Гайнуллин Камиль Галиахметович

Младший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, начальник лаборатории Всероссийского научно-исследовательского института экспериментальной физики (г. Саров, Нижегородской обл.).

Вася, Федя и капитан Флинт

Многие из первых практических результатов по математике человечество получило с помощью целых (натуральных) чисел, которые и по сей день составляют предмет серьёзных математических исследований. В курсе школьной математики целые числа широко используются в различных разделах, в том числе как допустимое множество решений текстовых задач, в которых количество неизвестных величин превышает число уравнений. Требование целочисленности решения позволяет из совокупности алгебраически возможных решений выбрать физически разумные и, тем самым, получить необходимый ответ (не может быть полчеловека, может быть лишь полтрупа!). Не претендуя на полноту изложения, рассмотрим несколько типичных задач, взятых из книги автора «Вася, Федя и капитан Флинт. Текстовые задачи по математике для школьников и их родителей с подсказками и решениями» (Саров, «Римус», 2007).

1. Задачи, приводящие к линейным уравнениям

Предпосылкой для нахождения целочисленных решений линейного уравнения с неизвестными x и y служит тот факт, что для заданных коэффициентов, таких, что $c > a$, $b > 0$, уравнение $ax + by = c$ имеет конечное число решений с целыми и положительными значениями x и y (включая их отсутствие). Для нахождения таких решений используют либо прямой перебор небольшого числа вариантов, либо эвристические подходы, резко сокращающие число возможных вариантов.

Рассмотрим в первом разделе решения двух задач, а две другие предложим для самостоятельных упражнений. Аналогичный подход соблюдён и в других разделах статьи.

Задача 1. В связи с успешным окончанием учебного года папа дал Васе и Феде на двоих 100 евро, мама – 100 долларов, дедушка – 500, а бабушка – 100 рублей. При каком курсе евро/рубль братьям для равного дележа не придётся разменивать ни одну из четырёх дарёных купюр, если курс доллар/рубль равен 29? (Задача составлена в 2005 г.).

Решение. В данном случае требование целочисленности решения состоит в запрете размена купюр, поскольку прямой делёж через нарушение целостности (разрезание) уменьшает их стоимость и не является разумным решением. Пусть x – искомый курс евро/рубль. Менять купюры не придётся, если стоимость одной из них равна стоимости трёх других, либо стоимость двух равна стоимости двух других. В первом случае либо 100 долларов равны стоимости трёх остальных, либо банкнота в 100 евро равна стоимости остальных:

$$\left[\begin{array}{l}100\cdot 29=100\cdot x+500+100,\\ 100\cdot x=100\cdot 29+500+100,\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=23,\\ x_2=35.\end{array}\right.$$

Других вариантов с положительным x нет, так как курс доллар/рубль больше 4.

Во втором случае имеются также два варианта:

$$\left[\begin{array}{l}100\cdot 29+500=100+100x,\\ 100\cdot 29+100=500+100x,\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_3=23,\\ x_4=25.\end{array}\right.$$

Приятно, что одно из четырёх полученных решений совпадает с текущим курсом.

Задача 2. На новоселье к Феде и Васе пришли друзья и подарили деньги. Каждый Васин друг подарил ему по 121 рублю. Каждый Федин друг подарил ему по 60 рублей. Братья подсчитали, что всего приходили 100 человек и подарили 10000 рублей. (Не имей 100 рублей, а имей 100 друзей – каждый даст по 100 рублей!) Сколько друзей пришло к старшему брату?

Решение. Пусть x – число друзей Васи, y – Феди. Отметим, что часть из них могут быть одновременно друзьями обоих братьев, т.е. $x+y\geq$ ≥ 100. Запишем подаренную сумму денег и найдём выражение для величины x:

$$121\cdot x+60\cdot y=10000\Rightarrow x=\frac{20\cdot(500-3y)}{121}.$$

Для физически осмысленного решения (друг не может быть половиной или третью человека) x и y должны быть натуральными, а $(500-3y)$ должно делиться на 121. Это возможно лишь при $(500-3y)=$ $=121, 242, 363, 484$. Перебор даёт, что лишь для числа 242 есть целое значение $y=86$, откуда легко находим $x=40$. Из решения видно, что было 26 общих друзей.

Задача 3. Для обращения в пиратской островной «республике» капитан Флинт велел отчеканить пиастры с собственным профилем, содержащие серебро 2:1, массой 10 г (монета получила название «малый Флинт», до настоящего времени не сохранилась). С этой целью шиллинги массой 12 г (80% серебра) сплавили с кронами в 20 г (50% серебра). Какое минимальное количество пиастров можно изготовить без потерь, не пользуясь весами?

Задача 4. Для обращения в пиратской островной «республике» капитан Флинт велел отчеканить дукаты

с собственным профилем, с содержанием золота 2:1 и массой 12 г (был известен как «большой Флинт», не сохранился). С этой целью сплавили гинеи из чистого золота массой 12 г, экю массой 8 г (60% золота) и дублоны массой 20 г (40% золота). Какое минимальное число дукатов можно отчеканить без потерь, не пользуясь весами?

2. Задачи, приводящие к неравенствам

В таких задачах чётко сформулированы неравенства, позволяющие ограничить «вилку» алгебраических решений и «внутри неё» найти целочисленные значения. Далее из них перебором или эвристическими подходами выбираем подходящие решения.

Задача 5. После успешной атаки на корвет «Инесса» команде Флинта достался кошелёк с серебряными пиастрами. Если офицерам дать по 38 монет, то несколько штук останется, а если по 39, то на всех офицеров не хватит. Если раздать деньги только матросам, то каждому из них достанется по 6 пиастров и останутся лишние, а если раздать по 7, то не хватит монет. Какое минимальное число людей могло быть у Флинта, если матросов было в 5,5 раз больше, чем офицеров?

Решение. Пусть у Флинта было S пиастров и M матросов, тогда число офицеров равнялось:

$$\frac{M}{5{,}5}=\frac{2M}{11}.$$

Из последнего следует, что M кратно 11, т.е. $M=11,\ 22,\ 33,\ \ldots$. По условиям составим и решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 39\cdot\frac{2M}{11} > S > 38\cdot\frac{2M}{11}, \\ 7M > S > 6M, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7\frac{1}{11} > S > 6\frac{10}{11}, \\ 7 > \frac{S}{M} > 6, \end{cases} \Rightarrow 7 > \frac{S}{M} > 7-\frac{1}{11}.$$

Пусть $S=7M-m$, тогда $0<\frac{m}{M}<\frac{1}{11}$, где m – натуральное число, а $M=11,\ 22,\ \ldots$. Из них минимально возможное $M=22$ и $m=1$ – удовлетворяют последнему неравенству, что даёт искомый ответ:

$$22+2\cdot\frac{22}{11}=26 \text{ человек.}$$

Задача 6. Мама послала Васю и Федю в магазин за яблоками. Они купили красных, жёлтых и зелёных яблок, всего 33 штуки. Вася подсчитал, что красных куплено больше, чем жёлтых, а жёлтых больше, чем зелёных. Федя заметил, что если купить ещё N яблок, то зелёных будет больше, чем красных.

а) Сколько яблок каждого цвета купили ребята, если $N=3$?

б) Сколько жёлтых яблок купили братья, если $N=5$?

Решение. *а*) Если R – число красных яблок, а G – зелёных, то по условию $(R-2)\geq G$. Чтобы зелёных стало больше, чем красных, необходимо добавить как минимум ещё 3 зелёных яблока для выполнения условия

$$(G+3)>(R-2)\geq G.$$

Откуда следует $R-2=G$, а общее число яблок

$$(R-2)+(R-1)+R=33\Rightarrow R=12,$$

из них жёлтых будет $R-1=11$.

б) Выше рассмотрен случай с минимальной разницей в числе яблок (12, 11, 10), что удовлетворяет условиям задачи. При общем числе 33 другие случаи получаются «заменой» цвета. Например: (13, 11, 9), (14, 11, 8), (14, 10, 9), (13, 12, 8). Заметим, что только в первом из них разность между числом красных и зелёных яблок менее 5. В прочих случаях добавка 5 яблок (пусть всех зелёных) не удовлетворяет условиям.

Ответ: в обоих подходящих вариантах (12, 11, 10) и (13,11, 9) было 11 жёлтых яблок.

Задача 7. На Новый год, помимо ёлочных украшений, Федя и Вася повесили на ёлку 49 конфет в красной, синей, белой и жёлтой обёртках. Красных было в 7 раз больше, чем синих, а вместе их было больше, чем белых и жёлтых. Сколько было жёлтых конфет, если белых было на 4 больше, чем синих?

Задача 8. На день рождения Васи отец дал ему 100 рублей с условием: купить мороженого, пирожных и шоколада, а сдачу вернуть. Придя в магазин, Вася убедился, что по отдельности может купить не более 14 пачек мороженого, 11 пирожных и 9 шоколадок. Но, вспомнив уроки математики в школе, он сумел «освоить» всю сумму. Как он мог это сделать, если цена каждой сладости выражалась целым числом рублей?

3. Задачи, использующие делимость целых чисел

Очевидно, что в физически осмысленных текстовых задачах на целые числа можно использовать свойство разложения на простые множители, что позволяет найти конечное множество решений и, тем самым, компенсировать «нехватку» уравнений.

Задача 9. В итоге удачного штурма брига «Мария» команде капитана Флинта достался кошелёк с золотыми дукатами. Если каждому офицеру дать по 7 дукатов, то 4 монеты останутся, а если дать по 8, то не хватит трёх монет. Если же раздать монеты только матросам, то каждому из них достанется поровну. Сколько было матросов?

Решение. Пусть в команде Флинта было N офицеров и несколько матросов. Из условия можно составить уравнение на количество дукатов S:

$$S=7N+4=8N-3,$$

откуда найдём количество офицеров $N=7$ и дукатов $S=53$. Поскольку 53 – простое число, то поровну его можно разделить на 53 матроса, что и является ответом.

Задача 10. После блестящего абордажа каравеллы «Валенсия» команде бравого Флинта достался заветный сундучок с 1927 серебряными пиастрами, что можно было поровну разделить между матросами. Если же поровну разделить между матросами и офицерами, то каждому матросу достанется меньше, чем в первом случае. Сколько офицеров было у Флинта?

Решение. Если рассмотреть делители числа 1927, то их будет только два: 41 и 47. В обоих вариантах де-

лежа денег всем доставалось по равному числу пиастров. Ясно, что в первом варианте дележа участвовал 41 матрос, а после добавления офицеров число участников возросло до 47, значит, в команде Флинта в тот момент было 47–41=6 офицеров.

Задача 11. В ходе удачного нападения на торговое судно «Колумб» команде Флинта достался-таки заветный сундучок с 1886 серебряными пиастрами, что можно было поровну разделить между матросами. Если же поровну делить между матросами и офицерами, то каждому матросу достанется на 5 пиастров меньше, чем в первом случае.

Сколько матросов было у Флинта?

4. Целочисленные корни квадратного уравнения

Если в текстовой задаче на поиск целых и положительных решений неизвестные величины связаны квадратным уравнением, то требование целочисленности распространяется и на его корни, что существенно ограничивает число решений.

Задача 12. Перед школьным вечером завуч попросил Васю и Федю аккуратно расставить в зале стулья для гостей. Вася хотел расставить стулья рядами так, чтобы в каждом ряду число стульев на 10 превышало число рядов. Федя предложил число рядов сделать равным количеству стульев в каждом ряду. Сколько было стульев?

Решение. Пусть Вася предложил расставить стулья в N рядов. Тогда в каждом ряду было бы по $(N+10)$ стульев. Пусть Федя предложил сделать M рядов. Число всех стульев не зависит от расстановки и равно

$$M^2 = N(N+10).$$

Квадратное уравнение относительно N имеет решения:

$$N_{1,2} = -5 + \sqrt{5^2 + M^2}$$

и целый положительный корень 8 при $M=12$. Перебором находим, что при меньших M целых корней нет, а при $M>12$ разность между $(M+1)^2$ и M^2 превышает 25, что также не позволяет извлечь корень из $\left(M^2+25\right)$ нацело. Отсюда следует, что число стульев равнялось $12^2=144$.

Задача 13. После удачного нападения на шхуну «Кадис» капитан Флинт разделил добычу так: матросов он построил по росту и каждому следующему дал на 1 пиастр больше, чем предыдущему (меньшему по росту). Офицеры построились по званию, и каждому следующему Флинт давал на 1 пиастр больше, чем предыдущему (младшему по званию). Если бы Флинт разделил все деньги поровну между членами команды, то «получки» самого младшего офицера и самого высокого матроса не изменились бы. Сколько офицеров и матросов было в команде, если вместе их было менее 100?

Решение. Обозначим через M число матросов, через N – число офицеров. Заметим, что «получки» самого младшего офицера и самого высокого матроса равны средней по экипажу – b. «Получка» всех офицеров равна сумме членов арифметической прогрессии, возрастающей с шагом 41:

$$[2\cdot b+41\cdot(N-1)]\cdot N/2.$$

«Получка» всех матросов равна сумме членов арифметической прогрессии, убывающей с шагом 1:

$$[2b-(M-1)]\cdot M/2.$$

Она не меняется, если деньги разделить поровну:

$$b\cdot(N+M)=[2\cdot b+41\cdot(N-1)]\cdot N/2+$$
$$+[2\cdot b-(M-1)]\cdot M/2.$$

При упрощении остаётся уравнение

$$41\cdot(N-1)\cdot N=(M-1)\cdot M.$$

Оно имеет решения, если M или $(M-1)$ кратны 41, а N – натуральное число. Если $M=41$, то для N получаем уравнение $N^2-N-40=0$, корни которого иррациональны. Если $M=42$, то положительный корень уравнения $N^2-N-42=0$ $(N=7)$ удовлетворяет условию задачи. Следующее число 82, кратное 41, не даёт целых решений N, а бóльшие значения M, кратные 41, т.е. 123, 164, не подходят под условие ограничения численности экипажа – менее 100.

Задача 14. Перед школьным вечером Васю и Федю попросили аккуратно поставить в зале стулья для гостей. Вася хотел поставить стулья так, чтобы их число в каждом ряду на 6 превышало число рядов. Федя предложил наоборот, чтобы число рядов на 6 превышало число стульев в каждом ряду. Других вариантов «прямоугольной» расстановки они не нашли. Сколько было стульев, если ждали от 100 до 200 гостей?

Задача 15. После боя Флинт разделил четырёхзначную сумму пиастров между всеми офицерами так: построил их в шеренгу по возрасту, и каждый следующий получил на 33 пиастра больше, чем предыдущий. Так что самый старший получил в 46 раз больше, чем самый младший. Сколько было офицеров?

Ответы: 3. 54. **4.** 30. **7.** 9. **8.** (0, 5, 5), (2, 1, 7), (1, 3, 6), (8, 0, 4), (7, 2, 3), (6, 4, 2), (5, 6, 1), (4, 8, 0), (13, 1, 0). **11.** 41. **14.** 187. **15.** 10.

«Юморески», которые рассказывал И.К. Кикоин

- Эйнштейн говорил: «Я идеи не записываю – хорошие так редки, что запомнить их очень просто».

- Софья Ковалевская пошла к чиновнику Министерства просвещения. Тот не давал ей профессорство в Петербургском университете (хотя она уже была профессором Стокгольмского) по той причине, что «женщин-профессоров не было, и я не вижу оснований вводить новшество». Её комментарий: «Пифагор, открыв теорему, принёс в жертву богам 100 быков. С тех пор скоты не любят новшеств».

Из собрания В.И. Ожогина