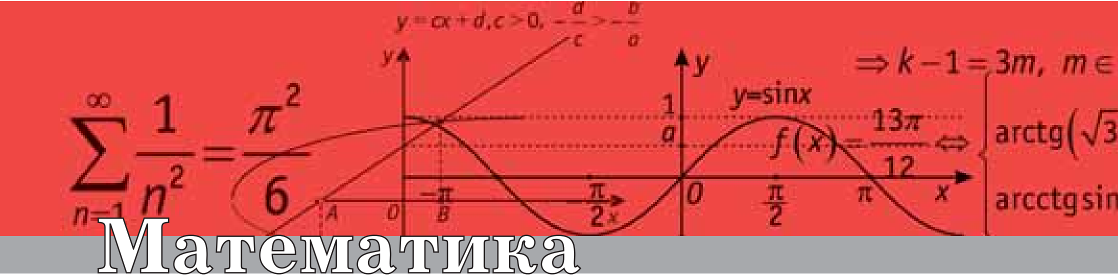

Епифанова Татьяна Николаевна
Учитель математики высшей категории старших классов ГОУ СОШ №1358 г. Москвы, отличник народного просвещения. Автор ряда методических статей в научно-теоретических и методических журналах.

Теоремы об углах в окружностях, не входящие в школьный курс, и их практическое применение

Для того чтобы поддержать интерес к геометрии и развить любознательность у учеников, учителю часто приходится составлять задачи, для решения которых иногда требуется применять теоремы, не входящие в школьный курс. Такие теоремы полезно предварительно доказывать.

В качестве примера рассмотрим решения задач на тему: «Углы в окружностях».

Докажем ряд теорем по этой теме.

Теорема 1. (Об угле между хордами.) Угол между пересекающимися хордами (AE и BD на рис. 1) равен по величине полусумме мер дуг окружности, которые отсекают на окружности эти хорды:

$$\delta = \frac{1}{2}(\cup AmB + \cup DnE) = \alpha + \beta.$$

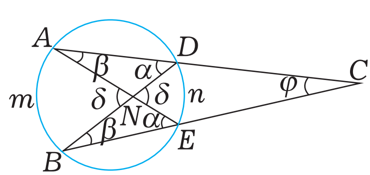

Рис. 1

Доказательство. Используя теорему о вписанном угле, получим

$$\alpha = \frac{1}{2}\cup AmB,\quad \beta = \frac{1}{2}\cup DnE.$$

Угол δ является внешним по отношению к треугольнику AND, поэтому

$$\delta = \alpha + \beta = \frac{1}{2}(\cup AmB + \cup DnE).$$

Теорема 2. (Об угле между секущими.) Угол между секущими, выходящими из одной точки, равен полуразности мер дуг окружности, заключённых между ними: $\varphi=\frac{1}{2}(\cup AmB-\cup DnE)=\alpha-\beta=$(рис. 1).

Доказательство. Используя теорему о вписанном угле, получим $\alpha=\frac{1}{2}\cup AmB$, $\beta=\frac{1}{2}\cup DnE$. Применяя теорему о внешнем угле треугольника, будем иметь $\alpha=\varphi+\beta$, откуда $\varphi=\alpha-\beta=\frac{1}{2}(\cup AmB-\cup DnE)$.

Теорема 3. (Об угле между касательной и хордой.) Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, измеряется половиной дуги, отсекаемой на окружности этой хордой: $\beta=\frac{1}{2}\cup AmB=\frac{1}{2}\alpha$ (рис. 2).

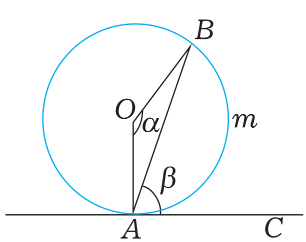

Рис. 2

Доказательство. Применяя свойство равнобедренного треугольника и теорему о сумме углов треугольника, получим

$$\angle OAB=\angle OBA=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha.$$

Исходя из определения касательной, $\angle OAC=90^\circ$. Тогда $\beta=90^\circ-\angle OAB=$ $=90^\circ-\left(90^\circ-\frac{1}{2}\alpha\right)=\frac{1}{2}\alpha$. Таким образом,

$$\beta=\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\cup AmB.$$

Задача 1. В окружности с центром O хорды AB и CD пересекаются в точке K и соответственно равны 9 и 12. Известно, что $AK>KB$ и $DK:KC=1:5$. Найти хорду BC, если $\angle AOD=137°$, $\angle COB=73°$ и $\angle BCD=15°$ (см. рис. 3).

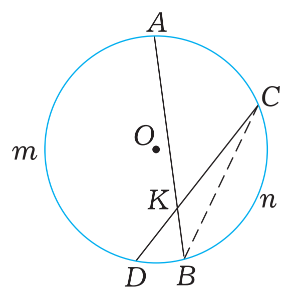

Рис. 3

Решение. Найдём хорду BC, применяя теорему синусов к треугольнику CKB:

$$\frac{BC}{\sin\angle CKB}=\frac{KB}{\sin\angle BCK}. \qquad (1)$$

По теореме 1 угол между хордами AB и CD измеряется полусуммой мер дуг CnB и AmD, т. е.

$$\angle CKB=\frac{137°+73°}{2}=105°.$$

Найдём $\sin\angle CKB$, используя формулы приведения и понижения степени:

$$\sin\angle CKB=\sin 105°=$$
$$=\sin(180°-75°)=$$

$$= \sin 75^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 150^\circ}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Аналогично найдём

$$\sin\angle BCK = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Пусть $KB = x$, $AK = y$. Тогда по теореме о произведении пересекающихся хорд получим $xy = CK \cdot KD$. Но так как по условию $CD = 12$ и $DK : KC = 1:5$, то $KD = 2$, $KC = 10$, и поэтому $xy = 20$. С другой стороны, $x + y = 9$. Решим систему:

$$\begin{cases} xy = 20, \\ x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 5, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5, \\ y = 4. \end{cases} \end{array} \right.$$

Учитывая, что $AK > KB$, получим $AK = 5$, $KB = 4$. Таким образом, равенство (1) примет вид

$$\frac{BC}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}},$$

т.е. $BC = 4\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 4(2+\sqrt{3})$.

Ответ: $4(2+\sqrt{3})$.

Задача 2. Диаметр AB окружности с центром O и радиусом, равным 8, продолжили за точку B и на продолжении отметили точку C. Из точки C провели секущую, пересекающую окружность в точках D и E, считая от точки C. Центральный угол, опирающийся на дугу BD, равен 30°, а на дугу $AE - 75^\circ$. Найти площадь треугольника COD (см. рис. 4).

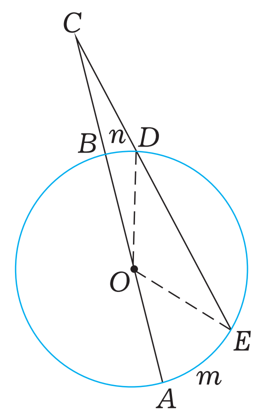

Рис. 4

Решение. Найдём площадь треугольника COD по формуле:

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CD \cdot OD \cdot \sin\angle CDO.$$

По теореме 2 угол между секущими CA и CE равен полуразности мер дуг AmE и BnD, т.е.

$$\angle C = \frac{75^\circ - 30^\circ}{2} = 22{,}5^\circ.$$

Найдём длину отрезка CD, применяя теорему синусов для треугольника COD:

$$\frac{OD}{\sin\angle C}=\frac{CD}{\sin\angle COD},$$

т.е. $\dfrac{8}{\sin 22{,}5^\circ}=\dfrac{CD}{\sin 30^\circ}.$

Вычислим $\sin 22{,}5^\circ$, применяя формулу понижения степени:

$$\sin 22{,}5^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Значит,

$$CD=\frac{8}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{64}{2-\sqrt{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{64(2+\sqrt{2})}{2}}=\sqrt{32(2+\sqrt{2})}.$$

Найдём значение синуса угла CDO:

$$\sin\angle CDO=\sin\left(180^\circ-\left(22{,}5^\circ+30^\circ\right)\right)=$$

$$=\sin 52{,}5^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 105^\circ}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos 75^\circ}{2}}.$$

Посчитаем отдельно $\cos 75^\circ$:

$$\cos 75^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos 150^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Поэтому

$$\sin\angle CDO=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Вычислим искомую площадь треугольника COD:

$$S_{COD}=\frac{1}{2}\sqrt{32(2+\sqrt{2})}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot 8=$$

$$=8\sqrt{2(2+\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{2-\sqrt{3}})}.$$

Ответ: $8\sqrt{2(2+\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{2-\sqrt{3}})}$.

Задача 3. В треугольнике ABC угол BAC равен 60°, угол ABC равен 75°, сторона BC равна 4, а AD – высота. Окружность, касающаяся стороны BC в точке D, пересекает сторону AB в точках P и K. Найти площадь треугольника BKD, если $AP:PB=1:2$ и точка K принадлежит отрезку PB.

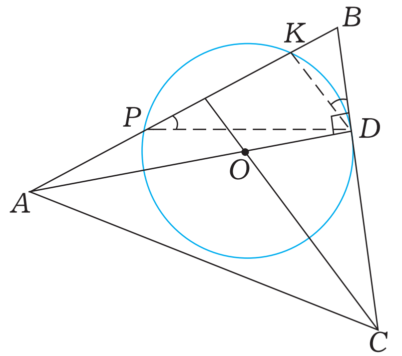

Рис. 5

Решение. Площадь треугольника BKD равна $\dfrac{1}{2}BK\cdot BD\cdot\sin\angle B.$

Поскольку BC – касательная, то центр окружности лежит на перпендикуляре, опущенном к ней, т.е. на высоте AD. По теореме 3 об угле между касательной и хордой $\angle KDB=$ $=\dfrac{1}{2}\angle KOD.$ Кроме того, по теореме о вписанном угле $\angle BPD=\dfrac{1}{2}\angle KOD.$ Поэтому $\angle KDB=\angle BPD.$ А значит, треугольники BPD и BDK подобны по двум углам.

Из определения подобия следует равенство отношений $\dfrac{PB}{DB}=$ $=\dfrac{DB}{BK}$, т.е.

$$BK=\frac{DB^2}{PB}. \qquad (2)$$

Найдём AB из треугольника ABC, используя теорему синусов:

$$\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}.$$

Откуда $AB=\frac{4\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}=4\sqrt{\frac{2}{3}}.$

Пусть $AP=x$, тогда $PB=2x$. Решая уравнение $x+2x=4\sqrt{\frac{2}{3}}$, найдём $x=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Поэтому

$$PB=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}. \qquad (3)$$

Найдём DB из прямоугольного треугольника ABD, используя определение косинуса: $DB=AB\cdot\cos 75^\circ$, т.е.

$$DB=4\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=2\sqrt{\frac{2(2-\sqrt{3})}{3}}. \qquad (4)$$

Подставив (3) и (4) в равенство (2), получим

$$BK=4\cdot\frac{2(2-\sqrt{3})}{3}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot(2-\sqrt{3}).$$

Находим площадь треугольника BKD:

$$S_{BKD}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot(2-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{\frac{2(2-\sqrt{3})}{3}}\times$$
$$\times\sin 75^\circ=(2-\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sin 75^\circ.$$

Учитывая, что $\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, имеем

$$S_{BKD}=(2-\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=$$
$$=\frac{2-\sqrt{3}}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Вопреки неверию

Над дверью своего деревенского дома Нильс Бор прибил подкову, которая, согласно поверью, должна приносить счастье. Увидев подкову, один из посетителей воскликнул:

– Неужели такой великий учёный, как Вы, может верить, что подкова над дверью приносит удачу?

– Нет, – ответил Бор, – конечно, я не верю. Это предрассудок. Но вы знаете, говорят, она приносит удачу даже тем, кто в это не верит.