно, что найденная последовательность, по крайней мере до a_4 включительно, устроена так, что все члены с чётными номерами равны 5, а все члены с нечётными номерами равны 0.

Поэтому $a_9-a_{10}=0-5=-5$.

Ответ. – 5.

Каким методом решать, выбирать учащимся.

В природе нет колеса. Почему?

Если кратко, то потому, что оно ей не нужно. Да, не нужно. Ведь разнообразные двигательные механизмы (шарниры, соединительные системы и пр.) созданы природой для передвижения живых существ и состоят из органических тканей. А они, чтобы не отмереть, должны снабжаться питательными веществами. Осуществить же питание тканей и передачу сигналов нервной системы можно только при ограниченных («от» и «до») перемещениях частей живого механизма, а колесо поворачивается вокруг оси на любой угол, причём совершенно автономно и независимо от движения самой оси. Так что оно не может обеспечить не нарушаемую вращением органическую связь своих тканей с источниками живительных веществ. Значит, такая «деталь», как колесо, не могла появиться в организме.