



Гайнуллин Камиль Галиахметович
 Доктор физико-математических наук, начальник
 отдела Всероссийского научно-исследовательского
 института экспериментальной физики (г. Саров
 Нижегородской обл.).

Вася, Федя и капитан Флинт. Текстовые задачи по математике с условиями максимума или минимума

В данной статье рассматриваются не классические задачи на поиск экстремума непрерывной функции, а скорее требование максимума или минимума используется как дополнительное условие для нахождения диапазона изменения переменной величины или проведения оптимальной тактики.

Прикладные задачи на нахождение экстремумов или диапазона изменения искомой величины относятся к наиболее востребованным в практической жизнедеятельности человека. При составлении текстовых задач условия максимума или минимума вносят дополнительную «изюминку», позволяющую усложнить формулировку задачи и при-

близить её к реальной жизненной ситуации.

Не претендуя на полноту изложения, рассмотрим несколько характерных задач, взятых из сборника автора «Вася, Федя и капитан Флинт. Текстовые задачи по математике для школьников и их родителей с подсказками и решениями», Саров, «Римус», 2007 г.

1. Определение диапазона изменения искомой величины

Задача 1. В результате удачного нападения на фрегат «Санта-Мария» команде Флинта достался заветный сундучок с 290 золотыми дублонами и 330 серебряными пиастрами. Какой максимальный и минимальный курс дублон/пиастр можно ввести Флинту, чтобы поровну разделить добычу на 50 человек?

Решение. Пусть отношение стоимостей дублона и пиастра (курс) равен x . На 50 человек можно разделить всю сумму $(330 + 290 \cdot x)$, если



она делится на 50 нацело и каждую долю можно выдать «наличными» пиастрами и дублонами. При равном дележе 40 человек получат по 6 дублонов, а 10 – по 5, и «нехватку» 10 дублонов необходимо компенсировать пиастрами:

$$330 + 290x = 50N \Rightarrow N = 6x + \frac{33 - x}{5}.$$

Откуда находим допустимые значения $x = 33, 28, 23, 18, 13, 8, 3$. При больших $x = 38, 43, 48$ и т. д. не хватит серебряной «мелочи», чтобы выдать всем поровну. Следовательно, максимальный допустимый курс дублон/пиастр равен $x_{\max} = 33$.

Аналогично найдём минимальный курс $x_{\min}$. При равном дележе 30 человек получают по 7 пиастров, а 20 – по 6, и «нехватку» 20 пиастров необходимо заменить 290 дублонами, т. е. $x_{\min} = 20/290 = 2/29$.

Задача 2. В сезон осенних штормов, когда даже самые отчаянные моряки «сушат вёсла», Флинт решил пополнить запасы пороха. На его базе на острове Бикон-Ки нашлось 1160 кг селитры (А), 260 кг древесного угля (В) и 180 кг серы (С). Экипаж брига «Морж» готовил «английский» порох в пропорции А:В:С = 15:3:2, а экипаж галеры «Кассандра» – «испанский» в пропорции 28:7:5.



а) Сколько пороха изготовит каждый экипаж, если они поровну разделят каждый исходный компонент?

б) Какое максимальное количество пороха могут сделать экипажи вместе?

Решение. а) При равном делении исходных компонентов каждому экипажу они достанутся в пропорции: А:В:С = 58:13:9. Умножим её на $(3/13)$ и получим $13 \frac{5}{13} : 3 : 2 \frac{1}{13}$.

Сравнение с «английским» рецептом показывает, что селитры не хватает, а сера в избытке, т. е. селитра израсходуется полностью. В этом случае экипаж «Моржа» изготовит $\frac{15+3+2}{15} \cdot 580 = 773 \frac{1}{3}$ кг пороха. Если исходную пропорцию А:В:С = 58:13:9 умножить на $(7/13)$, то получим: $31 \frac{3}{13} : 7 : 4 \frac{11}{13}$, т. е. для «испанского» рецепта не хватает серы, а селитра в избытке, откуда находим, что экипаж галеры может изготовить $(28 + 7 + 5) \cdot 90/5 = 720$ кг «испанского» пороха.

б) Из предыдущего примера понятно, что обмен «излишками» компонентов увеличит общее количество пороха. Пусть изготовили x «английского» и y «испанского» пороха. Из ограничения на массу компонентов получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{20}x + \frac{7}{40}y \leq 260, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{15}{20}x + \frac{28}{40}y \leq 1160, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{20}x + \frac{5}{40}y \leq 180. & (3) \end{cases}$$

Умножая (1) на 5 и вычитая из него (2), получим: $y \leq 800$. Умножая (1) на 4 и вычитая его из (2), получим: $x \leq 800$. Для изготовления максимальной массы пороха рассмотрим

$x = 800$ и $y = 800$. Из системы следует, что все неравенства обращаются в равенства, т. е. вся масса компонентов 1600 кг будет использована.

Задача 3. На кораблях эскадры Флинта матросам вечером обычно подавали бадью (30 л) коктейля «Старый боцман» крепостью 50% спирта, который готовили из рома (60% спирта, 20% сахара), джина (45% спирта, 5% сахара) и чистой воды. Какова была сахаристость коктейля, если в качестве мерной ёмкости служит ведро 10 л?



Решение. Текстовая задача на смеси. Олимпиадный элемент задачи состоит в том, что числовой отрезок возможных значений сахаристости C принимает дискретные значения (квантуется) за счёт минимальной величины (кванта) мерной ёмкости. Этим обеспечивается конечное число решений.

Обозначим использованное в коктейле количество литров рома как x , джина — y , воды — z . Для удобства рассмотрения составим таблицу:

компонент	ром	джин	вода	коктейль
спирт	0,60	0,45	0,00	0,50
сахар	0,20	0,05	0,00	C
вода	0,20	0,50	1,00	0,50 — C
объём	x	y	z	30

Из баланса количества спирта (первая строка таблицы) получаем уравнение:

$$0,6 \cdot x + 0,45 \cdot y = 0,5 \cdot 30 = 15. \quad (1)$$

Из баланса всей массы (последняя строка) получаем второе уравнение:

$$x + y + z = 30. \quad (2)$$

Сахаристость C находим из второй строки как

$$C = (0,2 \cdot x + 0,05 \cdot y) / 30. \quad (3)$$

Два уравнения (1) и (2) не позволяют однозначно определить 3 искомые величины x , y , z , а лишь задают интервалы их изменения. Выразим y и z через x :

$$y = (100 - 4 \cdot x) / 3, \quad (4)$$

$$z = (x - 10) / 3. \quad (5)$$

Поскольку все искомые величины не могут принимать отрицательные значения, то из (4) находим ограничение на x сверху, а из (5) — снизу:

$$25 \geq x \geq 10. \quad (6)$$

Используя (6), можно найти диапазон изменения y и z :

$$20 \geq y \geq 0, \quad 5 \geq z \geq 0. \quad (7)$$

Последнее ограничение наиболее удобно для анализа. Очевидно, что ведром в 10 литров нельзя точно налить меньший объём, кроме нулевого. Поэтому $z = 0$, $x = 10$, $y = 20$, а сахаристость найдём по формуле (3):

$$C = (0,2 \cdot 10 + 0,05 \cdot 20) / 30 = 0,1.$$

Задача 4. Решить задачу 3 при условии, что мерной ёмкостью служит кружка 1 л.

Задача 5. В ходе кровавой битвы за барк «Кармен» команде Флинта достался скромный сундучок с 290 золотыми дублонами и 330 серебряными пиастрами. Дублоны капитан разделить не смог и взял их себе, а пиастры разделил между членами команды. Какое минимальное и максимальное отношение зарплаты офицера к зарплате матроса можно ввести Флинту, дабы разделить добычу между 10 офицерами (поровну) и 40 матросами (поровну)?

Задача 6. В Картахене эскадра Флинта захватила склад с компонентами пороха в одинаковых по весу бочках. В красных бочках были селитра и уголь в отношении 3:1, в чёрных – уголь и сера в отношении 1:1, в жёлтых – селитра и сера в отношении 9:1. Дымный порох гото-

вится из селитры, угля и серы в весовом отношении 15:3:2, причём весов на складе пираты не обнаружили. Какое минимальное и максимальное количество пороха могут изготовить пираты, если на складе они нашли 500 красных, 100 чёрных и 400 жёлтых бочек?

2. Оптимизация использования имеющихся возможностей

Задача 7. Летом Вася и Федя очень любили есть вишню и черешню. Однажды мама купила бидон вишни (208 штук), а папа – ведёрко черешни (320 штук).

Известно, что Вася ест одну вишенку за 5 секунд, а одну черешню – за 8 секунд. Федя же одну вишенку ест за 6 секунд, а черешню – за 4 секунды.



а) Какое минимальное время понадобится каждому брату на поедание ягод, если они разделят поровну и вишни, и черешни?

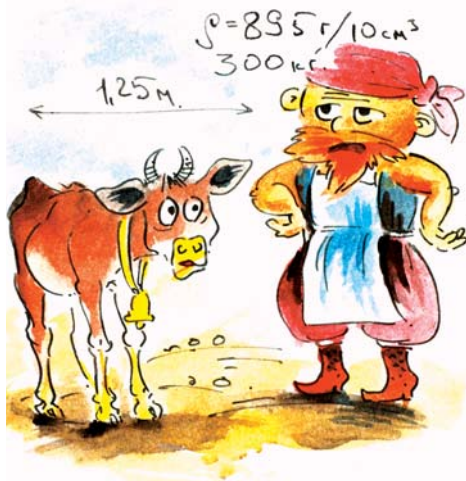
б) За какое минимальное время детишки могут съесть эти ягоды?

Решение. а) Вася съест свою половину вишен за $104 \cdot 5 = 520$ секунд и свою половину черешен за $160 \cdot 8 = 1280$ секунд, что всего составит 1800 секунд, или 30 минут. Федя свою долю вишен съест за 624 секунды и половину черешен за 640 секунд, а всего за 1264 секунды.

б) За минимальное время братья

съедят все ягоды, если каждый начнёт есть то, что делает быстрее. Вася съест все вишни за $208 \cdot 5 = 1040$ секунд. За это время Федя съест только $1040 : 4 = 260$ черешен из 320. Если за 8 секунд Вася ест 1 черешню, а Федя – 2, т. е. вместе они съедают 3 черешни за 8 секунд. Значит, оставшиеся 60 черешен братья съедят за $60 : 3 \cdot 8 = 160$ секунд, а всего они затратят $1040 + 160 = 1200$ секунд = 20 минут.

Задача 8. На свой юбилей легендарный «джентльмен удачи» капитан Флинт пригласил дружественных пиратов и послал кока для закупки мяса к пирушке, дав ему тысячу и один пиастр. Туземцы продавали бычков весом 300 кг по 101 пиастру и кабанчиков весом 61 кг по 21 пиастру за каждого. Как поступить коку, дабы на эти деньги купить мяса как можно больше?



Решение. Очевидно, что по цене килограмма мяса выгоднее купить бычков, но для 10 бычков не хватает 9 пиастров. Пусть куплено x бычков и y кабанчиков на всю сумму: $101 \cdot x + 21 \cdot y = 1001$, откуда имеем $x = 10 - 3 \cdot (7 \cdot y + 3) / 101$. Это уравнение имеет целые решения, если $7 \cdot y + 3 = 0, 101, 202, \dots$. Подходящим его решением является $(x, y) = (7, 14)$. Поскольку знаменатель 101 – простое число, то других решений в натуральных числах нет. Отметим, что если числитель не делится нацело на 101, то задача усложняется. Если кок купит 7 бычков и 14 кабанчиков на 1001 пиастр, то их общий вес составит $7 \cdot 300 + 14 \cdot 61 = 2954$ кг. Если же он купит 8 бычков и 9 кабанчиков на сумму 997 пиастров, то их общий вес составит 2949 кг, а если 9 бычков и 4 кабанчика (993 пиастра), то их вес будет ещё меньше – 2944 кг. Таким образом, коку следует купить 7 бычков и 14 кабанчиков.

Задача 9. При штурме Картахены эскадра Флинта захватила 21 большую пушку весом по 3,5 т каждая и 68 малых по 0,6 т. Какое минимальное число рейсов нужно сделать на шлюпке грузоподъёмностью 9 т, чтобы увезти на фрегаты все пушки?

Решение. Все пушки весом $21 \cdot 3,5 + 68 \cdot 0,6 = 114,3$ т можно увезти не менее, чем за 13 рейсов. Если грузить по 2 большие и 3 малые пушки, то недолугруз составит $(9 - 2 \cdot 3,5 - 3 \cdot 0,6) = 0,2$ т. Если грузить по 1 большой и 9 малых, то недолугруз уменьшится до 0,1 т, а если погрузить по 15 малых, то будут использованы все 9 т грузоподъёмности. Ясно, чтобы перевезти все пушки за минимальное число рейсов, придётся использовать оба варианта загрузки шлюпки с большими пушками. Пусть было x рейсов с 2-мя большими пушками, y – с одной. Тогда баланс по большим

пушкам даёт уравнение $2 \cdot x + y = 21$. При этом число посадочных мест для малых пушек должно превышать $3x + 9y \geq 68$. Минимум суммы $(x + y)$ достигается на границе: $y = 21 - 2x = (68 - 3x) / 9 \Rightarrow x = 8, y = 5$. Проверка показывает, что за 8 рейсов с 2-мя большими пушками и за 5 рейсов с одной большой можно перевезти 21 большую и 69 малых пушек. Отметим, что если ввести z – число рейсов без больших пушек, то помимо варианта $(8; 5; 0)$ условию минимальности удовлетворяют $(9; 3; 1)$ и $(10; 1; 2)$.



Задача 10. После очередной «удачи» «джентльмен» Флинт решил высадить на необитаемом острове пленных: 45 женщин и 125 детей. Для высадки нашли шлюпку грузоподъёмностью 800 кг, управляемую двумя матросами. Какое минимальное число рейсов необходимо сделать, если вес взрослого человека составляет 75 кг, ребёнка – 25 кг?

Задача 11. На свои именины Флинт созвал окрестных пиратов и послал кока для закупки мяса к пирожке, дав ему 1001 пиастр. Туземцы продавали быков весом 300 кг по

101 пиастру, кабанов весом 61 кг по 21 и баранов весом 29 кг по 10 пиастров за каждого. Как следует поступить коку, дабы купить мяса как можно больше?

Задача 12. К ванне с рабочей ёмкостью 250 литров подведены по одному крану с холодной (10°C) и горячей (60°C) водой. Один литр холодной воды подаётся не менее чем за 4 секунды, а 1 литр горячей – не менее чем за 6 секунд.

а) Какое максимальное количество воды из каждого крана можно налить в ванну для Васи, если он любит температуру 38°C ?

б) За какое минимальное время Федя наполнит ванну с температурой 40°C ?

в) Какова будет температура воды, если ванну наполнить за минимальное время?

Задача 13. При штурме Гаваны эскадра Флинта захватила 21 большую пушку весом по 3,5 т каждая и 68 малых весом по 0,6 т. У пиратов оказалась 1 шлюпка грузоподъемностью 9 т, на которой есть место лишь для 13 малых пушек, а одна большая занимает место 4 малых. Какое минимальное число рейсов нужно сделать, чтобы вывезти на фрегаты все пушки?

Ответы. 4. $1/10$, $17/150$, $19/150$, $7/50$, $23/150$, $1/6$. 5. 33 и $1/8$. 6. 10 и 800. 10. 10. 11. 9 быков, 2 кабана, 5 баранов. 12. а) 110 – холодной, 140 – горячей; б) 15 мин; в) 30°C . 13. 13.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

В ожидании числа

– Сколько раз можно говорить тебе, что на урок нельзя опаздывать! – отчитывала учительница провинившегося.

– Не знаю... Думал, что Вы скажете, сколько можно.

Оценка болевого симптома

Из беседы врача с пациенткой:

– Если шкала измеряющего боль прибора оцифрована от 0 до 10, где «0» означает отсутствие боли, а «10» – невыносимую боль, то какой уровень вашей боли показал бы этот прибор?

– Ох, не знаю. Я не сильна в математике.

Профессиональная привычка

Уходя утром, математик предупредил жену, что немного задержится на работе, но вернулся домой только в полночь. Его взволнованная жена воскликнула:

– Что случилось? Ты же сказал, что придёшь вечером примерно в полдевятого.

– На самом деле, – холодно поправил её математик, – я сказал, что вернусь около 20 ч 30 мин.