Пукас Юрий Остапович
Более 20 лет преподавал математику и физику в школах города Троицка. Автор книг по подготовке к ЕГЭ и множества статей по олимпиадной математике. Многократный победитель Творческого конкурса учителей математики.

Треугольники, трапеции и окружности. Готовимся к ЕГЭ-2020

Экзамен 2018 года был самым простым из тех, что проводились с 2010 года. Об этом прошлым летом говорили многие эксперты. Например, вот что сказал Дмитрий Гущин: «*Есть такое чувство, что варианты последних трёх лет всё проще и проще (и это хорошо, например, проходит время нерешаемой геометрии)*». И действительно, с планиметрическими задачами выпускники 2018 года справились, как никогда, хорошо. Может им помогло внимательное изучение соответствующих задач предыдущего сезона? Сейчас рассмотрим их и мы, а уже при следующих встречах займёмся задачами 2018 и 2019 годов.

1. Дан треугольник ABC (рис. 1). Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что

$$AC^2 = BC \cdot CK.$$

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKB, если $\cos B = \dfrac{2}{3}$, $AC = 36$, а площадь треугольника AKC равна $126\sqrt{5}$.

Указания

а) Так как $\angle KAC=\angle BAK=\angle ABC$, получаем, что $\angle KAC=\angle ABC$. Следовательно, треугольники BCA и ACK подобны по двум углам, откуда и следует, что $AC^2=BC\cdot CK$.

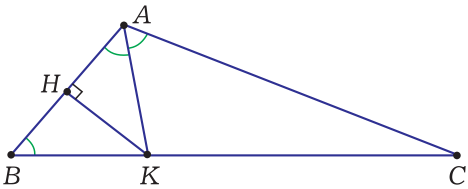

Рис. 1

б) Пусть $\angle KAC=\angle ABC=\beta$. Тогда, зная, чему равен его косинус, находим, что $\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Зная площадь треугольника AKC, найдём сторону AK:

$$\frac{1}{2}AK\cdot AC\cdot\sin\beta=126\sqrt{5}\Rightarrow AK=21.$$

Далее $AH=BH=AK\cdot\cos\beta=14$.

В треугольнике AKB (рис. 2) нам теперь известны все стороны и углы. Радиус окружности, вписанной в него, можно найти разными способами. Например, через площадь и периметр. Или так: центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис, тогда радиус равен $OH=AH\cdot tg\frac{\beta}{2}$, и вам потребуется умение, зная $\cos\beta$, находить $tg\frac{\beta}{2}$.

Мы же поступим иначе. Высота $HK=AK\cdot\sin\beta=7\sqrt{5}$. По свойству биссектрисы:

$$\frac{OH}{OK}=\frac{AH}{AK}\Rightarrow OH=\frac{14\sqrt{5}}{5}.$$

А это и есть радиус окружности, вписанной в треугольник AKB.

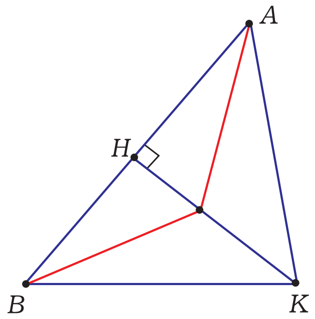

Рис. 2

2. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC (рис. 3) и пересекает AB и AC в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AED.

б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A=45°$, $DE=6$ и площадь треугольника AED в восемь раз меньше площади четырёхугольника $BCED$.

Решение. *а*) Треугольник ABC подобен треугольнику AED по двум углам.

Угол BAC у треугольников общий. Четырёхугольник $BDEC$ – вписанный, поэтому $\angle BCE+\angle BDE=180°=$ $=\angle BDE+\angle EAD$. Следовательно, $\angle BCE=\angle EDA$.

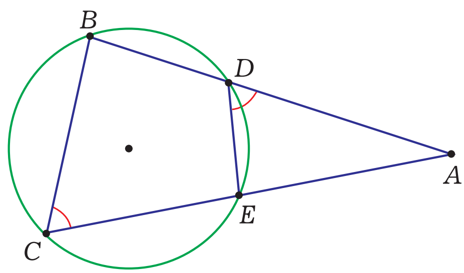

Рис. 3

б) Из условия следует, что площадь треугольника AED в девять раз меньше площади треугольника ABC, следовательно, коэффициент подобия треугольников равен 3. Отсюда следует, что $BC = 3 \cdot DE = 18$.

Пусть $\angle ABE = \beta$, тогда $\angle BEC = 45° + \beta$ (рис. 4). По теореме синусов $\dfrac{DE}{\sin\beta} = \dfrac{BC}{\sin(45° + \beta)} = 2R$. Отсюда можно путём скучных преобразований найти, чему равен $\sin\beta$, а затем $2R$. Но лучше действовать иначе: значение $\sin\beta$ можно найти, используя подобие треугольников AED и ABC. Пусть $AE = x$, тогда $AB = 3x$.

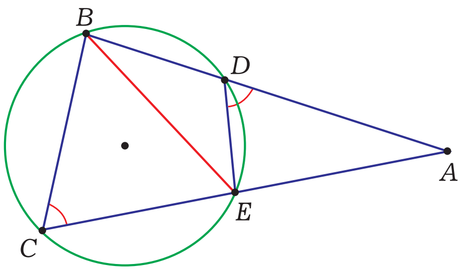

Рис. 4

Из треугольника BAE по теореме косинусов найдём, что

$$BE = \sqrt{10 - 3\sqrt{2}} \cdot x.$$

Далее по теореме синусов получим:

$$\sin\beta = \frac{AE \cdot \sin 45°}{BE} = \frac{1}{\sqrt{20 - 6\sqrt{2}}}.$$

Теперь вычисляем

$$R = \frac{DE}{2\sin\beta} = 3\sqrt{20 - 6\sqrt{2}}.$$

Ответ: $18; 3\sqrt{20 - 6\sqrt{2}}$.

3. Высоты тупоугольного треугольника ABC с тупым углом ABC (рис. 5) пересекаются в точке H. Угол AHC равен $60°$.

а) Докажите, что угол ABC равен $120°$.

б) Найдите BH, если $AB = 6$, $BC = 10$.

Решение. Рассмотрим остроугольный треугольник AHC. Пусть точки F, G и E – основания перпендикуляров, опущенных на сторону AC и на продолжения сторон BC и AB соответственно.

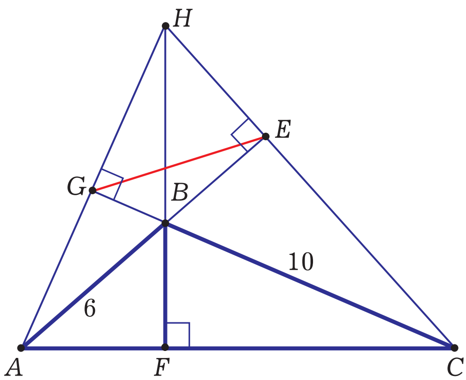

Рис. 5

В этом треугольнике точка B – ортоцентр. Так как $\angle HGC = \angle HEA = 90°$, то точки B, G, H и E лежат на одной окружности, причём отрезок HB является её диаметром. В вариантах ЕГЭ такая конструкция время от времени встречается, начиная с лета 2014 года. Кроме того, что точки B, G, H и E лежат на одной окружности, заметим, что треугольники GHE и CHA подобны, так как угол AHC у них общий, а отношения сторон, его образующих, дают нам коэффициент подобия треугольников:

$$\frac{GH}{HC} = \frac{EH}{HA} = \cos\angle AHC.$$

Вот собственно и всё, что необходимо знать, чтобы ответить на вопросы задачи.

а) $\angle ABC = \angle GBE = 180° - \angle AHC = 120°$.

б) Сначала по теореме косинусов в треугольнике ABC найдём сторону AC. Она равна 14.

Далее используем подобие треугольников GHE и CHA:

$$\frac{GE}{AC}=\frac{GH}{HC}=\frac{EH}{HA}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow GE=\frac{1}{2}AC=7.$$

А в треугольнике GHE по теореме синусов:

$$GE=BH\cdot\sin\angle GHE=\frac{\sqrt{3}}{2}BH.$$

Отсюда находим

$$BH=\frac{2}{\sqrt{3}}GE=\frac{14}{\sqrt{3}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $BH=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$.

4. Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 6) взята точка M такая, что $\angle ABM=\angle BMC=90^\circ$, также известно, что $AD = 2BC$.

а) Докажите, что $MA = MD$.

б) Найдите $\angle BAD$, если $\angle CDA=55^\circ$, а высота, проведённая из точки M к AD равна BC.

Решение. Подумав над задачей, присмотревшись к чертежу, очень скоро понимаешь, что условие $AD = 2BC$ играет здесь первостепенную роль. Но как его использовать?

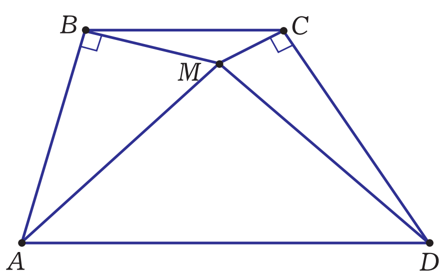

Рис. 6

Как только мы докажем, что $MA = MD$, высота, проведённая из точки M к AD, о которой говорится в пункте ***б***), окажется серединным перпендикуляром к отрезку AD. Опустим эту высоту (рис. 7), не утверждая пока, что она – серединный перпендикуляр.

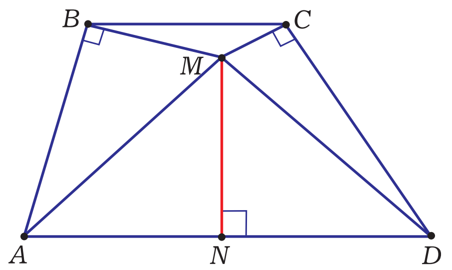

Рис. 7

Цепочка ассоциаций (серединный перпендикуляр, средняя линия, к тому же ещё параллельные отрезки AD и BC связаны условием $AD = 2BC$) подсказывает нам, что надо продолжить боковые стороны трапеции до их пересечения в точке O (рис. 8).

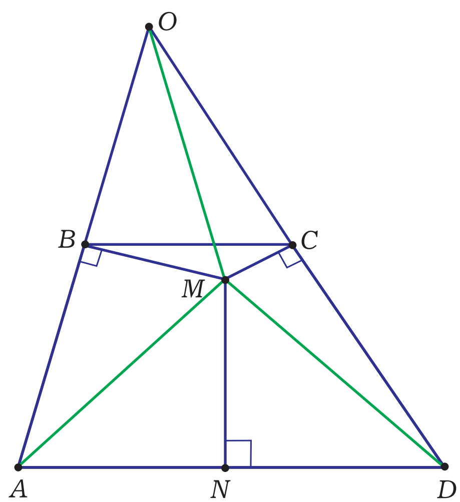

Рис. 8

Теперь всё становится ясно. BC – средняя линия треугольника AOD, BM и CM – серединные перпендикуляры к сторонам AO и OD соответственно, следовательно, точка M – центр окружности, описанной около треугольника AOD. Но тогда её радиусы $MA = MD = OM$. Пункт ***а***) доказан.

б) В прямоугольных треугольниках ANM и DNM катеты $AN = MN = DN$, следовательно, все острые углы этих треугольников равны 45°. Следовательно, центральный угол AMD – прямой, следовательно, $\angle AOD = 45°$. Зная два угла треугольника AOD, находим третий. **Ответ**: $\angle BAD = 80°$.

Окружности будут главными действующими лицами в большинстве из рассматриваемых далее задач.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 9). Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC – биссектриса угла BAD.

б) Найдите CD, если известны длины диагоналей трапеции: $AC = 12$ и $BD = 6{,}5$.

Решение. *а*) По условию $AB = BD$ $AB = BD$ и $BD = BC$. Следовательно, треугольник ABC – равнобедренный, так как $AB = BC$. Поэтому $\angle BAC = \angle BCA$, но $\angle BCA = \angle CAD$, как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC. Получается, что $\angle BAC = \angle CAD$. Следовательно, AC – биссектриса угла BAD.

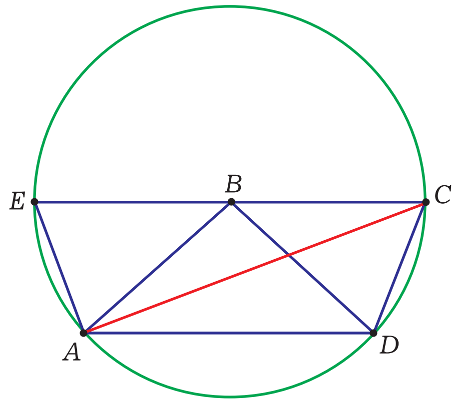

Рис. 9

б) Так как $AB = BD = BC = 6{,}5$, точки A, D и C лежат на окружности радиуса 6,5 с центром в точке B. Продолжим отрезок BC до пересечения с окружностью в точке E. EC – диаметр окружности, следовательно, $\angle EAC = 90°$. А так как $\angle BCA = \angle CAD$, то равны и хорды, на которые эти углы опираются: $AE = DC$. По теореме Пифагора: $AE^2 = CE^2 - AC^2 = 25 \Rightarrow AE = DC = 5$.

Замечательное решение хорошей задачи. К сожалению, не всегда такие красивые идеи в нужный момент приходят в голову, и тогда ничего не остаётся, как действовать без прикрас, применяя чисто технические средства.

Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \angle CAD = \alpha$, тогда $\angle ABC = 180° - 2\alpha$, а $\angle BAD = \angle BDA = \angle DBC = 2\alpha$. Хорда AC опирается на дугу, равную $180° - 2\alpha$, а хорда CD, – на дугу, равную 2α. Тогда по теореме синусов: $AC = 2R \cdot \sin(90° - \alpha) = 2R \cdot \cos\alpha$, то есть $12 = 13 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{13}$. Теперь находим, что

$$CD = 2R \cdot \sin\alpha = 13 \cdot \frac{5}{13} = 5.$$

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 10). Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M. Диаметр DD_1 перпендикулярен стороне АВ и пересекает её в точке N.

а) Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM = \angle BA_1D_1$.

б) Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, если угол CDB вдвое меньше угла ADB.

Решение. Эта интересная задача со сложным чертежом была в варианте диагностической работы от 6 марта 2018 года. На летнем экзамене подобных задач не было. Может они встретятся летом 2019?

а) Выполнив все построения, имеющие по условию задачи отношение к первому вопросу, мы получим вот такую картинку (рис. 10):

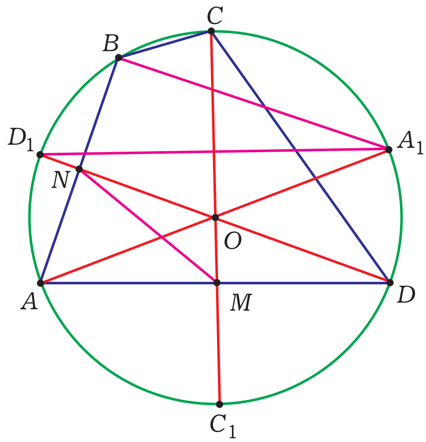

Рис. 10

Что о ней можно сказать? Можно отметить, что угол ABA_1 – прямой, так как он опирается на диаметр. Но как доказывать равенство $\angle DNM = \angle BA_1D_1$? Угол DNM «оторван» от окружности, он не опирается ни на одну из дуг. Но если провести отрезок BD (рис. 11), то MN будет средней линией в равнобедренном треугольнике BAD, параллельной стороне BD, и тогда $\angle DNM = \angle BDD_1$, как накрест лежащие. (Кстати, отрезок BD упомянут во втором вопросе задачи. Заодно проведём отрезок AC, получим равнобедренный треугольник ACD. Наверняка это пригодится в дальнейшем).

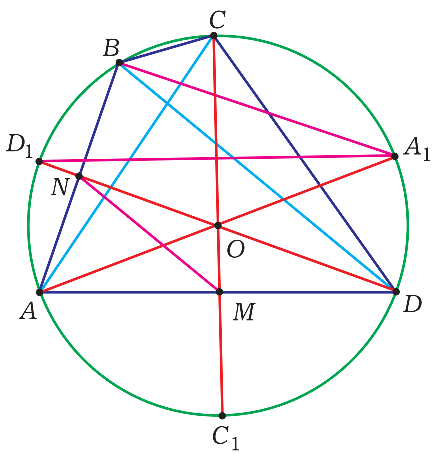

Рис. 11

Но вернёмся к тому, что $\angle DNM = \angle BDD_1$. Так как $\angle BDD_1$ и $\angle BA_1D_1$ опираются на одну дугу, то они равны. Следовательно, $\angle DNM = \angle BDD_1 = \angle BA_1D_1$ и пункт *а*) доказан.

б) В равнобедренном треугольнике BAD высота DN делит угол ADB пополам. Пусть $\angle ADN = \angle BDN = \alpha$, но тогда и $\angle CDB = \alpha$, а $\angle ADC = \angle DAC = 3\alpha$. Тогда из треугольника ACD, (вот когда пригодился отрезок AC) следует, что $\angle ACD = 180° - 6\alpha$. Но $\angle ACD = \angle ABD = 90° - \alpha$, они опираются на одну дугу. Из того, что $180° - 6\alpha = 90° - \alpha$, находим, что $\alpha = 18°$.

Остальное просто:

$$\angle ADC = 3\alpha = 54°,$$
$$\angle ABC = 180° - \angle ADC = 126°,$$
$$\angle BAD = 90° - \alpha = 72°,$$
$$\angle BCD = 180° - \angle BAD = 108°.$$

Ответ: *б*) $72°, 126°, 108°, 54°$.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны стороны и диагональ (рис. 12): $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.

а) Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.

б) Найдите диагональ BD.

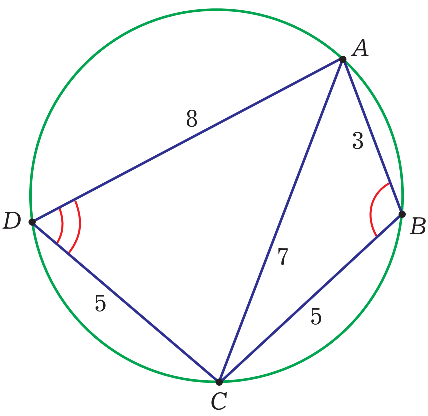

Рис. 12

Решение. *а*) Применяя теорему косинусов для треугольников CDA и ABC, находим, что $\cos\angle CDA = \frac{1}{2}$ и $\cos\angle ABC = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle CDA + \angle ABC = 60° + 120° = 180°$. Следовательно, вокруг этого четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

б) Применяя теорему косинусов для треугольников DAB и DCB (рис. 13) находим, что $\cos\angle DCB = -\frac{23}{98}$, а затем вычисляем BD.

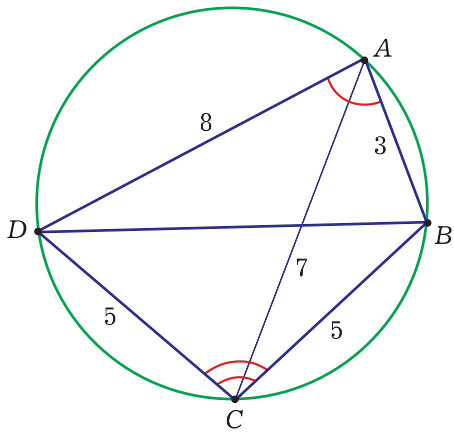

Рис. 13

Ответ: $BD = \frac{55}{7}$.

8. В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O (рис. 14).

а) Докажите, что

$$\sin\angle AOD = \sin\angle BOC.$$

б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BOD = 90°$, а основания равны 5 и 7.

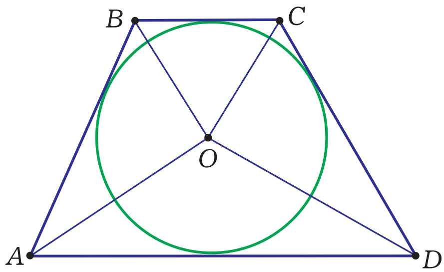

Рис. 14

Решение. *а*) Центр O вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов трапеции. Пусть $\angle ABC = 2\alpha$, а $\angle BCD = 2\beta$. Тогда $\angle BAD = 180° - 2\alpha$, а $\angle ADC = 180° - 2\beta$.

Значит, $\angle AOD = \alpha + \beta$, а $\angle BOC = 180° - (\alpha + \beta)$. Синусы этих углов равны. Пункт *а*) доказан.

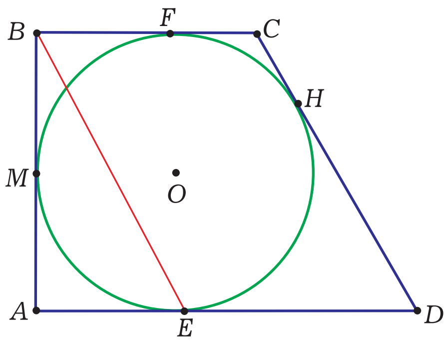

Рис. 15

б) Найдём высоту трапеции AB. Так как в четырёхугольник $ABCD$ (рис. 15) вписана окружность, $AB+CD = AD+BC$. Тогда $CD = 12 - AB = 12 - h$. Проведём BE параллельно CD. В прямоугольном треугольнике ABE имеем: $AB = h$, $AE = 2$, $BE = CD = 12 - h$. По теореме Пифагора находим высоту $h = \frac{35}{6}$, а затем вычисляем площадь трапеции. Она равна 35.

Ответ: 35.

Дополнение к задаче **8**. Обратим внимание на некоторые особенности конструкции, когда в трапецию вписана окружность. Во-первых, треугольник COD (рис. 16) – прямоугольный.

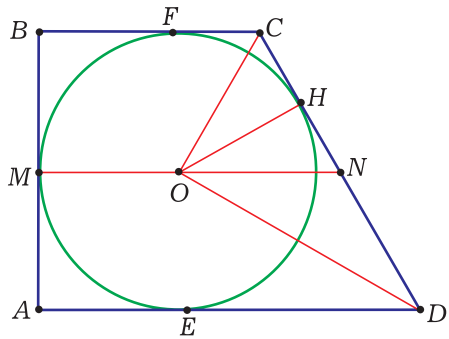

Рис. 16

А так как OH – это его высота, опущенная на гипотенузу, имеет место соотношение $OH^2 = CH \cdot HD$, что для нашей конкретной задачи позволяет другим путём найти радиус вписанной окружности, а с ним и высоту трапеции:

$$R^2 = (5-R)\cdot(7-R).$$

Во-вторых, центр вписанной окружности O лежит на средней линии трапеции MN, поэтому ON – это медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе. Следовательно, $CD = 2 \cdot ON$. Наверняка всё это вам ещё встретится.

9. В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой (рис. 17). Окружность, построенная на большем основании AD, как на диаметре, пересекает меньшее основание в точках C и M.

а) Докажите, что угол BAM равен углу CAD.

б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь треугольника ABE, если $AB=6$, а $BC=4BM$.

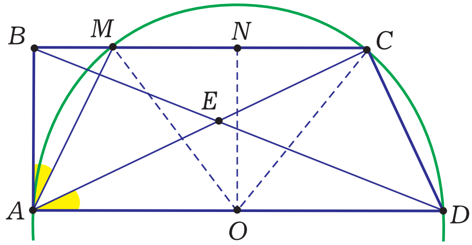

Рис. 17

Решение. *а*) Накрест лежащие углы MCA и CAD равны, а $\angle MCA=\angle BAM$, так как они измеряются половиной дуги AM. Следовательно, $\angle BAM=\angle CAD$.

б) Квадрат касательной AB равен произведению секущей BC на её внешнюю часть BM. Пусть $BM=x$, тогда $BC=4x$.

$AB^2=36=4x\cdot x,\Rightarrow BM=3$ и $BC=12$. Так как $AO=BM+MN$, находим нижнее основание и площадь треугольника ABD: $AD=15$, $S_{ABD}=45$.

$$S_{ABE}=\frac{BE}{BD}S_{ABD}=\frac{BC}{BC+AD}S_{ABD}=20.$$

Ответ: 20.

10. Дана равнобедренная трапеция, в которой $AD=3DC$, CM – высота трапеции (рис. 18).

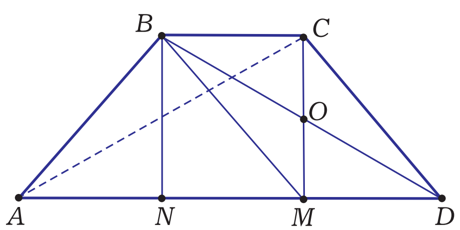

Рис. 18

а) Докажите, что точка M делит AD в отношении $2:1$.

б) Найдите расстояние от точки C до середины BD, если $AD=18$, $AC=4\sqrt{13}$.

Ответ: 4.

Комментарий. Совсем смешная задача. Кому-то очень повезло на экзамене летом 2017 года. Середина BD, это точка O, которой делятся пополам диагонали параллелограмма $MBCD$. Поэтому надо найти половину высоты CM.

11. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается её боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно (рис. 19). Известно, что $AM=8\cdot MB$ и $DN=2\cdot CN$.

а) Докажите, что $AD=4\cdot BC$.

б) Найдите длину отрезка MN, если радиус окружности равен $\sqrt{6}$.

Решение. *а*) Обозначим $MB=x$, а $CN=y$. Тогда $AM=8x$, а $DN=2y$. Так как $AM=AL$, $BM=BK$, $CK=CN$ и $DN=DL$, получаем:

$$\begin{cases} AD=AL+LD=8x+2y, \\ BC=BK+KC=x+y. \end{cases}$$

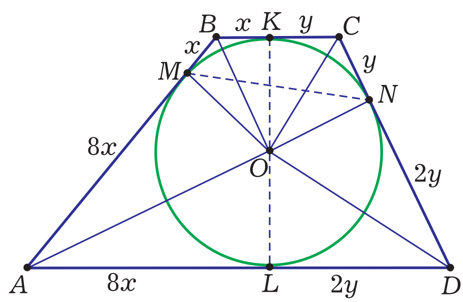

Рис. 19

Как видим, равенство $AD=4\cdot BC$ пока не очевидно. Опустив перпендикуляры BS и CT на нижнее основание AD (рис. 20), рассмотрим два прямоугольных треугольника ASB и DTS. Нам в них известно, что $AB=8x$, $AS=7x$, $CD=3y$, $TD=y$.

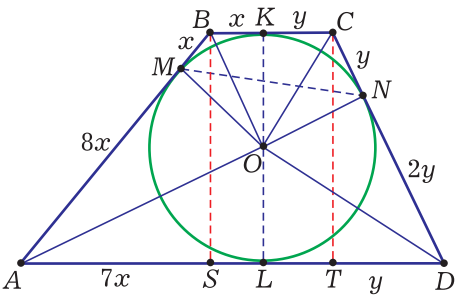

Рис. 20

Из того, что $BS^2=CT^2$, по теореме Пифагора получаем, что $32x^2=8y^2$, следовательно, $y=2x$. Но тогда $AD=12x$ и $BC=3x$. А из этого уже следует, что $AD=4\cdot BC$.

б) Обозначим $\angle BAD=2\alpha$ и $\angle ADC=2\beta$. Далее устанавливаем, что $\angle BOM=\angle BOK=\alpha$, $\angle CON=$ $=\angle COK=\beta$, тогда $\angle MON=2\alpha+2\beta$. В равнобедренном треугольнике MON боковые стороны $OM=ON=R=\sqrt{6}$. Основание $MN=2R\cdot\sin(\alpha+\beta)$, мы его вычислим, как только найдём, чему равен $\sin(\alpha+\beta)$.

Можно действовать так:

$$\cos 2\alpha=\frac{AS}{AB}=\frac{7}{9}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ и}$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{3}.$$

Аналогично находим $\cos 2\beta=\dfrac{DT}{DC}=\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow\cos\beta=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ и $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Теперь последовательно находим $\sin(\alpha+\beta)$ и основание MN: $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

$$MN=2R\cdot\sin(\alpha+\beta)=2\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=4.$$

А тот, кто не дружит с тригонометрией, может воспользоваться (рис. 21) и, повозившись, найти MN по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника MHN.

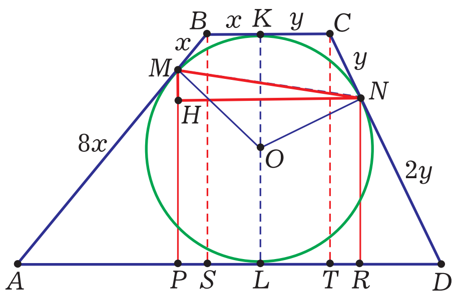

Рис. 21

Ответ: 18.

12. Точка E – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$ (рис. 22). На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O.

а) Докажите, что $CO=KO$.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции BC и AD, если площадь треугольника BCK составляет $\dfrac{4}{121}$ площади трапеции $ABCD$.

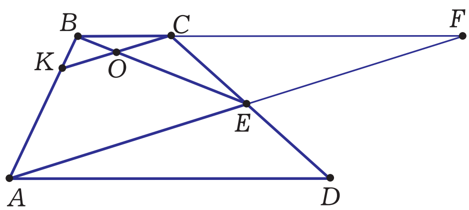

Рис. 22

Решение. Продолжим отрезки BC и AE до их пересечения в точке F. (Возьмите на вооружение такое преобразование в задачах с трапециями). Так как $CE=CD$, треугольники AED и FEC не просто подобны, а равны. Треугольники же KBC и ABF подобны. Заметим теперь, что площадь треугольника ABF равна площади трапеции $ABCD$:

$$S_{ABF}=S_{ABCE}+S_{FEC}=$$
$$S_{ABCE}+S_{AED}=S_{ABCD}.$$

Это даёт возможность найти, что коэффициент подобия треугольников KBC и ABF равен $\frac{2}{11}$, так как площадь треугольника KBC составляет $\frac{4}{121}$ площади трапеции $ABCD$.

Получаем: $\frac{BC+CF}{BC}=\frac{BC+CF}{BC}=$ $=\frac{BC+AD}{BC}=\frac{11}{2}$, и мы находим отношение длин оснований трапеции:

$$\frac{AD}{BC}=\frac{9}{2}.$$

Теперь докажем, что $KO = OC$. $\frac{KO}{AE}=\frac{BO}{BE}=\frac{OC}{EF}$, но $AE = EF$, следовательно, $KO = OC$. На оба вопроса задачи ответы получены. Задача решена.

Ответ: *б*) $\frac{AD}{BC}=\frac{9}{2}$.

13. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B, причём точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 23). Продолжение диаметра CA первой окружности и хорды CB этой же окружности пересекает вторую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите длину AD, если $AB=2$, $\angle DAE=\angle BAC$, а радиус второй окружности в четыре раза больше радиуса первой окружности.

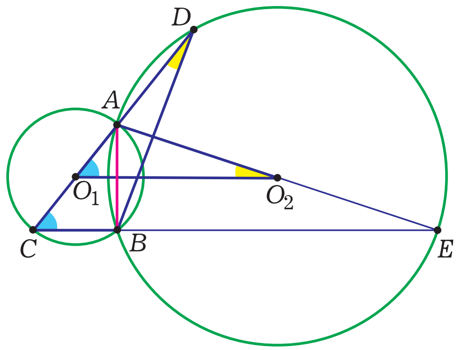

Рис. 23

Решение: Вы без труда установите подобие по двум углам треугольников CBD и O_1AO_2. Теперь ответим на второй вопрос.

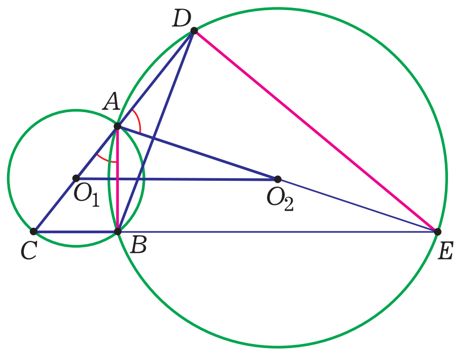

Рис. 24

$\angle CBA=\angle EDA=90°$, так как опираются на диаметры AC и AE (рис. 24). Используя равенство углов DAE и BAC, находим AD:

$$\begin{cases} AD = AE\cdot\cos\angle DAE \\ AB = AC\cdot\cos\angle BAC \end{cases} \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = 4\cdot AB = 8.$$

Ответ: *б*) $AD = 8$.

14. Окружность, вписанная в треугольник ABC (рис. 25), касается сторон BC и AC в точках Mи Nсоответственно. Точки E и F– середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BED, если $AB = 28$ и угол ABC равен $60°$.

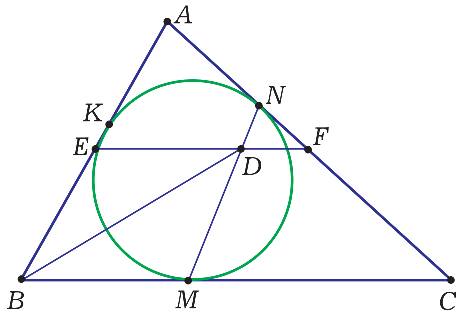

Рис. 25

Решение. *а*) Так как отрезок DF параллелен MC, треугольник DFN подобен равнобедренному треугольнику MCN ($MC = NC$). Следовательно, треугольник DFN также равнобедренный ($DF = NF$).

б) В треугольнике BED сторона $BE = 14$, $\angle BED = 120°$. Найдём сторону ED.

Обозначим равные отрезки:

$$BK = BM = a,\ AK = AN = b,$$

$$CN = CM = c.$$

Тогда $DF = NF = NC - FC =$

$$= c - \frac{b+c}{2} = \frac{c-b}{2}.$$

Находим ED:

$$ED = EF - DF =$$

$$= \frac{a+c}{2} - \frac{c-b}{2} = \frac{a+b}{2} = 14.$$

(Заметим, что эти вычисления проведены для случая, когда $CN > FC$, действуя аналогично для другого случая, приходим к такому же результату).

Теперь находим

$$S_{BED} = \frac{1}{2}AE\cdot ED\cdot\sin 120° = 49\sqrt{3}.$$

Ответ: $49\sqrt{3}$.

Завершаем наш разговор изящной задачей, которая предлагалась на *ОГЭ* три с половиной года назад будущим выпускникам 2017 года.

15. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 25$ и $CD = 16$ вписан в окружность (рис. 26). Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причём $\angle AKB = 60°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

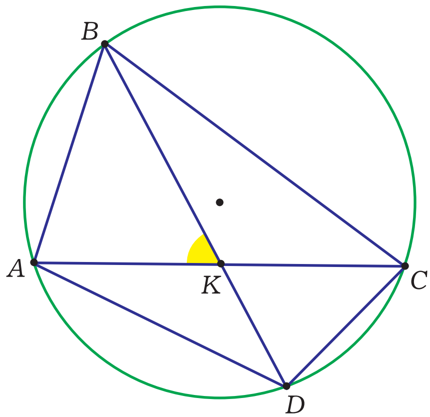

Рис. 26

Решение. Угол AKB трудно как-либо использовать, решая задачу. Проведём через точку B хорду BM, параллельную AC (рис. 27). Трапеция $ABMC$ – вписана в окружность.

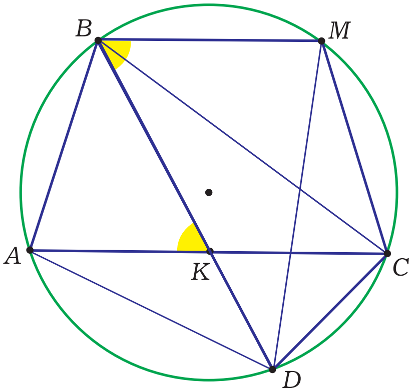

Рис. 27

Получаем тогда, что $\angle DBM = \angle AKB = 60°$; $MC = AB = 25$. Кроме того, в окружность вписан и четырёхугольник $BMCD$, следовательно, $\angle DCM = 120°$. Далее в треугольнике DCM по теореме косинусов находим хорду DM, а затем по теореме синусов – радиус описанной окружности: $DM = \sqrt{1281}$, $R = \sqrt{427}$.

Ответ: $\sqrt{427}$.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Исследователи из МФТИ открыли в полупроводниках эффект ранее считавшийся невозможным

Так называемый эффект суперинжекции является основой современных лазеров и светодиодов. Однако до настоящего момента считалось, что он возможен только в гетероструктурах, состоящих из двух и более полупроводниковых материалов. Физики из МФТИ обнаружили, что суперинжекция возможна и в гомоструктурах, то есть достаточно иметь лишь один материал. Это открывает принципиально новые возможности в создании световых источников. Работа опубликована в журнале Semiconductor Science and Technology.

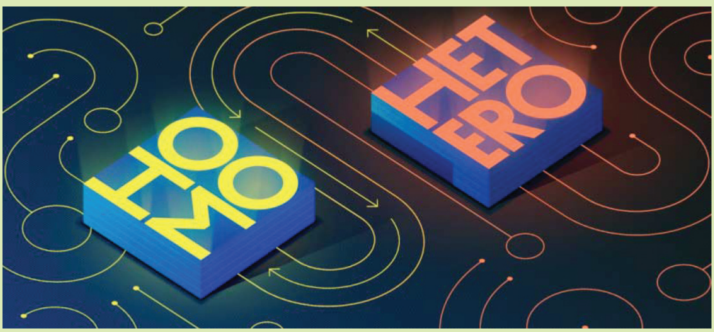

Иллюстрация. «Гомо- и гетероструктуры».
Дизайнер: @tsarcyanide, пресс-служба МФТИ

https://mipt.ru/news/issledovateli_iz_mfti_otkryli_v_poluprovodnikakh_effekt_ranee_schitavshiysya_nevozmozhnym