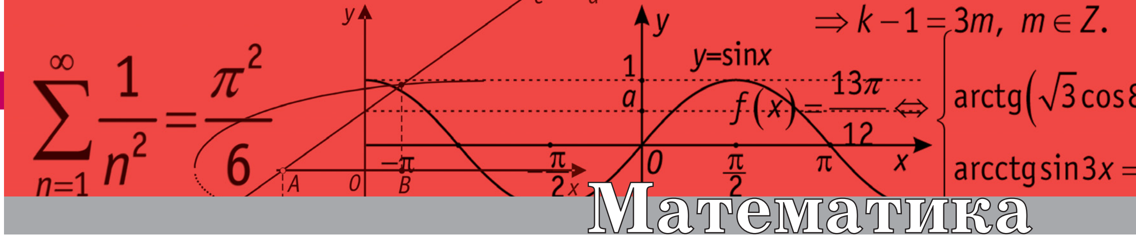

Пиголкина Татьяна Сергеевна
Кандидат физико-математических наук, доцент МФТИ, заслуженный преподаватель МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал».

Треугольник с вершинами в основаниях высот данного треугольника

Изучаются свойства ортоцентрического (высотного) треугольника для данного остроугольного треугольника. Доказывается теорема Фаньяно.

Геометрия в большей степени, чем любой другой раздел математики, является богатейшей сокровищницей интереснейших, но полузабытых вещей, которым спешащее поколение не имеет времени насладиться.

Э.Т.Белл (1883 – 1960)

В остроугольном треугольнике ABC его высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Эта точка называется ортоцентром треугольника ABC, а треугольник $A_1B_1C_1$ с вершинами в основаниях высот называется *ортоцентрическим*, или *высотным* для треугольника ABC.

Свойства высотного треугольника

Пусть H – точка пересечения высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC (рис. 1). В прямоугольном треугольнике ABB_1 угол ABB_1 равен $90^\circ - \angle A$. Этот же угол принадлежит прямоугольному треугольнику

HC_1B, поэтому

$$\angle BHC_1 = 90^\circ - (90^\circ - \angle A) = \angle A.$$

Углы CHB_1 и BHC_1 – вертикальные, следовательно, $\angle CHB_1 = \angle A$.

Далее, углы HB_1C и HA_1C – прямые, около четырёхугольника HB_1CA_1 можно описать окружность (рис. 2). Вписанные углы CHB_1 и CA_1B_1 опираются на одну дугу, они равны, поэтому $\angle CA_1B_1 = \angle A$.

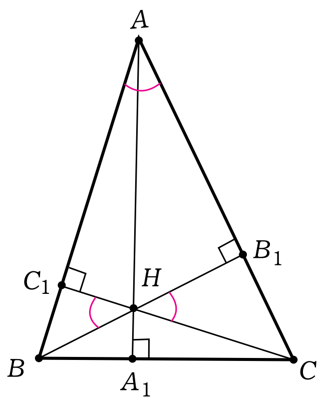

Рис. 1

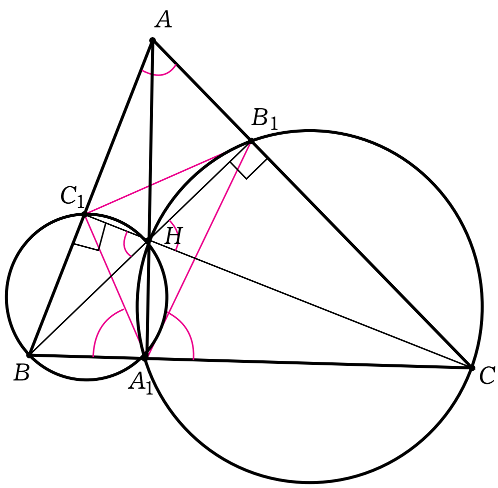

Рис. 2

Углы HC_1B и HA_1B – прямые, около четырёхугольника HA_1BC_1 также можно описать окружность, в которой вписанные углы BHC_1 и BA_1C_1 равны, откуда следует $\angle BA_1C_1 = \angle A$.

Аналогичные рассуждения для двух других высот приводят к следующим утверждениям, которые мы назовём свойствами высотного треугольника.

Свойство 1. В каждой из вершин высотного треугольника две его стороны, выходящие из этой вершины, образуют со стороной треугольника (на которой лежит вершина) пару равных углов, причём каждый из этих углов равен противолежащему стороне углу данного треугольника (рис. 3).

Ранее мы доказали, что при вершине A_1 лежит пара равных углов BA_1C_1 и CA_1B_1, которые равны углу A. При вершине B_1 лежит пара равных углов AB_1C_1 и CB_1A_1, равных углу B, а при вершине C_1 пара равных углов AC_1B_1 и BC_1A_1, которые равны углу C.

Углы высотного треугольника, противолежащие углам A, B и C данного, соответственно равны $180^\circ - 2A$, $180^\circ - 2B$ и $180^\circ - 2C$.

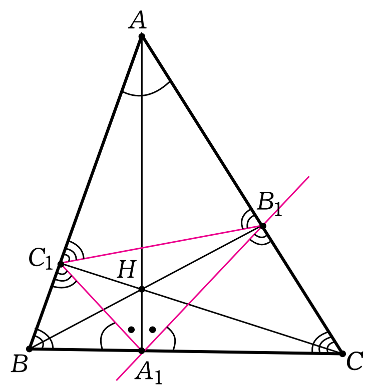

Рис. 3

Свойство 2. Высоты данного треугольника являются биссектрисами углов высотного треугольника. Действительно, из свойства 1 следует:

$$\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1 = 90^\circ - \angle A,$$

$$\angle BB_1A_1 = BB_1C_1 = 90^\circ - \angle B \text{ и}$$

$$\angle CC_1A_1 = \angle CC_1B_1 = 90^\circ - \angle C.$$

Точка H пересечения высот данного треугольника является точкой пересечения биссектрис высотного треугольника и, значит, точка H – центр окружности, вписанной в высотный треугольник (рис. 3).

Свойство 3. По закону отражения света от плоского зеркала угол падения равен углу отражения. Если рассматривать стороны данного треугольника как плоские зеркала, поместить в одну из вершин высотного треугольника, например в точку A_1, точечный источник и направить луч в другую его вершину, точку C_1, то по закону отражения луч попадёт в точку B_1 а затем вернётся в исходную точку A_1 (рис. 4).

Свойство 4. Прямая, проходящая через основания двух высот, отрезает треугольник, подобный данному.

Рассмотрим, например, треугольник A_1B_1C (см. рис. 3). По доказанному $\angle B_1A_1C = \angle A$, $\angle A_1B_1C = \angle B$. Поэтому по двум углам $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$. Найдём коэффициент подобия.

Треугольник AA_1C – прямоугольный, его катет $A_1C = AC \cdot \cos C$; треугольник BB_1C также прямоугольный, его катет $B_1C = BC \cdot \cos C$ (рис. 5). $\angle C$ – общий для треугольников A_1B_1C и ABC, отношение образующих его сторон равно $\dfrac{B_1C}{BC} = \dfrac{A_1C}{AC} = \cos C$. Значит, коэффициент подобия равен $\cos C$.

Аналогично:

$$\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC, \ \frac{A_1B}{AB} = \frac{BC_1}{BC} = \cos B,$$

$$\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC, \ \frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \cos A.$$

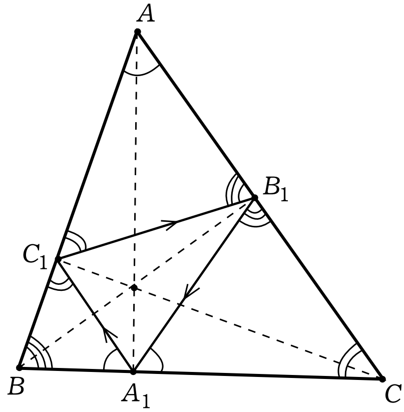

Рис. 4

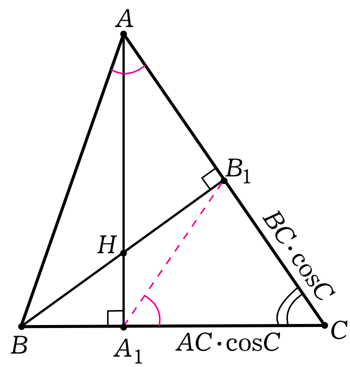

Рис. 5

Минимальное свойство высотного треугольника

Если вершины треугольника DEF лежат по одной на сторонах треугольника ABC, то говорят, что треугольник DFE вписан в треугольник ABC. Вписанных треугольников бесконечно много, высотный – один из них.

Задача нахождения треугольника наименьшего периметра, вписанного в данный остроугольный треугольник, была поставлена в 1775 году итальянским математиком Джанфранческо Фаньяно (1715 – 1797), который решил её методами дифференциального исчисления. Спустя столетие известный немецкий математик Герман Шварц (1843 – 1921), имеющий значительные результаты в функциональном и комплексном анализе, предложил чисто геометрическое, простое и наглядное решение задачи Фаньяно, тем самым сделав её задачей элементарной геометрии. Шварц доказал, что из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет единственный треугольник, вершины которого совпадают с основаниями высот данного, т. е. ортоцентрический (высотный) треугольник. Доказательство Шварца можно найти в ряде книг, даже в книгах серии «Библиотека математического кружка» ([1] – [4]). Мы приведём другое решение задачи Фаньяно, которое, как и решение Шварца, основано на применении зеркального отражения (симметрии) относительно сторон треугольника, но ведёт к цели более коротким путём. Его предложил венгерский математик Липот Фейер (1880 – 1959), и нашёл он своё решение, будучи ещё студентом университета. Решение Фейера «чрезвычайно понравилось самому Шварцу».

Пусть некоторый треугольник DFE вписан в остроугольный треугольник ABC так, что точка D лежит на стороне BC, точка E – на стороне AB и точка F – на стороне AC (рис. 6). Отразив зеркально точку D относительно прямых AB и AC, получим точки D' и D'' соответственно. Из $DD' \perp AB$ и $DK = KD'$ следует равенство $DE = D'E$, а из $DD'' \perp AC$ и $DL = LD''$ следует $DF = FD''$. Периметр треугольника DFE равен $DE+EF+FD=D'E+EF+FD''$, т. е. равен длине ломаной $D'EFD''$. Тогда среди всех вписанных треугольников DFE с данной вершиной D на стороне BC наименьший периметр будет иметь тот, у которого вершины E и F лежат на прямой $D'D''$. Итак, для каждой точки D стороны BC треугольник наименьшего периметра определён – это треугольник $DE'F'$. Осталось выбрать точку D так, что отрезок $D'D''$ имеет наименьшую возможную длину, – и задача будет решена.

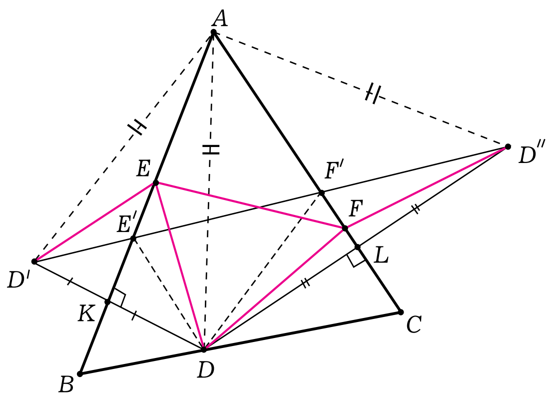

Рис. 6

В силу симметрии точек D' и D'' относительно прямых AB и AC имеем:

$$\Delta AD'K = \Delta ADK,\ AD' = AD \text{ и } \angle D'AK = \angle DAK;$$

$$\Delta AD''L = \Delta ADL,\ AD'' = AD \text{ и } \angle D''AL = \angle DAL,$$

откуда следует:

$$AD'=AD''=AD \text{ и } \angle D'AD'' = 2\angle DAK + 2\angle DAL = 2\angle A.$$

Треугольник $D'AD$ – равнобедренный, его боковые стороны равны отрезку AD, а угол при вершине равен удвоенному углу A – и *это при любом положении точки D на стороне BC*.

Из треугольника $D'AD''$ получаем $D'D'' = 2AD'\sin A = 2AD\sin A$. Длина отрезка $D'D''$ тем меньше (и тем меньше периметр треугольника), чем меньше отрезок AD. Отрезок AD соединяет точку A с точкой стороны BC. Кратчайшее расстояние от точки до прямой – перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, поэтому отрезок AD имеет наименьшую возможную длину, когда точка D есть основание перпендикуляра из вершин A на сторону BC, т. е. *AD – высота треугольника ABC*. Положение вершины D треугольника наименьшего периметра тем самым определяется однозначно, и поэтому единственным образом определяется вписанный треугольник наименьшего периметра.

Построим искомый вписанный треугольник DML минимального периметра. Пусть D – основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на сторону BC, D' и D'' – точки, симметричные точке D относительно сторон AB и AC соответственно (рис. 7).

Отрезок $D'D''$ равен наименьшему периметру вписанного треугольника DML, две другие вершины которого – это точки пересечения отрезка $D'D''$ со сторонами AB и AC соответственно. Точки M и N таковы, что при каждой из них стороны треугольника DMN образуют по паре равных углов при сторонах AB и AC треугольника (достаточно рассмотреть углы с вершинами в этих точках).

Все наши рассуждения мы могли начать не с точки D, а с вершины E или F вписанного треугольника, и пришли бы к выводу, что в треугольнике наименьшего периметра отрезки CE и BF также должны быть высотами, проведёнными из точек C и B. Но мы доказали, что треугольник наименьшего периметра единственный, откуда и следует утверждение:

Наименьший периметр из всех треугольников, вписанных в остроугольный треугольник ABC, имеет высотный (ортоцентрический) треугольник треугольника ABC.

В первой части мы обозначили высоты треугольника ABC удобным для изучения образом: AA_1, BB_1, CC_1, поэтому на рис. 7 треугольник DMN можно переобозначить в треугольник $A_1C_1B_1$.

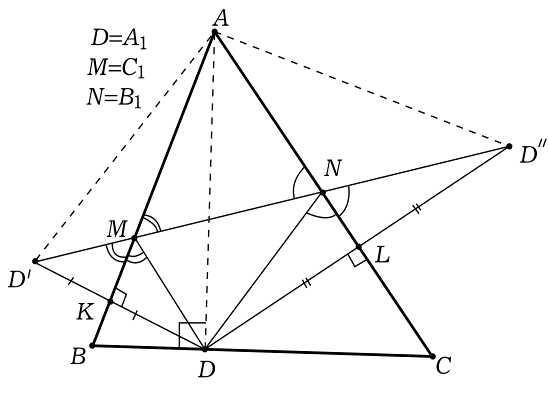

Рис. 7

Отношения периметров данного остроугольного треугольника и его высотного треугольника

Пусть p – полупериметр остроугольного треугольника ABC, q – полупериметр высотного треугольника. Как следует из доказательства, приведённого во втором пункте статьи, периметр высотного треугольника равен длине отрезка $D'D''$ в том случае, когда AD – высота треугольника ABC, при этом $D'D''=2AD\sin A$, т. е. $q = h_a \sin A$.

Пусть S – площадь треугольника ABC, $BC=a$, $AD=h_a$, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности. Используя формулы $S = \frac{1}{2}ah_a$, $S = pr$ и $a = 2R\sin A$, получаем:

$$q = h_a \sin A = \frac{2S}{a}\sin A =$$

$$= \frac{2S}{2R\sin A}\sin A = \frac{S}{R} = \frac{pr}{R}.$$

Таким образом $\frac{q}{p} = \frac{r}{R}$.

Если остановимся на равенстве $q = \frac{S}{R}$ и вспомним, что из всех треугольников, вписанных в окружность радиуса R, наибольшую площадь имеет правильный треугольник, то получим оценку (для правильного треугольника со стороной a его площадь $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, радиус описанной окружности $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$)

$$q \le \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{a\sqrt{3}} = \frac{3}{4}a = \frac{1}{2}\left(\frac{3a}{2}\right) = \frac{1}{2}p,$$

т. е. $\frac{q}{p} \le \frac{1}{2}$.

Литература

1) *Г. Радемахер* и *О. Теплиц*. «Числа и фигуры». Москва, 1962 г., физмат. литература. «Библиотека математического кружка».

2) *Г.С.М. Кокстер*. «Введение в геометрию». Москва, «Наука», 1966г.

3) *Р.Курант* и *Г. Роббинс*. «Что такое математика». Москва, «Просвещение», 1967 г.

4) *Г.С.М. Кокстер* и *С. Л. Гейтцер*. «Новые встречи с геометрией». Москва, «Наука», 1978 г. «Библиотека математического кружка».

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Главное — выгодно разрезать

Официант подаёт человеку, заказавшему еду, блюдо с готовой пиццей и спрашивает:

– Разрезать её на 6 или 8 частей?

– Сегодня я очень голоден – разрежьте на 8 частей.

Окончательное решение

Всё: с завтрашнего дня перестану откладывать дела на завтра!