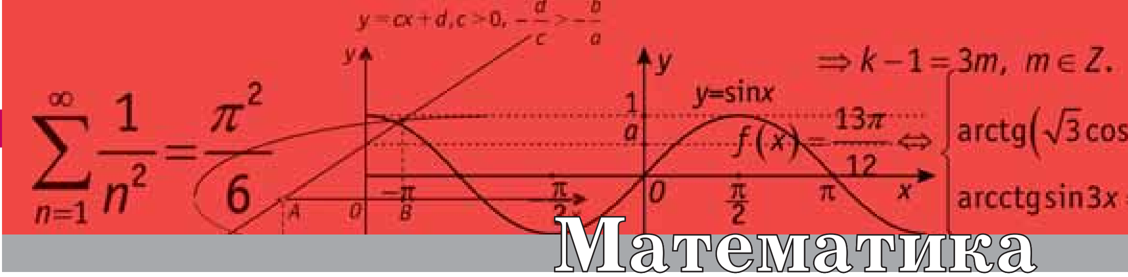

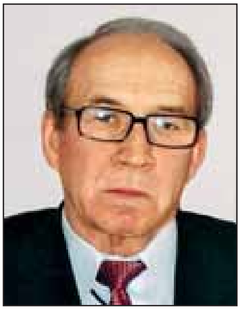

Вавилов Валерий Васильевич

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и школы имени А.Н. Колмогорова. Заслуженный преподаватель и лауреат Ломоносовской премии МГУ. Автор 23 книг и около 300 статей научного, методического и научно-популярного характера.

Теорема Вариньона

В статье рассматриваются свойства четырёхугольника с вершинами в серединах сторон другого четырёхугольника.

Средние линии четырёхугольника – это отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон (иногда отрезок, соединяющий середины диагоналей четырёхугольника также называют его средней линией). Одна из основных теорем о средних линиях принадлежит французскому механику и инженеру Пьеру Вариньону (Pierre Varignon, 1654–1722), который в 1731 году написал учебник по элементарной геометрии, где эта теорема впервые и появилась.

Теорема Вариньона. Четырёхугольник, образованный путём последовательного соединения середин сторон выпуклого четырёхугольника, является параллелограммом, и его площадь равна половине площади данного четырёхугольника.

Доказательство.

1. Рассмотрим (рис. 1) одну из сторон четырёхугольника $KLMN$, например, KL. Так как KL является средней линией треугольника ABC, то $KL \parallel AC$. Аналогично $NM \parallel AC$. Следовательно, $KL \parallel NM$ и $KL = NM = AC/2$. Таким образом, $KLMN$ – параллелограмм.

Этот параллелограмм называется *параллелограммом Вариньона* данного четырёхугольника.

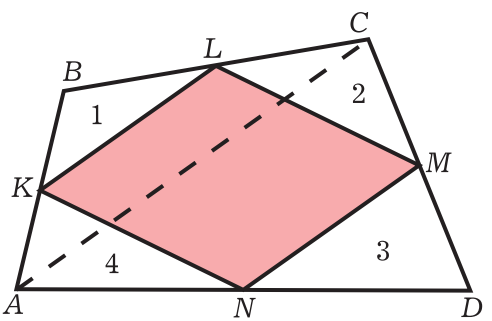

Рис. 1

2. Средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, площадь которого в четыре раза меньше площади исходного треугольника. Поэтому сумма площадей первого и третьего треугольников (рис. 1) равна четверти площади всего четырёхугольника. То же и для суммы площадей второго и четвёртого треугольников. Поэтому площадь параллелограмма $KLMN$ составляет половину площади четырёхугольника $ABCD$. Теорема доказана.

Задача 1. Докажите теорему Вариньона для невыпуклых четырёхугольников.

Задача 2. Докажите, что теорема Вариньона в первой своей части (утверждение о параллелограмме) остаётся справедливой даже в ситуации, показанной на рис. 2 *а* (когда AB и CD пересекаются) и для четырёхугольников в пространстве (рис. 2 *б*).

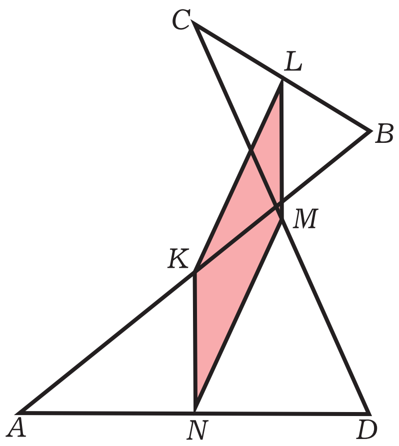

Рис. 2 *а*

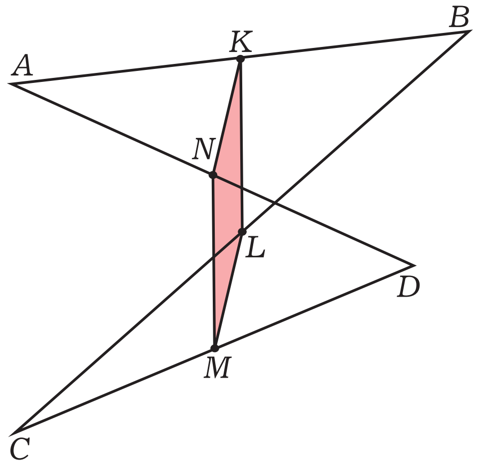

Рис. 2 *б*

Отметим несколько важных следствий теоремы Вариньона.

Следствие 1.

1) Параллелограмм Вариньона является ромбом тогда и только тогда, когда в исходном четырёхугольнике:

а) диагонали равны;

б) средние линии перпендикулярны.

2) Параллелограмм Вариньона является прямоугольником тогда и только тогда, когда в исходном четырёхугольнике:

а) диагонали перпендикулярны;

б) средние линии равны.

3) Параллелограмм Вариньона является квадратом тогда и только тогда, когда в исходном четырёхугольнике:

а) диагонали перпендикулярны и равны;

б) средние линии перпендикулярны и равны.

Задача 3. Докажите все утверждения следствия 1.

Следствие 2. Все *три* средние линии выпуклого четырёхугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Напомним ещё раз, что средней линией четырёхугольника называют также и отрезок, соединяющий середины диагоналей. То, что средние линии KM и LN точкой пересечения делятся пополам, следует из того, что эти отрезки являются диагоналями параллелограмма Вариньона. Поэтому нам достаточно доказать, что средние линии PQ и LN их точкой пересечения делятся пополам (рис. 3). Используя свойство средней линии треугольника для соответствующих треугольников, имеем:

$$LQ \parallel CD \parallel PN \text{ и}$$

$$PL \parallel AB \parallel NQ.$$

Тем самым $PLQN$ – параллелограмм, в котором PQ и LN являются его диагоналями, а значит, точкой пересечения делятся пополам.

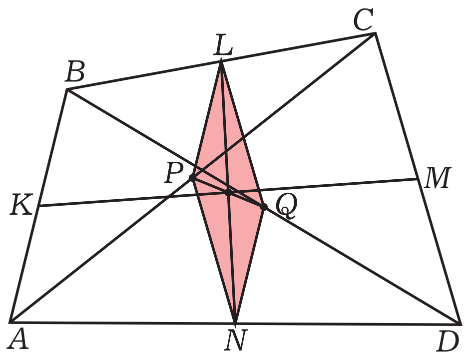

Рис. 3

Задача 4. Докажите следствие 2 для невыпуклого четырёхугольника (рис. 4; обращаем внимание на то, что здесь одна из диагоналей расположена вне четырёхугольника).

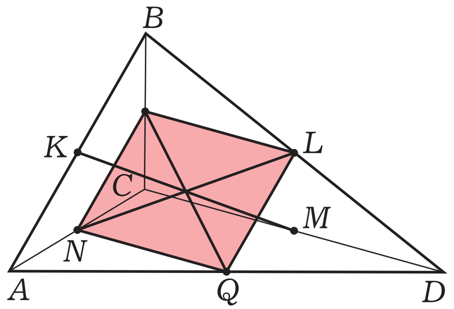

Рис. 4

Следствие 3 (лемма о бабочках). Если средние линии LN и KM выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, то (рис. 5)

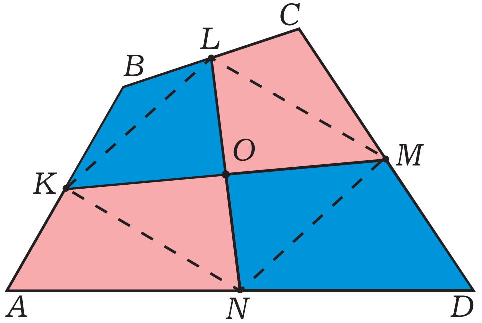

Рис. 5

$$S_{OKAN}+S_{OLCM}=S_{OLBK}+S_{ONDM},$$

то есть суммы площадей накрест лежащих четырёхугольников равны.

Опять воспользуемся свойством средней линии треугольника. Получаем:

$$S_{BKL}+S_{DNM}=\left(S_{BAC}+S_{DAC}\right)/4=$$
$$=S_{ABCD}/4=(S_{ABD}+S_{CBD})/4=$$
$$=S_{AKN}+S_{CLN}.$$

Так как диагонали делят параллелограмм на четыре равновеликих треугольника, то

$$S_{KLO}+S_{MNO}=S_{KON}+S_{LOM}.$$

Складывая это равенство с полученным ранее, получим требуемое.

Задача 5. Как выглядит рисунок 5 для невыпуклых четырёхугольников и верна ли «лемма о бабочках» для таких четырёхугольников?

Задача 6. Все стороны выпуклого четырёхугольника площади 1 разделены на 4 равные части, а затем точки деления на противоположных сторонах соединены так, чтобы получилась «косоугольная шахматная доска», состоящая из белых и чёрных «клеток» (см. рис. 6). Доказать, что сумма площадей всех белых «клеток» равна сумме площадей всех чёрных «клеток». Рассмотрите случай, когда каждая сторона делится на $2к$ равных частей.

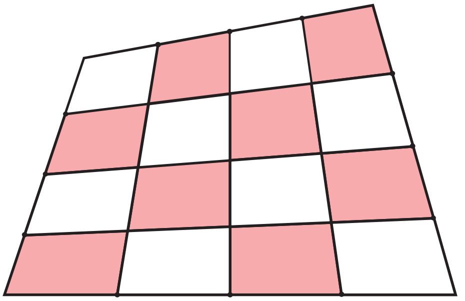

Рис. 6

В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сто-

рон. Одно из доказательств этой теоремы основано на применении (дважды) теоремы Пифагора (для этого нужно опустить две высоты параллелограмма) или теоремы косинусов для двух треугольников, одной из сторон которых является диагональ параллелограмма.

Задача 7. Докажите это утверждение о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

Теорема Эйлера. Для четырёхугольника $ABCD$ сумма квадратов всех сторон равна сумме квадратов диагоналей *плюс* учетверённый квадрат средней линии, соединяющей середины диагоналей, то есть

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = $$
$$= AC^2 + BD^2 + 4PQ^2.$$

Доказательство. Уже было отмечено, что $LPNQ$ – параллелограмм (рис. 7). Поэтому

$$LN^2 + PQ^2 = 2\left(LP^2 + LQ^2\right) =$$
$$= \left(AB^2 + CD^2\right)/2;$$

в последнем равенстве мы дважды воспользовались свойством средней линии треугольника. Аналогично для параллелограмма $KPMQ$ имеем

$$KM^2 + PQ^2 = \left(BC^2 + AD^2\right)/2.$$

Кроме того,

$$LN^2 + KM^2 = \left(AC^2 + BD^2\right)/2,$$

так как $KLMN$ – параллелограмм Вариньона четырёхугольника $ABCD$. Складывая первые два равенства (и учитывая последнее), получаем соотношение Эйлера.

Отметим, что если $PQ = 0$ (то есть ABCD – параллелограмм), то из теоремы Эйлера следует утверждение задачи 7.

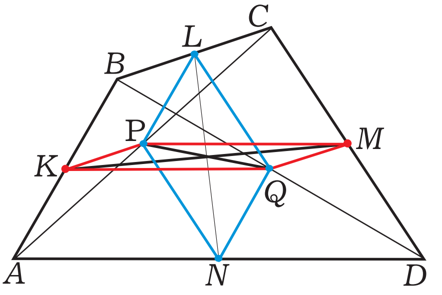

Рис. 7

Пьер Вариньон применял свою теорему (так её и открыл) для нахождения центра тяжести однородной четырёхугольной пластинки, который совпадает с центром параллелограмма. Франс Виттенбауэр (F. Wittenbauer, 1857–1922) дополнил этот результат Вариньона.

Теорема Виттенбауэра. Разделим все стороны четырёхугольника на три равные части и через соседние точки деления на соседних сторонах четырехугольника проведем прямые. Эти четыре прямые образуют параллелограмм Виттенбауэра, и его центр совпадает с центром параллелограмма Вариньона.

Задача 8. Докажите эту теорему и найдите отношение площадей параллелограммов Вариньона и Виттенбауэра. **Ответ**. 9/16.

Литература

1. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Шестаков С.А., Юдина И.И.* Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса. – М.: Просвещение, 1996.

2. *Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л.* Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.