Пукас Юрий Остапович
Учитель математики МАОУ
«Гимназия города Троицка», г. Москва.

Выполнение обещаний

В статье разбираются все типы заданий С6, встретившиеся летом 2011 года в вариантах ЕГЭ по математике, а также похожие на них задачи из тренировочных работ и пособий 2010/2011 учебного года.

Весной 2011 года посетителям одного из форумов Интернета был задан следующий вопрос (с выбором ответа):

За месяц до ЕГЭ Ященко вручил вам реальный вариант. Ваши действия:

1) Выложу в Интернет бесплатно – не жалко.

2) Пущу в продажу – надо же выкупить «Челси» у Абрамовича.

3) Поделюсь с друзьями и партнёрами.

4) Буду тайно владеть вариантом, никому ни слова.

5) Сожгу в топке, не читая!

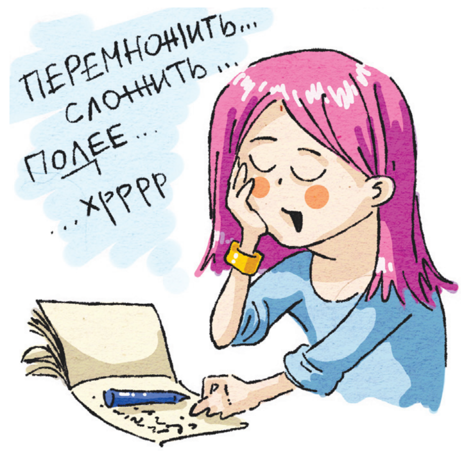
Большинство откликнувшихся предпочли первый и третий варианты ответов. Это их право, но надо заметить, что разработчики вариантов и не скрывали примерные типы заданий. Так, в новом (август 2010) издании книги [1], говоря об особенностях заданий прошедших (2010) и предстоящих (2011) летних экзаменов, уточнялось применительно к ЕГЭ и такое широкое понятие, как «олимпиадная задача» (задание С6): «Тип задания: Задание на свойства целых чисел. Характеристика задания: Задача, связанная со свойствами делимости целых чисел, логическим перебором, *нахождением наибольших и наименьших значений выражений в целых числах*».

Выделенные нами курсивом слова отсутствовали в первом издании книги [1], что наводило на мысль о возможности появления подобных задач на ЕГЭ-2011. А после выхода в декабре 2010 года долгожданной книги [2] эти предположения окрепли. Хотя в предисловии книги [2] и говорилось, что «одним из основных отличий задачи С6 от остальных задач ЕГЭ является её явно выраженный нестандартный характер, а сведения, необходимые для решения этой задачи, могут относиться к самым различным разделам школьного курса», был дан перечень следующих конкретных тем: *делимость (простые и взаимно простые числа), десятичная запись числа, уравнения в целых числах, прогрессии, среднее арифметическое и неравенство о средних*. Каждой из этих тем в [2] посвящён отдельный параграф, в том числе задачам на прогрессии и среднее арифметическое, что не часто встречается. В [1, 2] и в вышедшем затем пособии [3] была представлена большая подборка задач объявленной тематики.

Прошедшие летом 2011 года экзамены подтвердили обоснованность всех наших догадок и предположений. Далее мы разберём несколько полезных задач из [2, 3], а также задачи, подобные тем, что встретились прошлым летом в вариантах ЕГЭ по математике (это задачи 4, 5, 12 – 15). Советуем обратить ваше внимание на работы [4, 5, 6], в которых все вышеперечисленные темы очень подробно рассмотрены.

1. Ученик должен был умножить двузначное число на трёхзначное и разделить их произведение на пятизначное. Однако он не заметил знака умножения и принял записанные рядом двузначное и трёхзначное числа за одно пятизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в три раза больше истинного. Найдите все три числа.

Решение. Пусть x – двузначное число, y – трёхзначное, а их произведение надо было разделить на пятизначное число z. По условию задачи ошибочно полученное учеником пятизначное число в 3 раза больше произведения xy.



Умножение коммутативно ($x \cdot y = y \cdot x$), а приписывание одного числа к другому – нет. Поэтому надо рассмотреть два случая. Если x приписывают слева, то получается число $1000 \cdot x + y$, а если справа – то $100 \cdot y + x$.

Во втором случае можно составить уравнение $100 \cdot y + x = 3 \cdot y \cdot x$. Правая часть этого уравнения делится на трёхзначное число y, а левая часть – не делится. В этом случае решений нет.

А чтобы в первом случае обе части уравнения $1000 \cdot x + y = 3 \cdot x \cdot y$ делились на двузначное число x, на него должно делиться трёхзначное число y, поэтому $y = k \cdot x$. Получаем $1000 \cdot x + k \cdot x = 3 \cdot k \cdot x^2$, а после сокращения на x: $1000 + k = 3 \cdot k \cdot x$.

Левая часть должна делиться на 3, поэтому $k = 2 + 3(n - 1)$. Начинаем перебор. При первом значении $k = 2$ получаем трёхзначное число $x = 167$, а нам нужны двузначные числа. Рассмотрев 13 возможностей ($k = 2, 5, \ldots, 36$), находим два решения: $x_1 = 67$, $y_1 = 335$; $x_2 = 42$, $y_2 = 336$.

Осталось найти z_1 и z_2 – всевозможные пятизначные делители произведения $x \cdot y$. Это $z_1 = 22\,445$ и $z_2 = 14\,112$.

Ответ: (67, 335, 22 445);
(42, 336, 14 112).

2. Решите в натуральных числах уравнение $n^{k+1} - n! = 5(30k + 11)$.

Решение. Правая часть (нечётное число, делящееся на 5) должна делиться на n. Убеждаемся, что значения $n = 1$ и $n = 3$ не подходят. Следовательно, $n \geq 5$. В этом случае $n!$ делится на 5, поэтому

$$n^{k+1} = n! + 5(30k + 11)$$

тоже должно делиться на 5. Но тогда и n делится на 5. Для случая $n = 5m$, где $m > 1$, получаем уравнение:

$$5^{k+1} \cdot m^{k+1} - 5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (5m) = 5(30k + 11).$$

После сокращения на 5 оно принимает вид:

$$5^k \cdot m^{k+1} - 4! \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (5m) = (30k + 11).$$

Это уравнение решений не имеет, так как левая часть делится на 5, а правая не делится. Остаётся рассмотреть случай $n = 5$.

Уравнение принимает вид

$$5^{k+1} - 5! = 5(30k + 11),$$

и после упрощений получаем

$$5^{k-1} = 6k + 7.$$

Убеждаемся, что $k = 1$ и $k = 2$ не удовлетворяют этому уравнению, а $k = 3$ является его решением.

Докажем, что других решений нет.

Можно при помощи производной показать, что левая часть возрастает быстрее, чем правая. А можно действовать, как в авторском решении: рассмотреть последовательность

$$a_k = 5^{k-1} - 6k - 7.$$

Вычислим разность

$$a_{k+1} - a_k = \\ = 5^k - 6(k + 1) - 7 - 5^{k-1} + 6k + 7 = \\ = 4 \cdot 5^{k-1} - 6.$$

При $k \geq 2$ эта разность положительна, и, следовательно, последовательность a_k возрастает. Это означает, что при $k > 3$

$$a_k > a_3 = 0,$$

и поэтому

$$5^{k-1} > 6k + 7.$$

Ответ: $n = 5$, $k = 3$.

3. Произведение всех делителей натурального числа N оканчивается на 450 нулей. На сколько нулей может оканчиваться число N?

Решение. Разложим N на простые множители: $N = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \ldots\, p^r$.

Если запись числа N оканчивается n нулями, то либо $a = n$, $c \geq n$, либо $a \geq n$, $c = n$.

Оценим количество k делителей числа N:

$$k = (a + 1) \times (b + 1) \times (c + 1) \times \ldots \times \\ \times (r + 1) \geq (n + 1)^2,$$

при этом k делится на $(n + 1)$.

Если k чётное, то все делители числа N разбиваются на $k/2$ пар вида $(d;\ N/d)$, причём произведение делителей в каждой паре равно N, а произведение всех делителей числа N равно $N^{k/2}$.

Если же k нечётное, то все делители числа N разбиваются на $k/2$ пар вида $(d;\ N/d)$, но есть ещё один делитель, равный $N^{1/2}$. В этом случае произведение всех делителей числа N тоже равно

$$N^{(k-1)/2} \cdot N^{1/2} = N^{k/2}.$$

Значит, для любого N произведение всех его делителей оканчивается $nk/2$ нулями, следовательно, в нашем случае

$$nk = 2 \cdot 450 = 900.$$

При этом

$$900 = nk \geq n(n + 1)^2,$$

откуда следует, что и n, и $(n + 1)$ – делители числа 900 и $n \leq 9$.

Выпишем все такие n: 1, 2, 3, 4, 5, 9. Все эти случаи возможны. Приведём примеры чисел, оканчивающихся на эти количества нулей.

Сделаем это так. Ограничимся числами вида $N = 2^n \cdot 5^c$. Так как $nk = 900$, то для каждого найденного значения n вычисляем $k = 900/n$, а затем, воспользовавшись формулой $k = (n + 1)(c + 1)$, находим степень c. $N = 2 \cdot 5^{449}$; $2^2 \cdot 5^{149}$; $2^3 \cdot 5^{74}$; $2^4 \cdot 5^{44}$; $2^5 \cdot 5^{29}$; $2^9 \cdot 5^9$.

Ответ: 1, 2, 3, 4, 5, 9.

4. Перемножили 5 различных натуральных чисел, больших 1. Какое наименьшее число различных натуральных делителей (включая единицу и само число) может иметь это произведение?

Решение. Пронумеруем перемножаемые натуральные числа в порядке возрастания:

$$1 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5,$$

тогда их произведение

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5.$$

Приведём пример числа P_1, удовлетворяющего условию задачи, у которого ровно 16 различных натуральных делителей:

$$P_1 = a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a^5 = a^{15},$$

где a – любое простое число.

Попробуем теперь доказать, что меньшего количества различных натуральных делителей у числа P быть не может. Часто встречаются задачи о количестве делителей натурального числа и об их сумме, в только что разобранной задаче **3** речь шла об их произведении. Решить эти задачи, как правило, помогает разложение чисел на простые множители, здесь же оно может завести нас в тупик.

Оказывается, что можно просто привести пример шестнадцати различных делителей числа P, расположив их по возрастанию следующим образом:

$$1 < a_1 < a_2 < a_1 \cdot a_2 < a_1 \cdot a_3 < a_2 \cdot a_3 < a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 < a_1 \cdot a_2 \cdot a_4 < a_1 \cdot a_3 \cdot a_4 < a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 < a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 < a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_5 < a_1 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot a_5 < a_1 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 < a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 < a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5.$$

Теперь понятно, что если перемножить k различных натуральных чисел, больших 1, то наименьшее число различных натуральных делителей (включая единицу и само число), которое может иметь это произведение, равно

$$(1 + 2 + \ldots + k) + 1 = (k^2 + k + 2)/2.$$

Теперь мы знаем, как это доказать.

Ответ: 16.

5. Найдите все простые числа p такие, что число $p^2 + 59$ имеет ровно 6 различных делителей.

Решение. Число имеет ровно 6 различных делителей, если его разложение на простые множители имеет вид a^5 или $a \cdot b^2$. Если $p = 2$, то

$$p^2 + 59 = 63 = 7 \cdot 3^2,$$

а если $p = 3$, то

$$p^2 + 59 = 68 = 17 \cdot 2^2.$$

Квадраты других простых чисел и при делении на 3, и при делении на 4 дают остаток 1, поэтому число $p^2 + 59$ будет делиться и на 4, и на 3, но оно больше, чем $3 \cdot 2^2$, поэтому у него будут и другие делители.

Ответ: 2; 3.

6. Первый набор чисел состоит из чисел 2, 4, 8, ... , 2^{10}. Второй набор состоит из чисел 3, 9, 27, ... , 3^{10}. Числа разбили на пары. В каждой паре на первом месте стоит число из первого набора, а на втором – какое-то число из второго. В каждой паре два числа умножили друг на друга и полученные произведения сложили. Найдите наименьшее возможное значение полученной суммы.

Решение. Покажем, что наименьшее возможное значение полученной суммы равно

$$S_{10} = 2^1\cdot 3^{10} + 2^2\cdot 3^9 + \ldots + 2^9\cdot 3^2 + 2^{10}\cdot 3^1,$$

что представляет собой сумму десяти первых членов геометрической прогрессии с $b_1 = 2^1\cdot 3^{10}$ и $q = 2/3$. Она равна $6(3^{10} - 2^{10})$.

Предположим, что можно получить ещё меньшую сумму. Записав её, как и S_{10}, по убывающим степеням тройки, найдём первое отличное от первой суммы слагаемое.

Наши дальнейшие действия поясним сначала для конкретного случая. Предположим, что во второй сумме вместо $2^1\cdot 3^{10}$ на первом месте стоит $2^k\cdot 3^{10}$, а на 2^1 умножается 3^n. Понятно, что $n < 10$.

Покажем, что после замены этих двух слагаемых второй суммы $(2^k\cdot 3^{10}+2^1\cdot 3^n)$ на $(2^1\cdot 3^{10}+2^k\cdot 3^n)$ эта сумма уменьшится:

$$(2^k\cdot 3^{10}+2^1\cdot 3^n) - (2^1\cdot 3^{10} + 2^k\cdot 3^n) =$$
$$= 2^1\cdot 3^n\cdot(2^{k-1}\cdot 3^{10-n} + 1 - 3^{10-n} - 2^{k-1}) =$$
$$= 2^1\cdot 3^n\cdot(3^{10-n} - 1)\cdot(2^{k-1} - 1) > 0.$$

Внеся соответствующие изменения во вторую сумму, сравниваем очередную пару слагаемых. Пусть теперь очередное отличие встретилось на m-й позиции: во второй сумме вместо $2^m\cdot 3^{11-m}$ стоит $2^k\cdot 3^{11-m}$, а на 2^m умножается 3^n. Понятно, что $n < 11 - m$, так как $2^k\cdot 3^{11-m}$ стоит левее, чем $2^m\cdot 3^n$.

Покажем, что после замены этих двух слагаемых второй суммы $(2^k\cdot 3^{11-m}+ 2^m\cdot 3^n)$ на $(2^m\cdot 3^{11-m}+2^k\cdot 3^n)$ эта сумма уменьшится:

$$(2^k\cdot 3^{11-m}+ 2^m\cdot 3^n) - (2^m\cdot 3^{11-m}+2^k\cdot 3^n) =$$
$$= 2^m\cdot 3^n\cdot 2^{k-m}\cdot 3^{11-m-n}+1-3^{11-m-n}-2^{k-m}) =$$
$$= 2^m\cdot 3^n\cdot(3^{11-m-n} - 1)\cdot(2^{k-m} - 1) > 0.$$

Действуя так, мы в результате преобразуем вторую сумму (последовательно её уменьшая) в $S_{10} = 2^1\cdot 3^{10} + 2^2\cdot 3^9 + \ldots + 2^9\cdot 3^2 + 2^{10}\cdot 3^1$.

Ответ: $6(3^{10} - 2^{10})$.

7. Среднее арифметическое десяти различных положительных целых чисел равняется 10. Чему может равняться наибольшее среди этих чисел?

Решение. По условию сумма десяти различных положительных целых чисел равна 100. Минимальная сумма первых девяти из них равна $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, поэтому максимальное значение десятого числа a_{10} равно 55. Если $a_{10} \le 14$, то сумма десяти различных положительных целых чисел меньше, чем сто.

Если же $a_{10} = 15$, то можно взять, например, следующий набор чисел: $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 100$. Используя этот набор чисел, покажем, что a_{10} может принимать любое значение от 15 до 55 включительно.

Будем последовательно уменьшать на единицу, пока это возможно, сначала a_1, одновременно увеличивая на единицу a_{10}. Затем так же действуем с a_2, и так далее, пока не получим набор $1 + 2 + \ldots + 9 + 55 = 100$.

Ответ: от 15 до 55 включительно.

8. Сумма шестнадцати чисел равна 0,5. Оказалось, что сумма каждых пятнадцати из этих чисел положительна. Какое наименьшее целое значение может иметь наименьшее из данных чисел?

Решение. Пусть $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{16}$, и сумма этих шестнадцати чисел равна 0,5. Так как

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{15} = 0{,}5 - a_{16} > 0,$$

то $a_{16} < 0{,}5$. Следовательно,

$$a_2 + \ldots + a_{15} + a_{16} < 0{,}5 \cdot 15 = 7{,}5.$$

Получается, что $a_1 > -7$, и его наименьшее целое значение ≥ -6. Покажем, что это реализуется. Все условия задачи будут выполнены, если $a_1 = -6$ и все остальные пятнадцать чисел равны 13/30.

Ответ: -6.

9. В соревновании участвовали 50 стрелков. Первый выбил 60 очков; второй – 80; третий – среднее арифметическое очков первых двух; четвёртый – среднее арифметическое очков первых трёх. Каждый следующий выбил среднее арифметическое очков всех предыдущих. Сколько очков выбил 42-й стрелок?

Решение. Получается, что третий стрелок выбил 70 очков, а первые три стрелка вместе – 210 очков, то есть по 70 очков в среднем. Но тогда и четвёртый, и все другие стрелки выбили по 70 очков.

Ответ: 70.

10. В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Доказать, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найдите наибольшее возможное её значение после такой замены:

а) одной оценки «4»;

б) всех его оценок «4».

Решение. Пусть первоначальное количество оценок у Вовочки равно n ($n \geq 2$, иначе дробную среднюю оценку не получить) и их среднее значение равно 3,5. После замены одной оценки «4» парой оценок «3» и «5» новое среднее значение всех оценок Вовочки стало равным

$(3{,}5n + 4)/(n+1) = 3{,}5 + 0{,}5/(n+1) > 3{,}5$. С ростом n эта величина убывает, поэтому максимальное значение эта величина принимает при $n = 2$. Оно равно 11/3.

На второй вопрос задачи ответить сложнее. Пусть у Вовочки k четвёрок и $(n - k)$ других оценок и среднее значение этих «других» оценок равно x. Тогда

$$3{,}5n = 4k + x(n-k).$$

Так как $x \geq 1$, получаем, что

$$3{,}5n \geq 4k + (n-k),$$

или $2{,}5n \geq 3k$, или $5n \geq 6k$. Равенство достигается, например, при $n = 6$, $k = 5$, это когда на 5 четвёрок приходится одна единица, а других оценок нет.

При замене всех k четвёрок на k пар оценок «3» и «5» новое среднее значение всех оценок Вовочки станет равным

$$(3{,}5n + 4k)/(n + k) = 4 - 0{,}5n/(n + k)$$

и не превысит величины

$$4 - 3/11 = 41/11.$$

Дело в том, что при $5n \geq 6k$ выполняется неравенство

$$n/(n + k) \geq 6/11.$$

Ответ: а) 11/3; б) 41/11.

11. Гидролог вводит в компьютер измерения температуры забортной воды. Температура измеряется с точностью до одной десятой градуса. За всё время наблюдений температура наблюдалась выше 10 °С, но ниже 17 °С. Всего гидролог ввёл 32 измерения, но из-за усталости, качки и плохой клавиатуры один раз вместо десятичной запятой гидролог нажал клавишу «0», а другой раз вообще не нажал десятичную запятую. После упорядочения данных получился ряд из 32 чисел, начинающийся числами 12,2; 12,8; ... Если из полученного ряда удалить два первых числа, то среднее арифметическое оставшихся равно 68,8. Если удалить два последних, то среднее арифметическое оставшихся равно 13,7. Определите, в каких числах и какие ошибки допустил гидролог.

Решение. В результате ошибок вместо чисел $\overline{1a,b}$ и $\overline{1c,d}$ получились числа $\overline{1ab}$ и $\overline{1c0d}$. Отметим, что $a < 7$ и $c < 7$, так как наблюдаемые значения температуры меньше, чем 17 °С. Понятно, что после упорядочения данных в ряду из 32 чисел эти числа имеют номера 31 и 32 соответственно. Данные задачи позволяют найти сумму этих двух натуральных чисел. Действительно, сумма всех 32 чисел равна

$$68{,}8 \cdot 30 + 12{,}2 + 12{,}8 = 2\,089.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{1ab} + \overline{1c0d} + 13{,}7 \cdot 30 = 2089.$$

В результате получаем математический ребус:

$$\overline{1ab} + \overline{1c0d} = 1678, \text{ или } \overline{ab} + \overline{c0d} = 578.$$

Если $b + d = 8$, то $a = 7$, но по условию это невозможно, поэтому, $b + d = 18$. Тогда $a = 6$ и $c = 5$. Сумма цифр $b + d = 18$, это возможно лишь в случае $b = d = 9$.

Ответ: в числе 15,9 вместо запятой поставлен ноль, а в числе 16,9 пропущена запятая.

12. На доске написано более 54, но менее 72 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 5. Среднее арифметическое всех положительных из них равно 18. А среднее арифметическое всех отрицательных из них равно –9.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше – положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди них?

Решение. Пусть среди написанных на доске чисел n отрицательных, p – положительных и z нулей. Вычисляя двумя способами сумму всех этих чисел, получаем

$$5(n + z + p) = 18p - 9n.$$

Так как правая часть делится на 9, то на 9 должна делиться и левая часть. Получается, что $(n + z + p)$ – количество всех целых чисел, написанных на доске, делится на 9.

По условию

$$54 < (n + z + p) < 72,$$

поэтому

$$(n + z + p) = 63.$$

Но тогда $18p - 9n = 5 \cdot 63$, откуда находим, что $2p - n = 35$. Получаем систему:

$$\begin{cases} (n + z + p) = 63, \\ 2p - n = 35. \end{cases}$$

Это равносильно другой системе:

$$\begin{cases} 3p = 98 - z, \\ 3n = 91 - 2z. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $3(p - n) = 7 + z > 0$, следовательно, положительных чисел написано на доске больше, чем отрицательных. Далее, из второго уравнения следует, что n уменьшается с ростом z. Наибольшее возможное целое значение $n = 29$ получаем при $z = 2$. В этом случае $p = 32$.

Покажем теперь, что такой набор значений чисел n, p и z реализуем. Пусть на доске написано 29 раз число –9, 32 раза число 18 и два раза 0. Всего 63 числа. Их среднее арифметическое равно

$$(32 \cdot 18 - 29 \cdot 9) : 63 =$$
$$= (576 - 261) : 63 = 315 : 63 = 5.$$

Ответ: а) 63; б) положительных чисел больше; в) 29.

13. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 12 раз больше, либо в 12 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 1 652. Может ли последовательность состоять из двух членов? Может ли последовательность состоять из трёх членов? Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение. Если последовательность состоит из двух членов, a и $12a$ (в произвольном порядке), то их сумма равна $13a$, но число 1 652 на 13 не делится, поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

Приведём пример последовательности, состоящей из трёх членов: 118, 1 416, 118.

Приведём пример последовательности, состоящей из 255 членов. В ней 128 членов с нечётными номерами равны 1, а 127 членов с чётными номерами равны 12. Их сумма равна 1 652. Последовательности с большим количеством членов не существует.

Действительно, так как сумма любых двух соседних членов такой последовательности делится на 13, то она не меньше 13. Поэтому, если в последовательности 256 или больше членов, то её сумма не меньше, чем $13 \cdot 128 = 1\,664$, что противоречит условию задачи.

Ответ: нет; да; 255.

14. Набор состоит из тридцати девяти натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 6. Среднее арифметическое любого тридцати одного числа этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно шестнадцать единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее шестнадцати единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 32.

Решение. По условию задачи среднее арифметическое любого тридцати одного числа из такого набора меньше 2, следовательно, сумма любого тридцати одного числа из такого набора не превышает 61. Если в наборе содержится 16 единиц, 20 двоек, а также (по одному) числа 3, 4 и 6, то наибольшую сумму тридцати одного числа из этого набора мы получим, сложив 8 единиц, 20 двоек, а также числа 3, 4 и 6. Получится как раз 61. Поэтому на первый вопрос задачи ответ положительный: мы привели пример набора, содержащего ровно 16 единиц и удовлетворяющего всем условиям задачи. Заметим, что сумма всех 39 чисел этого набора равна 69.

Если же в наборе, содержащем числа 3, 4 и 6, меньше 16 единиц, то сумма всех 39 чисел такого набора превосходит сумму всех 39 чисел только что рассмотренного набора с 16 единицами, то есть 69. Но тогда наибольшая сумма тридцати одного числа из этого набора будет не меньше, чем 62, а их среднее арифметическое будет не меньше 2. Поэтому такой набор не может содержать менее шестнадцати единиц.

Теперь покажем, как из любого набора, удовлетворяющего условиям задачи, выбрать несколько чисел, сумма которых равна 32. В таком наборе не менее шестнадцати единиц. Прибавив к ним 3, 4 и 6, мы получим сумму девятнадцати чисел, равную 29. До суммы 32 не хватает 3. Действовать можно по-разному. Например, так. По условию сумма любых двенадцати из оставшихся двадцати чисел набора не превышает 32. Так как сумма S_3 трёх самых маленьких из них не превосходит 8 (принцип Дирихле), то прибавив S_3 к 29 и отняв «лишние» ($S_3 - 3$) единички, мы получим 32.

Можно действовать иначе. Прибавив к шестнадцати единицам 3, 4, 6 и двенадцать любых чисел из оставшихся двадцати, мы получим сумму, заключённую между 41 и 61. Это превышает 32 на величину, заключённую между 9 и 29. Используя только имеющиеся 16 единиц, мы в любом случае без труда «дадим сдачу», либо оставляя единицы в нужном количестве, либо только их убирая. Это осуществимо, так как:

$$29 = 1+28 = 2+27 = \ldots = 14+15.$$

Ответ: а) да; б) нет.

15. Существуют ли пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 2 800, и а) пять, б) четыре, в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение. Для определённости будем считать геометрические прогрессии, которые мы ищем, возрастающими. Обозначим первый член прогрессии через b_1, а знаменатель прогрессии – через q, причём

$$q = m/n > 1,$$

где m и n – взаимно простые натуральные числа. Заметим, что из условия задачи вовсе не следует, что q – натуральное число.

Если бы все 5 чисел образовывали геометрическую прогрессию, то их произведение равнялось бы $(b_1q^2)^5 = (b_3)^5 = 2\,800 = 7 \cdot 2^4 \cdot 5^2$. Так как b_3 – натуральное число, а 2 800 не является пятой степенью, то этот случай невозможен.

Покажем, что и четырёх чисел, образующих геометрическую прогрессию, быть не может. В противном случае число 2 800 должно делиться на их произведение, т. е. на $(b_1^4 \cdot m^6)/(n^6)$. Так как числа m и n взаимно просты, $2\,800 = 7 \cdot 2^4 \cdot 5^2$ должно делиться на m^6, но это невозможно, так как у 2 800 нет простых делителей в шестой степени.

Теперь приведём пример пяти чисел, произведение которых равно 2 800, среди которых есть три, образующих геометрическую прогрессию: 1, 2, 4, 7, 50.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Литература

1. *Ященко И.В., Шестаков С.А., Захаров П.И.* Подготовка к ЕГЭ по математике в 2011 году. Методические указания – М.: МЦНМО, 2011.

2. *Пратусевич М.Я., Рукшин С.Е., Столбов К.М., Ященко И.В.* ЕГЭ-2011. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра / под ред. Семенова А.Л. и Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2011.

3. *Высоцкий И.Р., Рязановский А.Р., Ященко И.В.* ЕГЭ-2011. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов/авт.-сост. под ред. Семенова А.Л., Ященко И.В. – М.: Национальное образование, 2010. – 240 с. – (ЕГЭ-2011. ФИПИ – школе).

4. *Лупашевская В.Ю.* Нестандартные задачи на прогрессии // Потенциал. Физика. Математика. Информатика. – 2011, № 5.

5. *Пукас Ю.О.* Десятичная запись числа // Потенциал. Физика. Математика. Информатика. – 2011, № 6.

6. *Лупашевская В.Ю., Пукас Ю.О.* Олимпиадные задачи для Единого Государственного Экзамена по математике. – М.: Азбука-2000, 2011.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Не верь глазам своим

Раздосадованный и обескураженный автомобилист рассказывает другу:

– Купил на выставке превосходный карбюратор, который должен, согласно рекламному каталогу, экономить 50% бензина. Там же купил электронную приставку к зажиганию, которая, как написано в каталоге, экономит 40% бензина, а также выхлопной агрегат, экономящий 30% бензина...

– Ну и что?

– Как что? Всё купленное должно дать 120% эколномии! А я еле до тебя доехал – бензин кончился.

Везде свой математический расчёт

Хозяин клеверного луга повесил такое объявление: «За выпас лошади с длинным хвостом взимается 6 долларов, а с коротким – 3 доллара».

– Почему? – удивились односельчане.

– Я учёл, – сказал тот, – что лошадь с коротким хвостом вынуждена будет много времени тратить на отгон одолевающих её мух и не сможет съесть столько, сколько легко отгоняющая мух длиннохвостая лошадь.