Власова Нина Валентиновна
Учитель математики в МОУ «Гимназия №1» г. Белгорода, Почётный работник общего образования РФ, победитель конкурсного отбора «Лучшие учителя» в рамках ПНПО 2007 г.

Уравнение касательной

В школе учащиеся знакомятся с понятием касательной на уроках геометрии (касательная к окружности). В старших классах рассматривается касательная к гладкой кривой и выводится уравнение касательной, проведённой к кривой в заданной точке.

В статье рассмотрены 5 типичных задач, которые предлагаются при изучении темы «Уравнение касательной».

Задача 1. Найти уравнение касательной в точке $M(-1;-4)$ графика функции $f(x)=x^3-3x^2$.

Решение. Имеем: $f'(x)=3x^2-6x$, $f'(-1)=3+6=9$. Поэтому

$$y=9(x+1)-4=9x+5$$

является искомым уравнением касательной.

Задача 2. Найти уравнение касательной к параболе $y=-x^2+6x-6$, проходящей через точку $A(4;\ 6)$.

Решение. Точка A не принадлежит параболе, так как $-4^2+6\cdot 4-6\neq 6$. Пусть x_0 – абсцисса точки касания, тогда

$$f(x_0)=-x_0^2+6x_0-6,\ \text{а}$$
$$f'(x_0)=-2x_0+6,$$

и уравнение искомой касательной принимает вид

$$y=(-2x_0+6)(x-x_0)-x_0^2+6x_0-6.$$

Так как эта касательная должна содержать заданную точку $(4;\ 6)$, то пара чисел $x=4$ и $y=6$ удовлетворяет уравнению

$$-6=(-2x_0+6)(4-x_0)=x_0^2+6x_0-6.$$

Таким образом, $x_0^2-8x_0+12=0$ и, следовательно, $x_0=6$ или $x_0=2$.

Если $x_0=6$, то уравнение касательной примет вид $y=-6x+30$; если $x_0=2$, то уравнение касательной $y=-2x-2$.

Ответ: через данную точку можно провести две касательные:

$$y=-6x+30\ \text{ и }\ y=-2x-2.$$

Задача 3. Найти уравнения касательных к графику функции $f(x)=x^3-$ $-2x^2$, параллельных прямой $y=-x+3$.

Решение. Поскольку искомые касательные параллельны прямой с угловым коэффициентом -1, то для абсциссы точки касания x_0 имеем уравнение $f'(x_0)=-1$. Так как $f'(x_0)=$ $=3{x_0}^2-4x_0$, то $3{x_0}^2-4x_0=-1$. Отсюда находим, что $x_0=1$ или $x_0=\frac{1}{3}$.

а) Если $x_0=1$, то $f(1)=1-2=-1$ и для касательной получаем уравнение

$$y=-(x-1)-1=-x.$$

б) Если $x_0=\frac{1}{3}$, то $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{27}$ и в этом случае получаем уравнение второй касательной

$$y=-(x-\frac{1}{3})-\frac{5}{27}=-x+\frac{4}{27},$$

параллельной прямой $y=-x+3$.

Ответ: $y=-x+\frac{4}{27}$; $y=-x$.

Задача 4. Найти уравнение касательной к графику функции $y=0{,}5x^2-3x+1$, образующей с прямой $y=0$ угол в 45°.

Решение. Так как угловой коэффициент искомой касательной равен $\operatorname{tg}45^\circ=1$, то для нахождения точки касания имеем уравнение $f'(x_0)=1$, то есть $x_0-3=1$. Отсюда $x_0=4$ и $y=(x-4)+(8-12+1)=x-7$.

Ответ: $y=x-7$.

Задача 5. При каких значениях параметра p прямая $y=px-5$ касается параболы $y=3x^2-4x-2$?

Решение. Графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ касаются в точке с абсциссой $x=x_0$ (то есть имеют общую касательную) только тогда, когда система

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0), \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases}$$

имеет решение.

Поэтому, чтобы данная парабола и прямая касались при $x=x_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} 3x_0^2-4x_0-2=px_0-5, \\ 6x_0-4=p. \end{cases}$$

Исключая из этой системы p, получаем $3x_0-3=0$. Следовательно, $x_0=1$ или $x_0=-1$ и соответствующие значения $p_1=2$, $p_2=-10$.

Ответ: 2 и -10.

Решение многих других задач сводится к решению одной или нескольких разобранных выше основных задач. Рассмотрим некоторые примеры.

Задача 6. Найти уравнения касательных к параболе $f(x)=x^2-5x-1$, которые пересекаются под прямым углом, и одна из них касается параболы в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение. Так как $f(1)=-5$ и $f'(1)=-3$, то уравнение касательной к параболе в точке с абсциссой $x=1$ имеет вид $y=-3(x-1)-5=-3x-2$. Заметим, что две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ перпендикулярны только тогда, когда $k_1\cdot k_2=-1$. И поэтому уравнение второй касательной имеет вид

$$y=\frac{1}{3}(x-x_0)+f(x_0) \text{ и } f'(x_0)=\frac{1}{3}.$$

Так как $f'(x)=2x-5$, то $2x_0-5=\frac{1}{3}$; следовательно, $x_0=\frac{8}{3}$ – абсцисса точки касания второй касательной. Кроме того, $f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{64}{9}-\frac{40}{3}-1=-\frac{65}{9}$, и поэтому искомое уравнение второй касательной

$$y=\frac{1}{3}(x-1)-\frac{65}{9}=\frac{1}{3}x-\frac{68}{9}.$$

Ответ: $y=-3x-2$; $y=\frac{1}{3}x-\frac{68}{9}$.

Задача 7. Найти уравнение общей касательной к параболам

$$f(x)=x^2+2x \text{ и } g(x)=x^2-4x.$$

Решение. Задача сводится к нахождению абсцисс точек касания общей касательной с данными параболами.

Пусть x_1 – абсцисса точки касания искомой прямой с параболой $y=f(x)$, а x_2 – абсцисса точки её касания с параболой $y=g(x)$.

Так как $f'(x)=2x+2$, $g'(x)=2x-4$ и касательная – общая к двум параболам, то имеет место равенство $2x_1+2=2x_2-4$, поэтому $x_1=x_2-3$.

Кроме того, уравнение касательной к параболе $y=f(x)$ имеет вид

$$y=(2x_1+2)(x-x_1)+x_1^2+2x_1=(2x_1+2)x-x_1^2,$$

а для уравнения к параболе $y=g(x)$ получаем $y=(2x_2-4)(x-x_2)+x_2^2-4x_2=(2x_2-4)x-x_2^2$.

Так как эти два уравнения задают одну и ту же прямую, то $x_1^2=x_2^2$. Имеем две возможности: $x_1=x_2$ или $x_1=-x_2$. Равенство $x_1=x_2-3$ возможно только во втором случае. Имеем $x_1=-x_1-3$, то есть $x_1=\frac{-3}{2}$ и $x_2=\frac{3}{2}$.

Ответ: $y=-x-\frac{9}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти уравнения касательных к параболе $f(x)=x^2-4x$, проходящих через точку $A(-2;11)$.

Ответ: $y=-6x-1$; $y=-10x-9$.

2. На графике функции $y=x^2-x+1$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой $y-3x+1=0$.

Ответ: $M(2;3)$.

3. Найти уравнения общих касательных к графикам функций

$$y=x^2-x+1 \text{ и } y=2x^2-x+0{,}5.$$

Ответ: $y=-3x$; $y=x$.

4. При каких значениях параметра a прямая $y=ax+1$ является касательной к графику функции $y=\sqrt{2x-1}$?

Ответ: $a=\sqrt{2}-1$.

5. Найти уравнения касательных к графику функции $y=\sqrt{4x-3}$, которые проходят через точку $A(2;3)$.

Ответ: $y=2x-1$, $y=\frac{2}{5}x+\frac{11}{5}$.

6. Найти уравнение касательной к графику функции $y=e^{2x-1}$, параллельной прямой $y=2x+7$.

Ответ: $y=2x$.

7. Найти уравнения касательных к графику функции $y=\frac{x}{x-1}$, перпендикулярных прямой $y=4x+3$.

Ответ: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$, $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$.

8. Найти расстояние между касательными к графику функции

$$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+5,$$

параллельными оси абсцисс.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

9. При каких значениях параметра p через точку $A(p;-1)$ можно провести три различные касательные к графику функции $y=x^3-3x^2+3$?

Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(1\frac{2}{3};\,2\right)\cup(2;\,+\infty)$.

Литература

1. *Карп А.П.* Сборник задач по алгебре и началам анализа. – М.: Просвещение, 1999.

2. *Мордкович А.* Семинар четвёртый для молодых учителей. – М.: «Математика», №21/94.

3. *Потапов М.К., Шевкин А.В.* Алгебра и начала анализа. Дидактические материалы для 11 класса. – М.: Просвещение, 2007.