Попов Сергей Вячеславович
Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Института математики и информатики Якутского государственного университета им. М.К. Аммосова, заслуженный деятель науки Республики Саха (Якутия), лауреат Государственной премии Республики Саха (Якутия) по педагогике им. М.А. Алексеева 2007 года, председатель жюри Международной олимпиады школьников «Туймаада» по математике.

Избранные задачи международной олимпиады «Туймаада» по математике

В этом году будет проходить XV Международная олимпиада «Туймаада». Согласно положению до 1999 года олимпиада по математике проходила для одной возрастной категории, а с 2000 года — проходит по двум возрастным категориям и включает в себя два тура. В младшей лиге, как правило, участвуют учащиеся 8–9 классов, или школьники до 16 лет, а в старшей лиге — учащиеся 10–11 классов общеобразовательных школ. Время проведения каждого тура — 5 часов. В каждом туре школьникам предлагается решить 4 задачи. Отбор задач и составление олимпиадных заданий, несомненно, представляли одну из самых трудных и важных частей работы по организации олимпиад «Туймаада». До 1997 года, как правило, авторами задач являлись преподаватели ЯГУ А. Семёнов, И. Дмитриев, И. Егоров, М. Семёнов, В. Егоров, Е. Софронов. Следует, однако, иметь в виду, что часто бывает очень нелегко назвать автора той или иной задачи, поскольку в процессе обсуждения задача обычно уточняется, а иногда и обобщается, получает другую формулировку и новое решение.

К олимпиадным задачам «Туймаада» предъявлялись очень высокие требования. Они должны были быть красивыми и интересными с математической точки зрения, их формулировки — яркими и запоминающимися, а решение по возможности основываться на оригинальных и новых идеях. Начиная с 4-й олимпиады «Туймаада» (1997 год), авторами задач являлись аспиранты и преподаватели различных вузов России, члены жюри Российской математической олимпиады школьников, известные в России композиторы математических задач.

Большинство задач, приведённых ниже, были придуманы в последние десять лет. Их авторами являются С. Берлов (Санкт-Петербург), А. Голованов (Санкт-Петербург), V. Cîrtoaje (Румыния), А. Храбров (Санкт-Петербург), А. Смирнов (Санкт-Петербург), Д. Фон-Дер-Флаасс (Новосибирск), И. Шарыгин (Москва).

Призёрами и победителями олимпиад от Якутии в разные годы были Еттянова Дарья, Лукин Василий, Туласынов Михаил, Местников Андрей, Захаров Павел, Афанасьев Алексей, Давыдов Александр, Максимов Николай, Яковлев Пётр, Титов Александр, Хмелёв Роман, Тихонова Анна, Тихонова Галина, Тихонов Иннокентий, Баишев Максим, Избеков Эрчимэн, Соров Ньургун, Молчанова Анастасия, Атласова Мария, ставшие впоследствии студентами ЯГУ, МГУ, СПбГУ, НГУ, МФТИ и других центральных вузов РФ. Несомненно то, что Якутия будет гордиться тем, что родилось в 1994 году, — нашими олимпиадами «Туймаада».

Задачи для 8–9 классов

Задача 1. Даны два натуральных числа $a < b$. Докажите, что из любых b последовательных натуральных чисел можно выбрать два числа, произведение которых делится на ab.

Решение. Очевидно, что среди b последовательных натуральных чисел найдётся число, кратное b, и число, кратное a. Если эти два числа различны, то они удовлетворяют требованию задачи. Предположим теперь, что эти два числа совпадают и обозначим их через x. Пусть $d = (a,b)$, $a = da_1$ и $b = db_1$. Тогда x делится на $[a,b] = da_1b_1$. Поскольку $b_1 > a_1$, то $b_1 \geqslant 2$ и, следовательно, $b \geqslant 2d$. Поэтому среди b последовательных чисел найдутся как минимум два числа, кратные d. Хотя бы одно из них отлично от x; обозначим его через y. Тогда $x \cdot y$ делится на $da_1b_1 \cdot d = ab$, что и требовалось.

Задача 2. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все натуральные числа так, чтобы любые два натуральных числа, отличающиеся в 4 или 8 раз, были покрашены в разные цвета?

Ответ. В три цвета.

Решение. Докажем, что двух цветов недостаточно. Предположим, что нашлась раскраска в два цвета. В цепочке 1, 8, 2, 16, 4 каждые два последовательных числа отличаются в 4 или 8 раз, значит, цвета в ней чередуются. Но тогда числа 1 и 4 покрашены в одинаковый цвет — противоречие.

Опишем две различные раскраски натуральных чисел в три цвета, удовлетворяющие условию задачи.

1. Разобьём весь натуральный ряд на отрезки вида $[4^n, 4^{n+1} - 1]$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Покрасим все числа такого отрезка в красный цвет при $n \equiv 0 \pmod 3$, в синий — при $n \equiv 1 \pmod 3$ и в чёрный — при $n \equiv 2 \pmod 3$. Любые два числа, отличающиеся в 4 раза, попадут в соседние отрезки; любые два числа, отличающиеся в 8 раз, попадут либо в соседние отрезки, либо на отрезки, расположенные через один.

2. Представим каждое натуральное число в виде $2^k \cdot m$, где m — нечётное число, и покрасим его в красный цвет при $k \equiv 0, 1 \pmod 6$, в синий при $k \equiv 2, 3 \pmod 6$ и в чёрный при $k \equiv 4, 5 \pmod 6$. У любых двух чисел, отличаю-

щихся в 4 или 8 раз, соответствующие им k отличаются на 2 или на 3, поэтому такие числа будут покрашены в разные цвета.

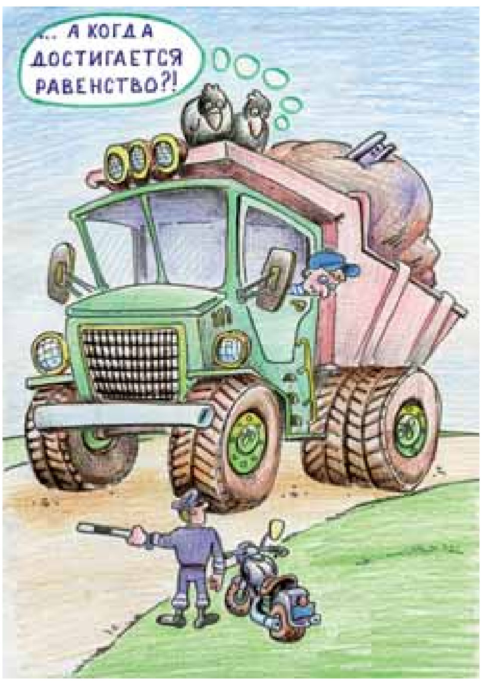
Задача 3. Несовпадающие квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ отличаются друг от друга перестановкой коэффициентов. Может ли оказаться, что $f(x) \geqslant g(x)$ при всех вещественных x?

Ответ. Да, такое возможно.

Решение. Например, подойдут многочлены $f(x) = 2x^2 + x + 3$ и $g(x) = x^2 + 3x + 2$. Очевидно, $f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$.

Задача 4. Сумма неотрицательных чисел x, y и z равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{x^2+y+z} + \frac{1}{x+y^2+z} + \frac{1}{x+y+z^2} \leqslant 1.$$



Решение. Заметим, что числа x, y и z не превосходят 3. Установим неравенство

$$\frac{1}{x^2+y+z} = \frac{1}{x^2-x+3} \leqslant \frac{4-x}{9}. \quad (1)$$

Действительно, после домножения на знаменатели и приведения подобных слагаемых придём к очевидному неравенству

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-3)(x-1)^2 \leqslant 0.$$

Сложив неравенство (1) с двумя аналогичными, получим требуемое.

Задача 5. При каких натуральных $n \geqslant 3$ числа от 1 до n можно расставить по кругу так, чтобы каждое число не превосходило 60% суммы двух своих соседей?

Ответ. При $n \geqslant 9$.

Решение. Предположим, что числа от 1 до n удалось расставить требуемым образом. Обозначим соседей числа n через a и b. Очевидно, что

$$a + b \leqslant (n-1) + (n-2) = 2n - 3.$$

Тогда по условию $n \leqslant 0{,}6(a+b) \leqslant 0{,}6(2n-3)$, откуда $n \geqslant 9$.

Несложно проверить, что при $n \geqslant 9$ числа можно расставить указанным способом. Например, при $n = 2k$ подходит расстановка $1, 3, 5, \ldots, 2k-3, 2k-1, 2k, 2k-2, \ldots, 6, 4, 2$, а при $n = 2k+1$ — расстановка $1, 3, 5, \ldots, 2k-1, 2k+1, 2k, 2k-2, \ldots, 6, 4, 2$.

Задача 6. Через точку K, лежащую вне окружности ω, проведены касательные KB и KD к этой окружности (B и D — точки касания) и прямая, пересекающая окружность в точках A и C. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок AC в точке E и окружность ω в точке F. Докажите, что $\angle FDE = 90°$.

Решение. Можно считать, что точка A лежит между K и C. Заметим, что треугольники KBA и KCB подобны по двум углам: они имеют общий угол A и $\angle KBA = \frac{1}{2}\smile AB = \angle ACB$. Следовательно, $AB/BC = KB/KC$. Аналогично можно получить, что $AD/DC = KD/KC$. Поэтому $AB/BC = AD/DC$, ибо $KB = KD$.

Поскольку отношение двух сторон треугольника равно отношению отрезков, на которые биссектриса угла между ними делит противоположную сторону, $AE/EC = AB/BC$. Но тогда $AE/EC = AD/DC$, стало быть, DE — биссектриса угла ADC. Продолжим отрезок DE за точку E до пересечения с окружностью ω. Обозначим точку пересечения через G. Ясно, что биссектриса вписанного угла пересекает окружность в середине дуги, на которую опирается этот угол. Значит, точка F — середина дуги ADC, а G — середина дуги ABC. Таким образом, F и G — диаметрально противоположные точки окружности, и опирающийся на диаметр вписанный угол FDG — прямой.

Задачи для 10–11 классов

Задача 7. Найдите прямоугольный треугольник, который можно разрезать на 365 одинаковых треугольников.

Решение. Известно, что если все стороны прямоугольного треугольника разбить на n равных частей и провести прямые, параллельные трём сторонам, через точки разбиения, то получим n^2 маленьких и равных друг другу треугольников, подобных исходному, с коэффициентом подобия n. Поскольку $365 = 13^2 + 14^2$, возьмём прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 13$ и $CB = 14$ и проведём высоту CD. Отметим, что треугольники ACD и CBD подобны. Стороны треугольника ACD разобъём на 13 частей, а второго — на 14 частей. Очевидно, получим требуемые 365 равных друг другу треугольников.

Задача 8. Решите уравнение

$$(x^3 - 1000)^{1/2} = (x^2 + 100)^{1/3}.$$

Ответ. 5.

Решение. Докажем справедливость следующего утверждения: все действительные корни исходного уравнения будут корнями уравнения $x^3 - 100 = x^2$. В самом деле, если $x^3 - 100 < x^2$, то $x^3 < x^2 + 100$, то есть

$$(x^3 - 100)^{1/2} < x < (x^2 + 100)^{1/3}.$$

Совершенно аналогично рассматривается случай $x^3 - 100 > x^2$. Итак, $x^3 - x^2 - 100 = 0$, то есть

$$(x - 5)(x^2 + 4x + 20) = 0,$$

откуда получим один действительный корень $x = 5$.

Задача 9. В стране 2000 городов, из каждого из которых ведут ровно три дороги в другие города. Докажите, что можно закрыть 1000 дорог так, чтобы в стране не осталось ни одного замкнутого маршрута, состоящего из нечётного числа дорог.

Решение. *Способ 1.* Поскольку из каждого города выходят три дороги, а каждая дорога выходит из двух городов, общее количество городов в стране равно $3 \cdot 2000/2 = 3000$. Это значит, что после закрытия 1000 дорог в стране останется 2000 дорог — столько же, сколько городов.

Разобьём сеть дорог на максимальные связные куски, то есть выделим такие группы городов, внутри каждой из которых все города соединены идущими по дорогам маршрутами, а города из разных групп дорогами не связаны.

Предположим, что в таком куске (мы будем называть его «регионом», а сведущий читатель, вероятно, компонентой связности) имеется n городов. Тогда в нём — по соображениям, изложенным в начале решения, — $3n/2$ дорог. Докажем, что из них можно оставить ровно n так, чтобы все сохранившиеся внутри региона замкнутые маршруты имели чётную длину. Для этого выберем произвольный город, назначим его столицей региона — «городом ранга 0», а теперь изберём президента региона и выделим *президентскую сеть дорог*. Всем городам, соединённым с городом ранга 0, присвоим ранг 1 и включим в президентскую сеть дороги, соединяющие их со столицей. Если есть города, соединённые дорогами с городами ранга 1 и ещё не охваченные президентской сетью, присоединим их, для каждого назначив президентской одну из дорог, ведущих в вершины ранга 1. Эти города будут городами ранга 2. Дальше аналогичным образом определим города ранга 3. В конце этой процедуры каждый город региона будет включён в президентскую сеть и соединён со столицей кратчайшим маршрутом. Заметим, что, во-первых, в президентской сети нет замкнутых маршрутов (это неэкономно: если город уже включён в президетскую сеть, президент не станет строить в него вторую дорогу из городов меньшего ранга), во-вторых, в ней ровно $n-1$ дорога (так как каждой дороге соответствует ровно один город, отличный от столицы, — тот, в который она ведёт), и, в-третьих, ранги городов, соединённых любой (не обязательно президентской) дорогой, могут отличаться не более чем на 1 (ведь если город ранга k соединен с городом ранга большего, чем $k+1$, то получается, что министерство транспорта просмотрело второй город на $(k+1)$-м этапе строительства президентской сети).

Докажем, что к президентской сети можно добавить одну дорогу так, чтобы в ней появился ровно один замкнутый маршрут, который будет иметь чётную длину. Возьмём город наибольшего ранга k (то есть самый захолустный). Одна из ведущих в него дорог — президентская и ведёт в него из города ранга $k-1$. Если ещё хотя бы одна из двух оставшихся дорог, выходящих из этого города, ведёт в город ранга $k-1$, объявим её президентской. В противном случае обе эти дороги ведут в города ранга k. Тогда объявим президентскими обе эти дороги, самому городу присвоим новый ранг $k+1$, а старую президентскую дорогу, которая вела в этот город, выведем из президентской сети и закроем на вечный ремонт.

Теперь мы достигли следующего: в регионе имеется n президентских дорог — столько же, сколько городов — и каждая президентская дорога соединяет города, ранги которых отличаются на 1. Во время комфортабельного путешествия по президентским дорогам после проезда по каждой дороге меняется чётность ранга города; следовательно, в круговом турне чётности рангов посещаемых городов должны чередоваться, и замкнутый маршрут содержит чётное число дорог.

Объединяя президентские сети всех регионов, мы получим сеть дорог, в которой любой замкнутый маршрут по-прежнему содержит чётное число дорог (так как он не может выйти за пределы своего региона) и дорог столько же, сколько городов, то есть 2000. Эта сеть и будет требуемой.

Способ 2. Разобьём все города на два подмножества A и B таким образом, чтобы количество дорог, соединяющих города из разных подмножеств, было наибольшим.

Количество дорог, выходящих из любого города и ведущих в города из того же подмножества, не более 1. Действительно, если бы это было не так, то переместив этот город в другое подмножество, мы увеличили бы количество дорог между подмножествами. Таким образом, общее количество дорог, соединяющих города, принадлежащие одному подмножеству, не более 1000 (не более одной дороги на два города). Закроем их все. В любом замкнутом маршруте города подмножеств A и B будут чередоваться, а значит, количество дорог в этом маршруте — чётно.

Задача 10. Для любых положительных чисел a, b и c, удовлетворяющих условию $a^2+b^2+c^2=1$, докажите неравенство

$$\frac{a}{a^3+bc}+\frac{b}{b^3+ca}+\frac{c}{c^3+ab}>3.$$

Решение. Неравенство очевидно, если все числители больше соответствующих знаменателей. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $a^3+bc>a$. Тогда

$$(a^3+bc)(b^2+c^2)=(a^3+bc)(1-a^2)=$$

$$=a^3+bc-a^5-a^2bc=$$

$$=bc+a^2(a-a^3-bc)<bc.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{a^3+bc}>\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}=s.$$

Кроме того, по неравенству между средним арифметическим и средним гармоническим для двух чисел имеем

$$\frac{b}{b^3+ca}+\frac{c}{c^3+ab}=$$

$$=\frac{1}{b^2+ca/b}+\frac{1}{c^2+ab/c}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{4}{b^2+c^2+ab/c+ac/b}\geqslant\frac{4}{1+s}.$$

Осталось показать, что $s+4/(1+s)\geqslant 3$, что очевидно.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Поправка на суеверие

– Официант, мой завтрак стоит тринадцать шиллингов, а вы принесли счёт на четырнадцать!

– Виноват, сэр, но мне послышалось, будто Вы сказали своему другу, что очень суеверны, – не растерялся тот.

Из собрания С.А. Тихомировой