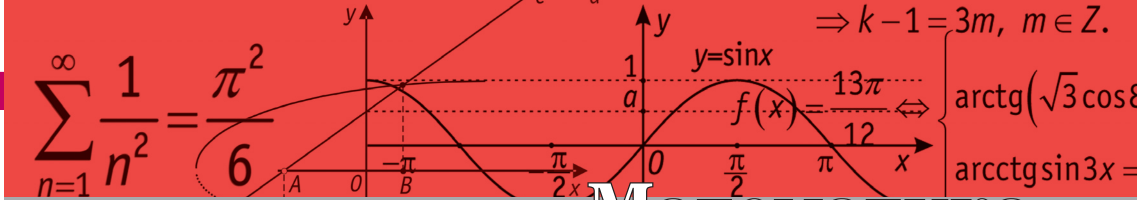


Прокофьев Александр Александрович
Доктор педагогических наук,
заведующий кафедрой высшей математики
№1 НИУ МИЭТ,
учитель математики ГОУ лицей №1557
г. Зеленограда.

Уравнения отрезка

В статье рассмотрены параметрические уравнения отрезка и уравнение отрезка в радикалах. В школьном курсе математики этим понятиям практически не уделяется внимания. Однако задачи на уравнение отрезка в радикалах регулярно предлагались на вступительных экзаменах в ведущих вузах и на математических олимпиадах разного уровня, а также в диагностических работах при подготовке к ЕГЭ. Параметрические уравнения отрезка практически не изучаются, хотя их использование может оказаться весьма полезным при решении как алгебраических, так и геометрических задач.

В статье предложен метод решения задач, в условии которых явно или неявно задаётся отрезок, расположение которого относительно других заданных фигур требуется исследовать. В первом случае отрезок задаётся координатами своих концов, во втором – даётся уравнение отрезка в радикалах. Обычно подобные задачи решаются графическим методом. Использование параметрических уравнений отрезка позволяет решать их алгебраически, а иногда значительно сократить вычислительную часть.

1. Расстояние между точками на координатной оси

Определение 1. *Расстояние* $\rho(x_1, x_2)$ *между точками* x_1 *и* x_2 *оси* Ox определяется равенством:

$$\rho(x_1, x_2) = |\, x_2 - x_1 \,| = \begin{cases} x_2 - x_1, \text{ если } x_2 > x_1, \\ 0, \text{ если } x_2 = x_1, \\ x_1 - x_2, \text{ если } x_1 > x_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Всегда верно неравенство

$$\rho(x_1, x_2) \geq 0.$$

2. Деление отрезка на координатной оси в данном отношении

Предположим, что требуется найти точку x_0, которая делит отрезок $[x_1; x_2]$ в отношении $m : n$, считая от точки x_1 (см. рис. 1).

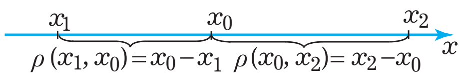


Рис. 1

Тогда из отношения

$$\frac{\rho(x_1, x_0)}{\rho(x_0, x_2)} = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{m}{n}$$

следует $n(x_0 - x_1) = m(x_2 - x_0)$. Отсюда получаем

$$x_0(n + m) = nx_1 + mx_2,$$

или

$$x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти точку x_0, делящую отрезок $[-4; 16]$ оси Ox в отношении $3 : 2$, считая от точки (-4).

Решение. Имеем $m = 3$, $n = 2$, $x_1 = -4$, $x_2 = 16$. Из (2) следует

$$x_0 = \frac{2 \cdot (-4) + 3 \cdot 16}{2 + 3} = 8.$$

Ответ: $x_0 = 8$.

3. Уравнение отрезка, лежащего на координатной оси

Пусть точка x_0 делит отрезок $[x_1; x_2]$, лежащий на оси Ox, в отношении $m : n$, считая от точки x_1. Тогда

$$x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} = \frac{n}{n + m}x_1 + \frac{m}{n + m}x_2.$$

Если положить $t = \dfrac{m}{n + m}$, то

$$1 - t = 1 - \frac{m}{n + m} = \frac{n}{n + m}.$$

Отсюда

$$x_0 = \frac{n}{n + m}x_1 + \frac{m}{n + m}x_2 = (1 - t)x_1 + tx_2,$$

то есть

$$x_0 = (1 - t)x_1 + tx_2,$$

где $0 \le t \le 1$.

Рассматривая t как параметр, получаем зависимость между его значениями и точками отрезка $[x_1; x_2]$. При этом каждому $t \in [0; 1]$ соответствует определённая точка отрезка $x(t) \in [x_1; x_2]$, причём

$$x(0) = x_1, \quad x(1) = x_2.$$

Определение 2. Формула вида

$$x(t) = (1 - t)x_1 + tx_2, \qquad (3)$$

где $0 \le t \le 1$, называется *параметрическим уравнением отрезка* $[x_1; x_2]$ оси Ox.

Пример 2. Отрезок $[-2; 7]$ оси Ox задаётся уравнением

$$x(t) = -2 \cdot (1 - t) + 7t,$$

где $0 \le t \le 1$. Отсюда можем записать $x(t) = 9t - 2$, где $0 \le t \le 1$.

4. Расстояние между точками на плоскости

Определение 3. *Расстояние между точками* $A(x_1; y_1)$ *и* $B(x_2; y_2)$ *на плоскости* (см. рис. 2) определяется равенством

$$\rho(A, B) = \sqrt{\rho(x_1, x_2)^2 + \rho(y_1, y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (4)$$

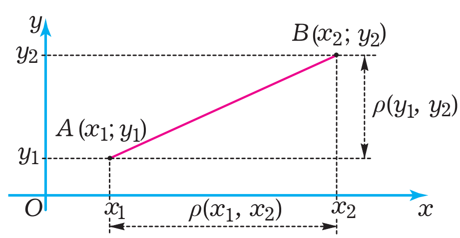


Рис. 2

Пример 3. Пусть $A(-2; 5)$ и $B(4; -3)$. Тогда по формуле (4) получаем

$$\rho(A, B) = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

5. Деление отрезка на плоскости в данном отношении

Найдём точку $C(x_0; y_0)$, делящую отрезок AB в отношении $m : n$, считая от точки A.

Учитывая, что проекции отрезка делятся в том же отношении, что и сам отрезок (см. рис. 3), из равенств

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\rho(x_1, x_0)}{\rho(x_0, x_2)} = \frac{|x_0 - x_1|}{|x_2 - x_0|} = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{m}{n}$$

и

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\rho(y_1, y_0)}{\rho(y_0, y_2)} = \frac{|y_0 - y_1|}{|y_2 - y_0|} = \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_0} = \frac{m}{n}$$

получаем

$$x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m}, \quad y_0 = \frac{ny_1 + my_2}{n+m}. \quad (5)$$

Пример 4. Пусть $A(-2; 3)$, $B(4; -8)$. Найти точку $C(x_0; y_0)$, делящую отрезок AB в отношении $m : n = 2 : 1$, считая от точки A.

Решение. Так как $m = 2$, $n = 1$, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $y_1 = 3$, $y_2 = -8$, то из формул (5) получаем:

$$x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m} = \frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4}{1+2} = 2,$$

$$y_0 = \frac{ny_1 + my_2}{n+m} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot (-8)}{1+2} = -\frac{13}{3}.$$

Ответ: $C\left(2; -\frac{13}{3}\right)$.

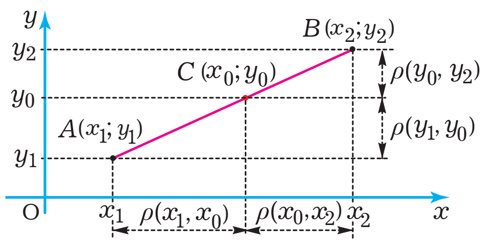


Рис. 3

6. Параметрические уравнения отрезка на плоскости

Пусть точка $C(x_0; y_0)$ делит отрезок AB в отношении $m : n$, считая от точки A. Тогда получаем:

$$x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m} = \frac{n}{n+m}x_1 + \frac{m}{n+m}x_2 = (1-t)x_1 + tx_2,$$

$$y_0 = \frac{ny_1 + my_2}{n+m} = \frac{n}{n+m}y_1 + \frac{m}{n+m}y_2 = (1-t)y_1 + ty_2,$$

где $t = \frac{m}{n+m}$ и $1 - t = \frac{n}{n+m}$.

Рассматривая t как параметр, получаем, что каждому значению $t \in [0; 1]$ по формулам

$$x(t) = (1-t)x_1 + tx_2,$$
$$y(t) = (1-t)y_1 + ty_2$$

соответствует некоторая точка $\big(x(t); y(t)\big)$ отрезка AB.

При $t = 0$ получаются координаты точки $A(x_1; y_1)$: $x(0) = x_1$, $y(0) = y_1$.

При $t = 1$ получаются координаты точки $B(x_2; y_2)$: $x(1) = x_2$, $y(1) = y_2$.

Отрезок является геометрическим местом точек $\big(x(t); y(t)\big)$, где $t \in [0; 1]$.

Определение 4. Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ – точки на координатной плоскости Oxy. *Параметрическими уравнениями отрезка* AB

(на плоскости Oxy) называются формулы вида

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)x_1 + tx_2, \\ y(t) = (1-t)y_1 + ty_2, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases} \qquad (6)$$

Пример 5. Для точек $A(-2;\ 3)$, $B(4;-8)$ параметрические уравнения отрезка AB имеют вид:

$$\begin{cases} x(t) = -2(1-t) + 4t, \\ y(t) = 3(1-t) - 8t, \\ 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

что можно записать в виде

$$\begin{cases} x(t) = 6t - 2, \\ y(t) = -11t + 3, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

7. Неравенство треугольника для трёх точек плоскости

Пусть даны три точки плоскости $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ и $C(x_3;\ y_3)$. По формуле (4)

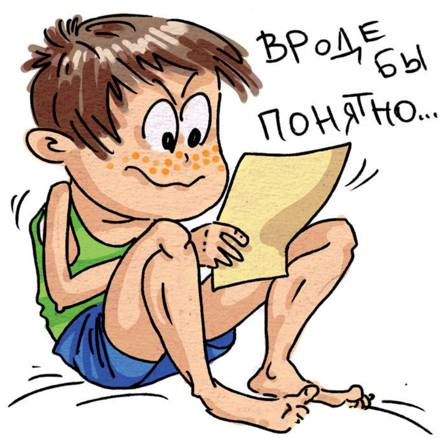
$$\rho(A,\ B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$\rho(B,\ C) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \text{ и}$$

$$\rho(A,\ C) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}.$$

Для сторон треугольника ABC выполняется соотношение, называемое *неравенством треугольника*:

$$\rho(A,\ B) + \rho(B,\ C) \ge \rho(A,\ C). \qquad (7)$$



8. Уравнение отрезка в радикалах

Дадим геометрическую интерпретацию следующему уравнению:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \\ + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = \\ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \qquad (8)$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 – заданные числа, причём $x_1 \ne x_2$ и $y_1 \ne y_2$ одновременно.

Для этого рассмотрим в некоторой прямоугольной системе координат Oxy точки $M(x;\ y)$, $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$. Тогда каждое выражение, входящее в формулу (8),

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2},$$

$$\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \text{ и}$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

можно интерпретировать как расстояние между точками M и A, M и B, A и B соответственно.

Из неравенства треугольника имеем $AM + MB \ge AB$. Соответственно равенство $AM + MB = AB$ выполняется тогда и только тогда, когда точка M принадлежит отрезку AB. Следовательно, этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек отрезка AB. Поэтому уравнение (8) можно условно назвать «*уравнением отрезка в радикалах*».

Пример 6. Определить наименьшее значение выражения:

$$f(x,\ y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5} + \\ + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13}.$$

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$f(x,y)=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}.$$

Рассмотрим в системе координат Oxy точки $M(x;y)$, $A(-1;-2)$, $B(2;3)$. Тогда $\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$ можно интерпретировать как расстояние между точками M и A, а $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$ – как расстояние между точками M и B.

Тогда $f(x,y)=AM+MB$. В соответствии с неравенством треугольника

$$AM+MB\ge AB,$$

где $AM+MB=AB$ только в случае, если точка M принадлежит отрезку AB. Значит, наименьшее значение суммы $AM+MB$ будет равно длине отрезка AB:

$$AB=\sqrt{(2-(-1))^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{34}.$$

Ответ: $\sqrt{34}$.

9. Использование уравнений отрезка при решении задач

Пример 7. (МИОО, 2011) Найти все значения параметра a, при каждом из которых следующая система имеет более одного решения:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y+3a)^2}=|a|\sqrt{10},\\ y=ax+a^2-9.\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим систему координат Oxy.

Левая часть первого уравнения системы представляет собой сумму расстояний от начала координат O до точки $M(x;y)$ и от точки M до точки $A(a;-3a)$, а правая часть – расстояние между точками O и A:

$$OM=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$MA=\sqrt{(x-a)^2+(y+3a)^2},$$
$$OA=|a|\sqrt{10}.$$

Так как $OM+MA=OA$, то это равенство возможно тогда и только тогда, когда точка M лежит на отрезке OA.

При $a=0$ точка A совпадает с началом координат O и данная система уравнений не имеет решений, поскольку имеет вид

$$\begin{cases}2\sqrt{x^2+y^2}=0,\\ y=-9.\end{cases}$$

Пусть $a\ne 0$. Запишем параметрические уравнения отрезка OA (на плоскости):

$$\begin{cases}x(t)=(1-t)\cdot 0+t\cdot a,\\ y(t)=(1-t)\cdot 0+t\cdot(-3a),\\ 0\le t\le 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(t)=at,\\ y(t)=-3at,\\ 0\le t\le 1.\end{cases}$$

Исходная система будет иметь более одного решения, если при подстановке $x(t)$, $y(t)$ во второе уравнение исходной системы найдётся более одного значения $t\in[0;1]$ при решении полученного уравнения относительно t. Имеем:

$$-3at=a\cdot(at)+a^2-9\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a^2+3a)\cdot t=9-a^2.$$

Полученное линейное уравнение будет иметь более одного решения только в случае, если оно приводится к виду $0\cdot t=0$. Это возможно только при одновременном выполнении условий

$$\begin{cases}a^2+3a=0,\\ 9-a^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\quad a=-3.$$

Ответ: -3.

Пример 8. (МГУ, географический факультет, 1999) Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2} = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Второе уравнение системы для точек $M(x;\, y)$, $A(a;\, 0)$, $B(a;\, 3)$ в системе координат Oxy задаёт отрезок AB. В этом случае $\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ можно интерпретировать как расстояние между точками M и A, а $\sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2}$ – как расстояние между точками M и B. Так как расстояние между точками A и B равно 3, то точка M лежит на отрезке AB.

Запишем параметрические уравнения отрезка AB (на плоскости Oxy):

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)a + ta, \\ y(t) = (1-t)\cdot 0 + t\cdot 3, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = a, \\ y(t) = 3t, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Подставляя $x(t)$, $y(t)$ в первое уравнение данной в условии системы, получаем уравнение

$$9t^2 - 3(2a+1)t + a^2 + a - 2 = 0,$$

корнями которого являются числа

$$t_1 = \frac{a-1}{3} \text{ и } t_2 = \frac{a+2}{3}.$$

Условие $0 \le t_1 = \dfrac{a-1}{3} \le 1$ выполняется при $1 \le a \le 4$, а условие $0 \le t_2 = \dfrac{a+2}{3} \le 1$ выполняется при $-2 \le a \le 1$.

Так как числа $\dfrac{a-1}{3}$ и $\dfrac{a+2}{3}$ различны при всех значениях a, то получаем, что единственное решение будет только при $a \in [-2;\, 1) \cup (1;\, 4]$.

Ответ: $a \in [-2;\, 1) \cup (1;\, 4]$.

Пример 9. (МФТИ, 2008) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} = 5, \\ 4x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$$

Решение. Запишем первое уравнение системы в виде

$$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 5.$$

Пусть $M(x;\, y)$ – точка координатной плоскости Oxy, тогда левая часть этого уравнения есть сумма расстояний от точки M до точек $A(-3;\, 0)$ и $B(0;\, 4)$.

Так как расстояние между точками A и B равно 5, то координаты точки M удовлетворяют первому уравнению системы в том и только в том случае, когда M лежит на отрезке AB (неравенство треугольника).

Запишем параметрические уравнения отрезка AB (на плоскости):

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)\cdot(-3) + t\cdot 0, \\ y(t) = (1-t)\cdot 0 + t\cdot 4, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 3t - 3, \\ y(t) = 4t, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Исходная система будет иметь решение, если при подстановке $x(t), y(t)$ в её второе уравнение при решении полученного уравнения относительно t найдутся значения $t \in [0; 1]$. Имеем:

$$\begin{cases} 4(3t-3)^2-(4t)^2=5, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20t^2-72t+31=0, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=0,5, \\ t=3,1, \end{array}\right. \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Отсюда $t=0,5$. Тогда

$$x=3\cdot(0,5)-3=-1,5, \quad y=4\cdot(0,5)=2.$$

Ответ: $(-1,5; 2)$.

Пример 10. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+25+10x}+\sqrt{x^2+y^2+144-24y}=13, \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет два решения.

Решение. Запишем первое уравнение системы в виде

$$\sqrt{(x+5)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-12)^2}=13.$$

Пусть $M(x; y)$ – точка координатной плоскости Oxy, тогда левая часть этого уравнения есть сумма расстояний от точки M до точек $A(-5; 0)$ и $B(0; 12)$. Так как расстояние между точками A и B равно 13, то в соответствии с неравенством треугольника координаты точки M удовлетворяют первому уравнению системы в том и только в том случае, когда M лежит на отрезке AB.

Запишем параметрические уравнения отрезка AB (на плоскости):

$$\begin{cases} x(t)=(1-t)\cdot(-5)+t\cdot 0, \\ y(t)=(1-t)\cdot 0+t\cdot 12, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t)=5t-5, \\ y(t)=12t, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Исходная система будет иметь два решения, если при подстановке $x(t), y(t)$ в её второе уравнение при решении полученного уравнения относительно t найдутся два значения $t \in [0; 1]$. Имеем:

$$\begin{cases} (5t-5)^2+(12t)^2=a^2, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 169t^2-50t-(a^2-25)=0, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Рассмотрим квадратный трёхчлен

$$f(t)=169t^2-50t-(a^2-25).$$

Так как $t_{\text{в}}=-\frac{(-50)}{2\cdot 169}=\frac{25}{169}$, $0<t_{\text{в}}<1$, то для существования двух корней на $[0; 1]$ достаточно выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} f(t_{\text{в}})<0, \\ f(0)\ge 0, \\ f(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2>\frac{144\cdot 25}{169}, \\ a^2-25\le 0, \\ a^2-144\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a|>\frac{12\cdot 5}{13}, \\ |a|\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{60}{13}<|a|\le 5.$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяют все a такие, что

$$\frac{60}{13}<|a|\le 5.$$

Ответ: $-5\le a<-\frac{60}{13}$, $\frac{60}{13}<a\le 5$.

Пример 11. Определить, при каких значениях параметра a координаты хотя бы одной точки отрезка AB будут являться решением системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x-y+a\le 0, \\ 6x+3y+5a\ge 0, \end{cases}$$

если $A(0;\,9)$ и $B(3;\,6)$.

Решение. Составим уравнения отрезка AB:

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)\cdot 0 + t\cdot 3, \\ y(t) = (1-t)\cdot 9 + t\cdot 6, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 3t, \\ y(t) = -3t + 9, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Подставляя $x(t)$, $y(t)$ в систему неравенств, получаем:

$$\begin{cases} 2\cdot 3t - (-3t+9) + a \le 0, \\ 6\cdot 3t + 3\cdot(-3t+9) + 5a \ge 0, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \le -9t + 9, \\ a \ge -1{,}8t - 5{,}4, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1{,}8t - 5{,}4 \le a \le -9t + 9, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases} \quad (9)$$

Условию задачи будут удовлетворять значения a, при которых прямая $a = const$ имеет общие точки с фигурой (см. рис. 4), заданной системой неравенств (9).

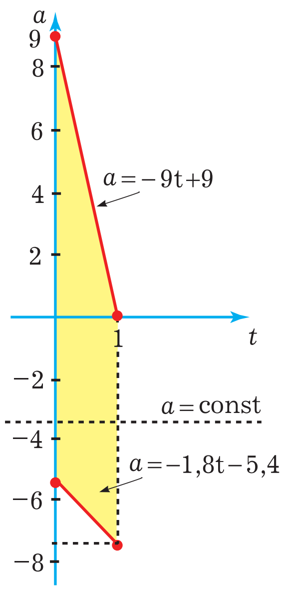


Рис. 4

В итоге получаем $-7{,}2 \le a \le 9$.

Ответ: $a \in [-7{,}2;\ 9]$.

Пример 12. (МФТИ, 2005) Найти значения параметра a, при которых множество решений $(x;\,y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + x + (y-a)^2 \le 11, \\ x + a + y^2 \le 0 \end{cases}$$

содержит отрезок с концами в точках $(1;\,0)$ и $(1;\,1)$.

Решение. В данном случае параметрические уравнения отрезка с концами в точках $(1;\,0)$ и $(1;\,1)$ имеют вид

$$\begin{cases} x(t) = 1, \\ y(t) = t, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Подставляя $x(t)$, $y(t)$ в систему неравенств, получаем:

$$\begin{cases} (t-a)^2 \le 9, \\ 1 + a + t^2 \le 0, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 3 \le a \le t + 3, \\ a \le -1 - t^2, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases} \quad (10)$$

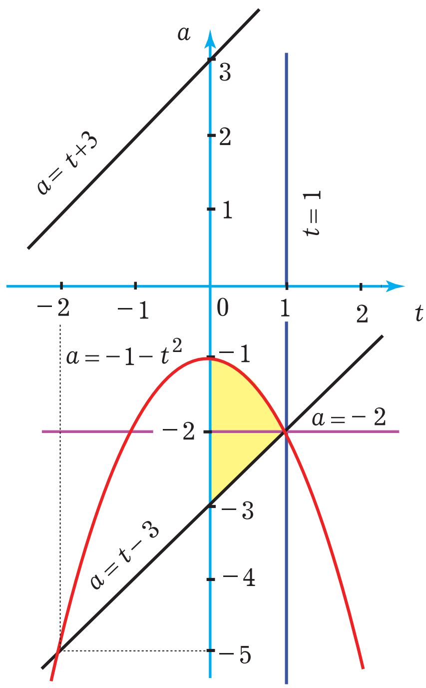


Рис. 5

На рис. 5 выделено фоном геометрическое множество точек, координаты $(t; a)$ которых удовлетворяют всем неравенствам системы (10). Проводя прямые $a = const$ и учитывая, что графики $a = -1 - t^2$, $a = t - 3$ и $t = 1$ пересекаются в точке $(1; -2)$, получаем, что все $t \in [0; 1]$ удовлетворяют всем неравенствам системы (10) только при $a = -2$.

Ответ: $a = -2$.

В заключение хочется отметить, что параметрические уравнения отрезка можно весьма эффективно применять при решении геометрических задач координатным методом. В частности, при нахождении отношения, в котором секущая плоскость делит ребра многогранника. Для этого потребуется лишь ввести параметрические уравнения отрезка в пространстве.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определите наибольшее значение выражения

$$f(x, y) = 13 - \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10} - \sqrt{x^2 + y^2 - 10x - 10y + 50}.$$

2. (МГУ, географический факультет, 1999) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2} = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

3. Определите, при каких значениях параметра a координаты хотя бы одной точки отрезка AB будут являться решением системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x + y - 2a \ge 0, \\ 2y - 5x - a \le 0, \end{cases}$$

если $A(2;2)$ и $B(4;8)$.

4. (МФТИ, 2005) Найдите значения параметра a, при которых множество решений $(x; y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} (x-a)^2 + x + y^2 \le 3, \\ x - a + y^2 \le 0 \end{cases}$$

содержит отрезок с концами в точках $(1; 0)$ и $(1; 1)$.

5. (МФТИ, 2008) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 12x + 36} + \sqrt{x^2 + y^2 - 16y + 64} = 10, \\ 5y^2 - 8x^2 = 8. \end{cases}$$

6. (МГУ, факультет ВМК, 1996) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

7. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 64 + 16x} + \sqrt{x^2 + y^2 + 36 - 12y} = 10, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет два решения.

Ответы

1. 3. **2.** $a \in [-1; 3) \cup (3; 7]$.

3. $a \in [-6; 8]$. **4.** $a = 2$. **5.** $(-3; 4)$.

6. $x = \dfrac{217 - 5\sqrt{415}}{29}$, $y = \dfrac{180 + 2\sqrt{415}}{29}$.

7. $-6 \le a < -4{,}8$, $4{,}8 < a \le 6$.