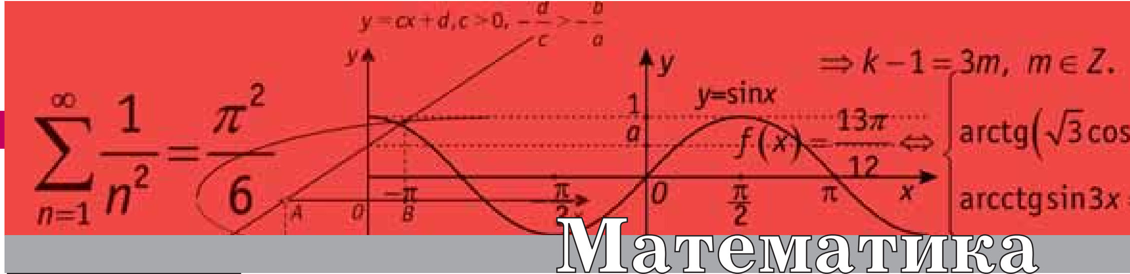

Вавилов Валерий Васильевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и школы имени А.Н. Колмогорова.

Колоскова Мария Евгеньевна
Аспирантка МГУ им. М.В. Ломоносова. Преподаватель математики в школе им. А.Н. Колмогорова

Уроки в цветущем саду

Заключительная геометрическая лекция для десятиклассников школы им. А.Н. Колмогорова при МГУ им. М.В. Ломоносова в конце мая этого учебного года (как и два года назад) была посвящена аксиоматике аффинной плоскости и, в частности, примеру Гильберта такой плоскости. Было установлено, что ни теорема Дезарга, ни теорема Паппа в этой плоскости доказаны быть не могут.

Лекция длилась один час, а после её окончания занятия продолжились в школьном саду. Наш сад в это время года всегда выглядит очень живописно: цветут каштаны, расцветают многочисленные яблони и кусты сирени, в их тени расстилается ковёр полевых цветов, а на солнечных полянах зеленеет аккуратно подстриженная газонная травка. Сам сад довольно старый и большой, но ухоженный; дело в том, что школа-интернат №18 при МГУ (ныне школа им. А.Н. Колмогорова) размещена на территории, где раньше находилась деревня «Давыдково», и садовые деревья остались от бывших частных владений. Весеннее настроение учащихся, пышная зелень, цветы, щебетание птиц и необычность самих уроков «на природе» создают радостную атмосферу деятельности и совместного общения.

Расскажем о двух таких занятиях в расцветающем яблоневом саду, точнее, на его «опушке», где находится школьный стадион. Первое было посвящено экспериментальной математике, на котором проверялись две фундаментальные теоремы. Второе – некоторым задачам практической геодезии (что подчеркнуло, тем самым, возникновение самого слова геометрия), с целью развития навыков и умений правильно оценивать полученные результаты измерений и вычислений.

1. Два года назад мы занимались «постановкой» и проверкой теорем Дезарга и Паппа – Паскаля. Обе эти теоремы носят проективный характер, то есть в них речь идёт только о свойствах точек, прямых и их взаимном расположении.

Теорема Дезарга[1] утверждает, что если на каждой из трех различных прямых, проходящих через одну точку O, выбраны произвольным образом по две точки (A и A', B и B', C и C', рис. 1), то три точки P, Q, R пересечения соответствующих сторон треугольников ABC и $A'B'C'$ лежат на одной (дезарговой) прямой. Верно и обратное: если точки P, Q, R лежат на одной прямой, то прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке. Мы ограничиваемся здесь случаем, когда все интересующие нас точки расположены в конечной плоскости.

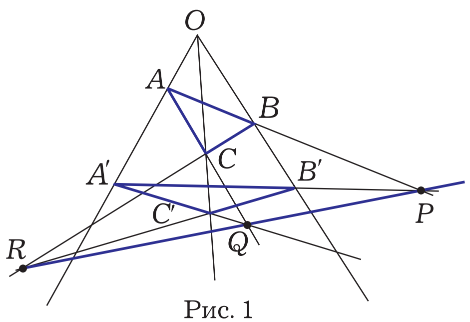

Рис. 1

Теорема Паппа (и Б. Паскаля)[2] утверждает, что если четырёхугольник $ABCDEF$ «вписан» в пару прямых, то точки пересечения пар его противоположных сторон (AB и DE, BC и EF, CD и FA) лежат на одной (паскалевой) прямой (рис. 2).

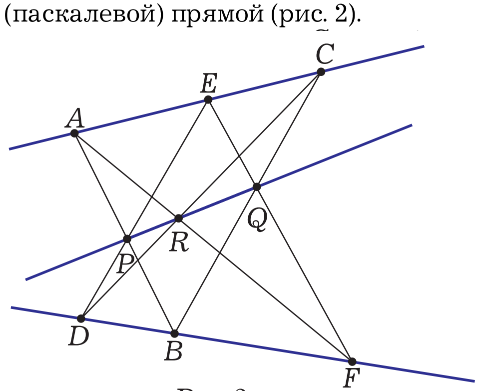

Рис. 2

[1] Жерар Дезарг (1591–1661) – французский архитектор и военный инженер. Полученная им теорема, является одной из основных теорем проективной геометрии и даёт возможность выполнять проективные построения в одной плоскости.

[2] Папп Александрийский (вторая полвина 3-го века) – древнегреческий математик, который, вероятно, работал в Александрии.

Блез Паскаль (1623 –1662) – французский математик, физик и философ. В шестнадцатилетнем возрасте установил теорему о «мистическом» шестиугольнике, которая сильно обобщает теорему Паппа: точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в кривую второго порядка (эллипс, парабола, гипербола, пара прямых), лежат на одной прямой. Интересна история публикации этой работы. Он изготовил 50 экземпляров плакатов с формулировкой теоремы и ясными пояснениями к её доказательству, а затем разместил их на перекрестках улиц в Париже (так делал и Дезарг).

Теорема Паппа, в частности, отвечает на такой вопрос: можно ли посадить 9 деревьев в 9 рядов так, чтобы в каждом ряду было три дерева? Теорема Дезарга даёт рецепт посадки 10 деревьев в десять рядов так, чтобы в каждом из них было по три дерева.

На школьном стадионе предлагалось проверить эти теоремы чисто практически, когда ученики «играют» роль точек, а прямые «виртуально провешиваются». Для этого были выделены две группы учащихся – по одной на каждую конфигурацию. Как это ни странно, но построение фигуры *разумных* размеров (не маленькая, но и не огромная) требует значительного времени: объясняется это, во-первых, тем, что участников больше трёх, а во-вторых – тем, что одна из точек P, Q, R зачастую далеко «убегает» и приходится переговариваться на больших расстояниях. Советов зрителей участникам построений в «нужные шеренги» и смеха было предостаточно, и возгласы типа: «Ну ты – Дезарг!», «Ты не Папп – ты Мамм», «У Вас прямая – кривая!» и т.д. были слышны даже тем, кто с большим любопытством смотрел на всё это действо из окон общежития, не понимая, чем это там народ занимается. После того, как обе конфигурации построены и точки P,Q,R «отмечены одним цветом» (их роль играли девушки; все остальные точки – юноши), начинаются «танцы». Для этой, уже стоящей позиции, строится прямая Дезарга, в случае когда исходными треугольниками считаются треугольники $A'BC$ и $AB'C'$ (для чего нужны ещё две девушки и некоторое время, см. рис. 3). Другая группа школьников «танцует» около прямой Паппа: здесь точки A, B, C, D, E, F остаются на месте, но рассматривается уже другой шестиугольник, а именно – $ABCFEDA$; прямая Паппа становится уже другой (рис. 4). После таких «танцулек» для многих их участников становятся более ясными и сами теоремы, и их проективный характер.

Отмечу, что у нас были также «постановки теоремы Паскаля» для шестиугольника, вписанного в окружность (точки на окружности выбирались при помощи десятиметровой рулетки). Однако теорема Паппа для построений на земле подходит лучше.

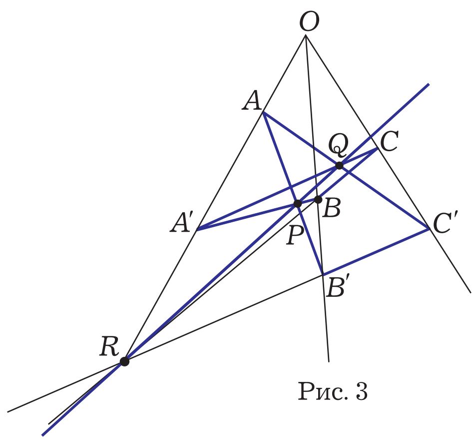

Рис. 3

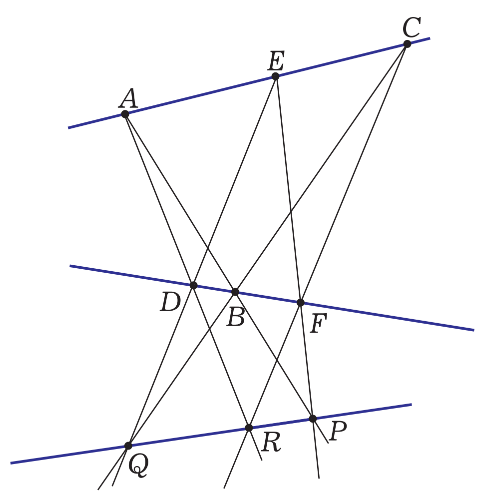

Рис. 4

Примечание. Для заинтересовавшегося читателя расскажем немного о цели лекции и о плоскости Гильберта. В этой плоскости точками являются точки обычной плоскости. Множество же прямых (которое мы постулируем) состоит из прямых четырёх типов. В него входят все вертикальные прямые $x=a$, все горизонтальные прямые $y=b$ и все прямые с уравнением $y=kx+b$, $k<0$. Кроме этих семейств, имеется семейство ломаных (рис. 5) с изломом на оси Ox, причем $\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\alpha=2$ и $0<\alpha<\pi/2$; в верхней половине плоскости прямая имеет уравнение $y=kx+b$, но при $k<0$.

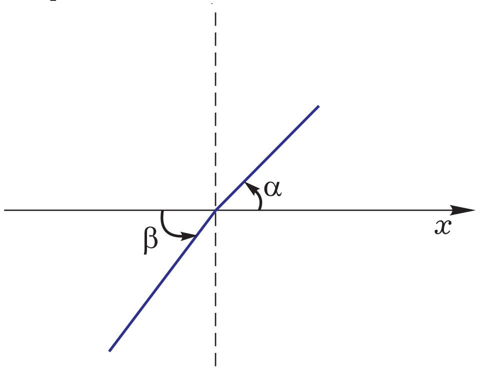

Рис. 5

Легко проверить, что для такой пары множеств <П, L>, первое из которых состоит из точек, а второе множество состоит из определённых выше прямых, выполнены такие три аксиомы:

1. через каждую пару различных точек проходит ровно одна прямая;

2. существуют три точки, не лежащие на одной прямой;

3. через каждую точку, расположенную вне данной прямой, проходит ровно одна прямая, ей параллельная.

Плоскости, удовлетворяющие этим трём аксиомам, называются аффинными плоскостями. Пример Гильберта аффинной плоскости показывает, что в рамках только такой аксиоматики теоремы Паппа и Дезарга доказаны быть не могут (Попробуйте самостоятельно построить соответствующие примеры). Тем самым, мы имеем пример так называемой недезарговой плоскости. Тематику, связанную с аффинными плоскостями, впервые ввёл в нашу школу А.Н. Колмогоров, который в своих лекциях доходил до довольно тонких и трудных вопросов в аксиоматических построениях геометрии.

2. Второй урок на стадионе около цветущего сада в ясный солнечный день был посвящён довольно простой задаче: измерить «при помощи десятиметровой рулетки» расстояние от школы им. А.Н. Колмогорова до здания Московского университета, шпиль которого виден со стадиона. Для учеников это было символично, так как через год многим из них придётся поступать в университет (все наши выпускники, за крайне редким исключением, становятся студентами вузов, а большинство из них – студентами МГУ). Школьники хорошо подготовились к занятиям: переоделись «в летнее» и взяли фотоаппараты.

Для того, чтобы выполнить задание (ответить на вопрос: как далеко мы от МГУ?), учащиеся двух классов были разбиты на 7 групп. Рецептура измерения учащимся не предлагалась, и её нужно было придумать самостоятельно каждой группе. Сразу же посыпались вопросы «умников и умниц»: а высота здания МГУ известна?, а можно измерять углы?, с какой точностью нужен результат? и т.п. Было сказано, что имеется только рулетка, а точность измерения (для начала) – 1 километр. Решив, что получение ответа к этой задаче не займёт много времени, школьники сделали множество самых разнообразных фотографий, немного погуляли и подышали свежим от недавно скошенной травы воздухом, а только потом уже собрались в кружки и стали придумывать способы измерения интересующего расстояния. Преподаватели сначала играли роль «фотомоделей» и статистов. Первая группа пришла с «квадратными» глазами – «… мы поделили … и получили ответ: 72 метра». Не вступая в дискуссию и проверку вычислений, школьники были «посланы в МГУ за пепсиколой» – рядом же. Заметим, что эта же группа подходила потом и второй раз с результатом на 5 метров лучше предыдущего, но … Примерно через час после начала «трудовой» деятельности учащиеся стали серьёзно задумываться; при этом, только у одной группы к этому времени был получен численный результат (известный только учителям), который соответствовал действительности. Но и этот результат они не смогли обосновать, так как, с одной стороны, ни в какой другой группе близких результатов не было, а с другой стороны, априорных оценок для приближённых вычислений ими не приводилось. Отметим, что ни один из наших «вундеркиндов» не сообразил сбегать в школу, напичканную компьютерами, «спросить нужное расстояние», а затем уж хотя бы «подогнать» вычисления. Скажем также, что ни одна группа «нужного числа» за отведённое время не выдала. Помешала немного ещё и затянувшаяся школьная линейка, которая пересеклась с нашими занятиями. Тем не менее, «рассерчавшие» учителя, желая все-таки добиться результата, устроили для школьников «входной» билет на экзамен (по принципу: «не пожелал – на экзамен не попал»), который им предстоял через две недели: нужно было при входе предъявить «километры». В этой статье мы также специально не скажем точного ответа (имея в виду будущие задачи на нашей территории); отметим только, что искомое расстояние находится между 6-ю и 7-ю километрами.

Были использованы две схемы для вычисления нужного расстояния, которые вполне ясны из рисунков 6 и 7.

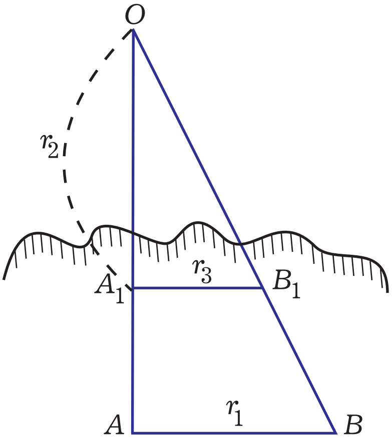

Рис. 6

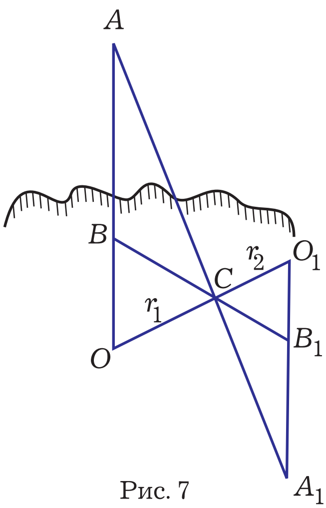

Рис. 7

Так, на рис. 6 из пропорции $OA/AB = OA_1/A_1B_1$ найдём искомое расстояние OA, измерив и вычислив остальные расстояния, в ней участвующие (для вычисления OA_1 пришлось подключить угол; прямой угол строился при помощи египетского прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5). На рис. 7 (на котором, строятся сначала подобные треугольники OBC и O_1B_1C с известным коэффициентом) из подобия треугольников AOC и CO_1A_1 найдём

$$OA/OC = O_1A_1/O_1C.$$

Отметим следующее обстоятельство, связанное с точностью полученных результатов (подобные вопросы всерьёз приходили в голову учащимся только после их неудачных попыток измерений и вычислений). Так, например, если обозначить относительные ошибки измерения расстояний $r_1 = AB$, $r_2 = OA_1, r_3 = A_1B_1$ через $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, из указанной пропорции для истинного значения найдём величину

$$r(1+\delta) = \frac{r_1 r_2 (1+\delta_1)(1+\delta_2)}{1+\delta_3}.$$

Так как при малых δ_3 из формулы для суммы геометрической прогрессии получаем приближённое равенство

$$\frac{1}{1+\delta_3} \approx 1-\delta_3,$$

то, тем самым,

$$1+\delta \approx (1+\delta_1)(1+\delta_2)(1-\delta_3).$$

Отбрасывая здесь члены второго и третьего порядков, получим, что

$$\delta \approx \delta_1 + \delta_2 - \delta_3.$$

Аналогичное приближённое равенство возникает и при втором способе измерения.

Учащиеся также быстро понимают трудности, связанные с точностью определения положения точки пересечения двух прямых, пересекающихся под малым углом. Одну из простых оценок, которая здесь имеет место, получить нетрудно. Пусть в треугольнике ABC задана сторона AB=1 (базис), а углы α и β определены с абсолютной ошибкой, не превосходящей Δ. Если по стороне AB и углам α' и β' построить треугольник ABC' такой, что

$$|\alpha - \alpha'| < \Delta, |\beta - \beta'| < \Delta,$$

то расстояние CC' оценивается (по Δ) при пренебрежении членами порядка выше первого неравенством

$$CC' \le \frac{2l}{\sin^2 \gamma} \cdot \Delta, \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Это неравенство показывает, в какой мере опасны углы γ, близкие к нулю или развёрнутому.

Уроки в саду и детям, и учителям очень понравились.

Упражнения

Здесь мы помещаем задачи, которые можно с успехом решать в пеших и байдарочных походах, в окрестностях дач и вообще «на природе». Первая группа задач связана со свойствами подобных треугольников, а во второй уже требуется понимание теорем Дезарга и Паппа.

1. Докажите оценку для отрезка CC', указанную в конце статьи. Найдите множество точек C, для которых

$$\frac{1}{\sin^2 \gamma} \le 2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sin^2 \gamma} \le 5.$$

2. Как при помощи рулетки измерить: а) глубину котлована, б) высоту дерева, в) ширину озера?

4. Две данные прямые, пересекаясь, образуют угол, вершина которого находится за пределами листа бумаги. С помощью одной линейки через эту вершину и данную точку проведите на бумаге прямую.

5. Проведите прямую через две точки, между которыми расстояние больше, чем длина линейки.

6. На бумаге нарисован отрезок прямой, которую вы хотите продолжить в определённую сторону с помощью линейки. Однако на вашем пути имеется клякса, не позволяющая непосредственно провести прямую, не испачкав при этом линейку. Как можно «обогнуть» кляксу и построить нужный участок прямой?

Исследовательский проект

Задача исследовательского типа, которую можно положить в основу, например, доклада на одной из школьных научных конференций, состоит в том, чтобы разобраться с точностями построений прямых Дезарга и Паскаля. Другими словами, выяснить, как сильно отличается от прямой реально возникающая «ломаная PQR», если положение других точек конфигураций известны лишь с данными абсолютными ошибками? Здесь много вариантов задач; начать можно со случая, когда исходные точки конфигураций расположены в окрестностях данных точек, но расположены на «идеальных прямых», а сами построения проводятся уже с заданными погрешностями.

Литература

1. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981.

2. Р.Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2001.

3. П.В. Маковецкий. Смотри в корень. – М.: Наука, 1976.

4. И.Н. Сергеев, С.Н. Олехник, С.Б.Гашков. Примени математику. – М.: Наука,1989.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

- Отношение между «чистыми» и «прикладными математиками» основаны на доверии и понимании. «Чистые математики» не доверяют «прикладным математикам», а «прикладные математики» не понимают «чистых математиков».

- Чистая математика делает то, что можно, и так, как нужно. Прикладная математика делает то, что нужно, и так, как можно.

- Разговор двух студентов:

  - У тебя есть билеты по матанализу?

  - А у меня проездной!

- В новом тысячелетии люди не будут лгать, воровать и убивать. Всё это за них будут делать компьютеры.