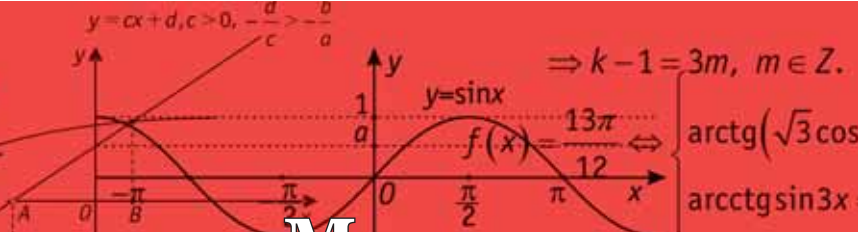


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



Математика



Дроздов Виктор Борисович
 Преподаватель физики Медицинского
 университета г. Рязани, кафедра физики.
 Почётная грамота Министерства
 просвещения СССР 1979 г.

Тригонометрические тождества

§ 1. Теорема Виета - один из способов получения тригонометрических тождеств

Как-то автор данной статьи записал известную со школьных лет формулу тангенса двойного угла

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

в виде квадратного уравнения относительно $\operatorname{tg} \alpha$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 2\operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0.$$

Оказалось, что как при $\alpha = 15^\circ$, так и при $\alpha = 105^\circ$ $\operatorname{ctg} 2\alpha = \sqrt{3}$. Следовательно, величины $\operatorname{tg} 15^\circ$ и $\operatorname{tg} 105^\circ$ являются корнями квадратного уравнения $y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = 0$, откуда по теореме Виета сразу получаем:

$$\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 105^\circ = -2\sqrt{3}, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 105^\circ = -1. \quad (2)$$

Тождество (2) совершенно тривиально, а вот тождество (1) хотя и довольно простое, но не очевидное. Выходит, нами только что найден алгебраический метод получения тригонометрических тождеств! Причём гораздо более сложных и красивых, чем тождество (1). Установим ещё ряд тождеств, но сначала выведем тригонометрические формулы тройного угла, а затем докажем теорему Виета для кубических уравнений.

Применим формулу тангенса суммы двух углов

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \quad (3)$$

и получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (4)$$

$$\text{и } \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + 2\alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha} =$$

$$= \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (5)$$

Пусть приведённое кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (6)$$

имеет корни x_1, x_2, x_3 . По теореме Безу левая часть уравнения (6) делится на линейные двучлены

$$x - x_1, x - x_2, x - x_3.$$

Поэтому справедливо тождество

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

или после перемножения скобок

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \\ &+ (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Многочлены равны при всех значениях аргумента тогда и только тогда, когда

равны их соответствующие коэффициенты, значит, верны равенства

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c. \end{cases} \quad (7)$$

Формулы (7) выражают теорему Виета для кубических уравнений.

Применим формулы (3)-(5) и (7) к тригонометрическим расчётам. При

$$\alpha = 10^\circ, \alpha = 50^\circ, \alpha = -70^\circ \quad \sin 3\alpha = \frac{1}{2},$$

поэтому из формулы (3) вытекает, что $\sin \alpha$ этих углов удовлетворяют равенству

$$3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha = \frac{1}{2},$$

т.е. $\sin 10^\circ, \sin 50^\circ$ и $-\sin 70^\circ$ – корни кубического уравнения

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0.$$

Следовательно, в силу формул (7) справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ &= 0, \\ -\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ + \sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ + \end{aligned}$$

$$+\sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{3}{4},$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{8}. \quad (8)$$

Интересно, что хотя $\sin 10^\circ, \sin 50^\circ, \sin 70^\circ$ в радикалах не выражаются, их приведённые выше алгебраические комбинации являются рациональными числами.

Ещё одна серия тождеств: возведём формулу (5) в квадрат:

$$\operatorname{tg}^2 3\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (3 - \operatorname{tg}^3 \alpha)^2}{(1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha)^2}.$$

При $\sin 20^\circ, \sin 40^\circ, \sin 80^\circ \quad \operatorname{tg}^2 3\alpha = 3.$

Обозначив $\operatorname{tg}^2 \alpha = y$, приходим к уравнению $y^3 - 33y^2 + 27y - 3 = 0.$

Итак,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 20^\circ + \operatorname{tg}^2 40^\circ + \operatorname{tg}^2 80^\circ &= 33, \\ \operatorname{tg}^2 20^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 40^\circ + \operatorname{tg}^2 20^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 80^\circ + \\ + \operatorname{tg}^2 40^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 80^\circ &= 27, \\ \operatorname{tg}^2 20^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 40^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 80^\circ &= 3. \end{aligned} \quad (9)$$

§ 2. Доказательство тригонометрических тождеств

Задача 1. Доказать, что

$$\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}. \quad (10)$$

Приведём стандартный способ его доказательства.

Решение.

Имеем:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} &= \\ = -\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} &= \\ = -\frac{2\sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{2\sin \frac{\pi}{7}} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{2\sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= -\frac{\sin \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{4\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$



А вот получить аналогичную формулу для синусов

$$\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8} \quad (11)$$

сложнее. Поэтому остановимся лишь на ключевых моментах, а промежуточные вычисления опустим. Выполните их сами. Сначала удобнее начать с преобразования выражения

$$8\sin^2 \frac{\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{7},$$

равного

$$\left(1 - \cos \frac{2\pi}{7}\right) \cdot \left(1 - \cos \frac{4\pi}{7}\right) \cdot \left(1 - \cos \frac{6\pi}{7}\right).$$

Раскроем скобки, заменим все произведения двух косинусов суммой косинусов, приведём подобные члены. В результате имеем:

$$\begin{aligned} & 8\sin^2 \frac{\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \\ & = 1 - \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \end{aligned}$$

откуда и вытекает формула (11). Заметим, что из формул (10) и (11) сразу следует, что

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

Следующую серию тригонометрических тождеств можно доказать одним, совсем не тривиальным, способом.

Задача 2. Доказать, что:

- а) $\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 22^\circ \cdot \operatorname{tg} 38^\circ \cdot \operatorname{tg} 42^\circ \cdot \operatorname{tg} 58^\circ \cdot \operatorname{tg} 62^\circ \cdot \operatorname{tg} 78^\circ \cdot \operatorname{tg} 82^\circ = 1;$
 б) $\operatorname{tg} 4^\circ \cdot \operatorname{tg} 16^\circ \cdot \operatorname{tg} 24^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 56^\circ \cdot \operatorname{tg} 64^\circ \cdot \operatorname{tg} 76^\circ \cdot \operatorname{tg} 84^\circ = 1;$
 в) $\operatorname{tg} 6^\circ \cdot \operatorname{tg} 14^\circ \cdot \operatorname{tg} 26^\circ \cdot \operatorname{tg} 34^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ \cdot \operatorname{tg} 66^\circ \cdot \operatorname{tg} 74^\circ \cdot \operatorname{tg} 86^\circ = 1;$
 г) $\operatorname{tg} 8^\circ \cdot \operatorname{tg} 12^\circ \cdot \operatorname{tg} 28^\circ \cdot \operatorname{tg} 32^\circ \cdot \operatorname{tg} 48^\circ \cdot \operatorname{tg} 52^\circ \cdot \operatorname{tg} 68^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ = 1.$

Решение. Преобразуем уже рассмотренную формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 3x &= \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}; \\ \operatorname{tg} 3x &= \frac{\operatorname{tg} x \cdot (\sqrt{3} - \operatorname{tg} x) \cdot (\sqrt{3} + \operatorname{tg} x)}{(1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x) \cdot (1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x)} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} x} = \\ &= \operatorname{tg} \left(60^\circ - x\right) \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \left(60^\circ + x\right). \quad (12) \end{aligned}$$

Применим теперь формулу (12) к каждому сомножителю её правой части:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(60^\circ - x\right) &= \operatorname{tg} \left(40^\circ + \frac{x}{3}\right) \cdot \operatorname{tg} \left(20^\circ - \frac{x}{3}\right) \cdot \\ &\cdot \operatorname{tg} \left(80^\circ - \frac{x}{3}\right), \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} \left(60^\circ - \frac{x}{3}\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{3} \cdot \operatorname{tg} \left(60^\circ + \frac{x}{3}\right), \\ \operatorname{tg} \left(60^\circ + x\right) &= \left(40^\circ - \frac{x}{3}\right) \cdot \operatorname{tg} \left(20^\circ + \frac{x}{3}\right) \cdot \\ &\cdot \operatorname{tg} \left(80^\circ + \frac{x}{3}\right) \end{aligned}$$

и окончательно получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 3x &= \operatorname{tg} \frac{x}{3} \cdot \operatorname{tg} \left(20^\circ - \frac{x}{3}\right) \cdot \operatorname{tg} \left(20^\circ + \frac{x}{3}\right) \cdot \\ &\cdot \operatorname{tg} \left(40^\circ - \frac{x}{3}\right) \cdot \operatorname{tg} \left(40^\circ + \frac{x}{3}\right) \cdot \operatorname{tg} \left(60^\circ - \frac{x}{3}\right) \cdot \\ &\cdot \operatorname{tg} \left(60^\circ + \frac{x}{3}\right) \cdot \operatorname{tg} \left(80^\circ - \frac{x}{3}\right) \cdot \operatorname{tg} \left(80^\circ + \frac{x}{3}\right). \end{aligned}$$

Положив в последней формуле $x = 6^\circ$, $x = 12^\circ$, $x = 18^\circ$, $x = 24^\circ$, найдём соответственно, что произведения а), б), в) и г) равны единице, например, при $x = 6^\circ$ будем иметь:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 18^\circ &= \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 22^\circ \cdot \operatorname{tg} 38^\circ \cdot \\ &\cdot \operatorname{tg} 42^\circ \cdot \operatorname{tg} 58^\circ \cdot \operatorname{tg} 62^\circ \cdot \operatorname{tg} 78^\circ \cdot \operatorname{tg} 82^\circ, \end{aligned}$$

откуда и следует тождество а).