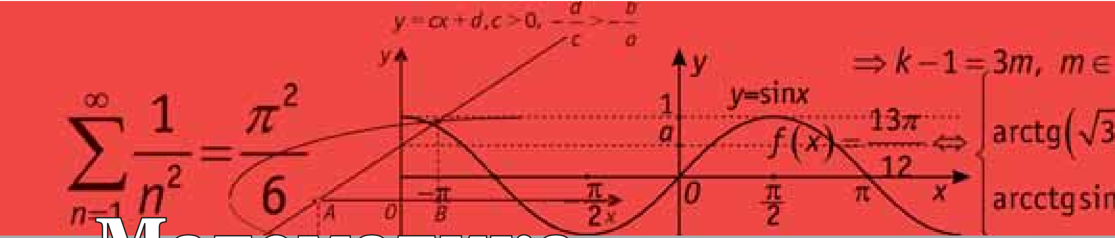
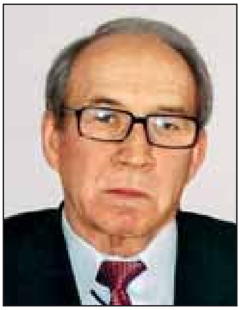
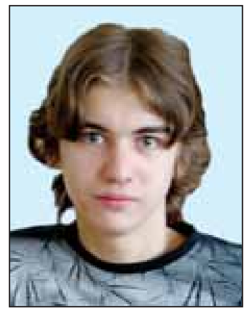




Вавилов Валерий Васильевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и школы имени А.Н. Колмогорова. Заслуженный преподаватель и лауреат Ломоносовской премии МГУ. Автор 21 книги, более 250 статей научного, методического и научно-популярного характера.



Паунов Александр Константинович
Студент I курса механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Теорема о трёх параллелограммах

Медиана AD треугольника ABC делит его на два равновеликих по площади треугольника (рис. 1). Кроме того, отметим, что точка P внутри треугольника ABC принадлежит медиане треугольника (рис. 2) *тогда и только тогда, когда* $[BAP]=[CAP]$; здесь и всюду в дальнейшем $[F]$ обозначает площадь фигуры F. Чтобы в этом убедиться, опустим перпендикуляры CE и BF на прямую AP и обозначим через D точку её пересечения со стороной BC (рис. 2). Тогда, если площади треугольников BAP и CAP, имеющих общее основание AP, равны, то равны и их высоты, опущенные на сторону AP, то есть $CE=BF$. Следовательно, прямоугольные треугольники BFD и CED равны, так как прямые BF и CE параллельны. Итак, $BD=DC$ и AD – медиана треугольника ABC. Обратное утверждение докажите самостоятельно. Более того, мы доказали несколько больше: точка P плоскости принадлежит прямой, содержащей медиану AD треугольника ABC, тогда и только тогда, когда $[BAP]=[CAP]$.

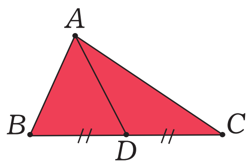


Рис. 1

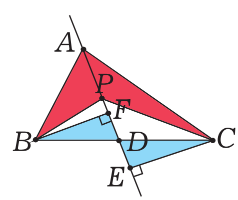


Рис. 2

Рассмотрим теперь параллелограмм и точку P внутри него. Проведём через P прямые KL и MN, параллельные соответственно сторонам AB и AD параллелограмма $ABCD$ (рис. 3). Тогда, если точка P расположена на диагонали AC этого параллелограмма, то $[PMBL] = [PKDN]$.

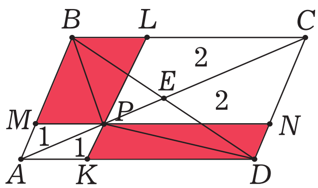


Рис. 3

Это равенство площадей является следствием того, что диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих по площади треугольника, и поэтому треугольники, помеченные на рис. 3 одинаковыми цифрами, равны по площади и, тем самым, $[APD] = [APB]$. По доказанному выше, точка P принадлежит медиане AE треугольника ABD, а поэтому принадлежит и диагонали AC параллелограмма $ABCD$. Верно и обратное утверждение.

Теорема 1. (О мотыльке). Пусть P – точка внутри параллелограмма и через неё проведены прямые, параллельные его сторонам, которые делят его на четыре других параллелограмма. Точка P принадлежит диагонали исходного параллелограмма тогда и только тогда когда равновелики два из четырёх указанных параллелограммов, расположенных по разные стороны от неё (рис. 3).

Необходимое условие нами было уже установлено. Достаточность же условия также легко следует из рис. 4.

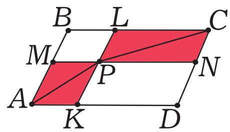


Рис. 4

Он позволяет сразу сделать вывод о том, что если $[PMBL] = [PKDN]$, но точка P не принадлежит диагонали AC параллелограмма $ABCD$, то площади четырёхугольников $PADC$ и $PABC$ равны, так как составлены из треугольников равных площадей. А это возможно лишь тогда, когда точки A, P и C лежат на одной прямой.

Важным дополнением к теореме о мотыльке является следующий классический результат.

Теорема 2. (О трёх параллелограммах). Пусть P – произвольная точка внутри параллелограмма $ABCD$, через которую проведены прямые KL и MN, параллельные сторонам параллелограмма (рис. 5). Тогда прямые DK, BM и CP (диагонали трёх параллелограммов или их продолжений) пересекаются в одной точке.

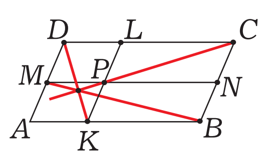


Рис. 5

Доказательство. Обозначим через Q точку пересечения только двух прямых DK и BM и проведём через неё прямые EF и GH, параллельные сторонам параллелограмма $ABCD$ так, как показано на рис. 6 (S и T –

точки пересечения соответствующих прямых).

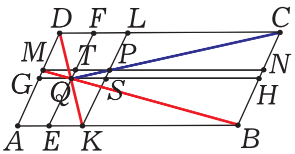


Рис. 6

Так как DK и BM – диагонали параллелограммов $ADLK$ и $AMNB$, то по теореме 1 получаем, что $[AGQE] = [QFLS]$ и $[AGQE] = [QTNH]$, и поэтому $[QFLS] = [QTNH]$. Но параллелограммы $QFLS$ и $QTNH$ содержат общий параллелограмм $QTPS$ (рис. 6) и поэтому $[PTFL] = [PNHS]$. Применяя теперь второй раз теорему 1, замечаем, что точка P расположена на диагонали QC параллелограмма $QFCH$, чем и завершается доказательство теоремы 2.

Замечание 1. Теорема 2, конечно, остаётся справедливой, если мы выбираем три параллелограмма, о которых идёт речь, и другим образом. Например, так, как показано на рис. 6*а*. (А сколько всего различных случаев имеется?) При выборе таких параллелограммов нужно лишь позаботиться о том, чтобы любая пара из них имела ровно одну общую вершину. А это можно обеспечить так: выберем из девяти точек пересечения двух троек параллельных между собой прямых три точки так, чтобы на каждой прямой была выбрана ровно одна точка. Любой выбор такой тройки точек и задаёт те общие вершины у нужных параллелограммов (стороны треугольника, показанные на рис. 6*а*, с вершинами в таких точках, являются другими диагоналями выбираемой тройки параллелограммов, а не тех диагоналей, о которых идёт речь в теореме).

Простым следствием теоремы о трёх параллелограммах является ещё одна классическая теорема.

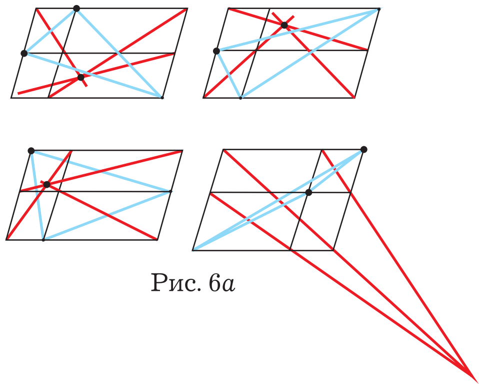


Рис. 6*а*

Теорема 3. (**Прямая Гаусса для четырехугольника**). Если противоположные стороны AB, CD и AD, BC четырёхугольника $ABCD$ пересекаются (при продолжении) в точках X и Y, то середины его диагоналей AC, BD и середина отрезка XY принадлежат одной прямой (рис. 7).

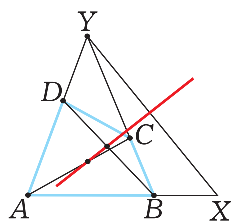


Рис. 7

Доказательство. Заметим, что в формулировке теоремы не сказано, что исходный четырёхугольник является выпуклым. Мы ограничимся

здесь рассмотрением только выпуклого четырёхугольника, оставляя второй случай читателю в качестве упражнения (он сводится к рассмотренному). Пусть M_1, M_2 и M_3 – середины отрезков AC, BD (диагоналей

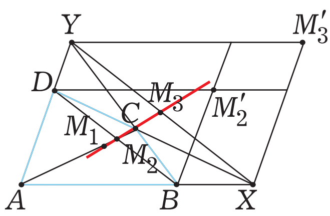


Рис. 8

четырёхугольника $ABCD$) и XY соответственно. Построим параллелограммы $ABM_2'D$ и $AXM_3'Y$ ($BM_2' \parallel AD$, $DM_2' \parallel AB$; $XM_3' \parallel AY$, $YM_3' \parallel AB$).

Рассмотрим теперь преобразование подобия H с центром в точке A и коэффициентом 2. Тогда $\mathrm{H}(M_2) \equiv M_2'$, $\mathrm{H}(M_3) \equiv M_3'$, так как точки M_2 и M_3 являются центрами построенных параллелограммов. Но точки C, M_2', M_3' лежат на одной прямой по теореме о трёх параллелограммах, применённой к параллелограмму $AXM_3'Y$ и точке M_2' внутри него (здесь рассматриваются прямые DX, BY и $M_2'M_3'$). По свойству преобразования подобия прямая переходит в прямую, а точки C, M_2', M_3' лежат на одной прямой, поэтому на одной прямой лежат и точки C, M_2', M_3. Теорема доказана.

Применение теоремы о трёх параллелограммах сильно упрощает, например, решение одной трудной задачи вступительного экзамена на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского университета.

Задача. (ВМиК МГУ-03). Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 3$, $AD = \sqrt{3}+1$ и $\angle BAD = 60^\circ$. На стороне AB взята точка K так, что $AK : KB = 2:1$. Через точку K параллельно AD проведена прямая. На этой прямой внутри параллелограмма выбрана точка L, а на стороне AD точка M так, что $AM = KL$. Прямые BM и CL пересекаются в точке N. Найдите величину угла BKN.

Решение. Из условия задачи вытекает, что $ML \parallel AB$. Пусть P – точка пересечения прямых ML и BC (рис. 9).

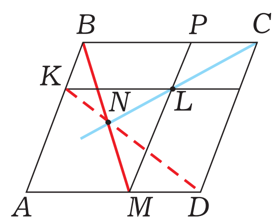


Рис. 9

Точка N, в которой по условию пересекаются прямые BM и CL, принадлежит также и прямой KD. Это следует из теоремы о трёх параллелограммах. Это наблюдение и является самым главным в решении этой задачи.

Рассмотрим теперь треугольник AKD, в котором $AK = 2$. Применяя дважды теорему косинусов, получим:

$$KD^2 = AK^2 + AD^2 -$$
$$-2 \cdot AK \cdot AD \cos\angle KAD =$$
$$= 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1) = 6,\ KD = \sqrt{6},$$
$$\cos\angle AKD = \frac{AK^2 + KD^2 - AD^2}{2 \cdot AK \cdot KD} =$$
$$= \frac{2^2 + (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3}+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Нетрудно показать, что $\angle AKD = \dfrac{5\pi}{12}$ (например, из геометрических соображений; предоставляем это упражнение читателю) и поэтому

$$\angle BKN = \frac{7\pi}{12}.$$

Замечание 2. Отметим, что применение теоремы Менелая также позволяет не только доказать нужное утверждение в рассмотренной задаче, но и другим способом доказать теорему о трёх параллелограммах. В самом деле, в силу упомянутой теоремы для треугольника BMP и секущей CN имеет место равенство

$$\frac{BN}{NM}\cdot\frac{ML}{LP}\cdot\frac{PC}{BC}=1,$$

что равносильно

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BN}{NM}\cdot\frac{MD}{AD}=1.$$

Так как точки K, N, D лежат соответственно на сторонах AB, BM и на продолжении стороны AM треугольника ABM, из полученного равенства и согласно обратной теореме Менелая заключаем, что указанные точки лежат на одной прямой.

Вернёмся к теореме о трёх параллелограммах. В этой теореме речь идёт о том, что три прямые пересекаются в одной точке. Другими словами, она носит «проективный характер». А что понимается под этим?

Представим себе, что рисунок 5 при помощи параллельной проекции мы спроектировали на какую-то другую плоскость (тень рисунка от пучка параллельных лучей). Параллельная проекция прямой есть прямая (если только эта прямая не параллельна направлению проекции) и, кроме того, параллельная проекция сохраняет параллельность прямых. С другой стороны, величины углов параллельная проекция, вообще говоря, не сохраняет. Поэтому, чтобы доказать теорему о трёх параллелограммах, можно решить задачу сначала для прямоугольников. Затем нужно будет только показать, что рисунок из теоремы о трёх параллелограммах можно получить из рисунка для трёх прямоугольников при помощи некоторой параллельной проекции. Попробуйте самостоятельно доказать, что такая процедура всегда возможна.

Кроме параллельной проекции имеется ещё и *центральная проекция* (как при фотографировании), когда пучок параллельных прямых заменяется пучком прямых, проходящих через одну точку («тень» от пучка лучей от точечного источника света). Центральная проекция сохраняет факт о принадлежности трёх точек одной прямой, но, вообще говоря, не сохраняет свойство параллельности прямых. Например, если расположить рис. 5 на одной грани прозрачного параллелепипеда и выбрать центр проекции как показано на рис. 10, то на плоскости, которая содержит основание параллелепипеда, мы получим «тень» рисунка с боковой грани (объясните построение этой «тени»).

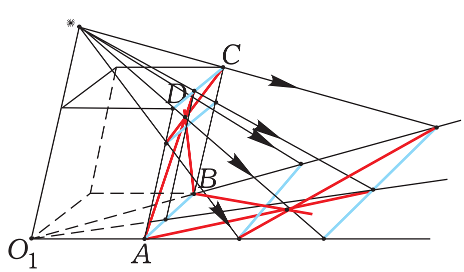


Рис. 10

Наличие такой проекции показывает, что верна такая теорема: *если три прямые, имеющие одну общую точку* O_1, *пересекаются тремя параллельными прямыми (рис. 11), то три выделенные на рисунке прямые пересекаются в одной точке*.

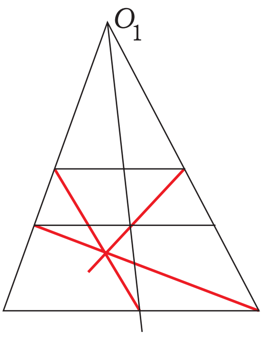


Рис. 11

Поместим теперь рис. 11 на боковую грань параллелепипеда и посмотрим «тень» после аналогичной проекции из уже вновь выбранного центра. Ясно, что на плоскости, содержащей нижнюю грань параллелепипеда, мы получим «тень», похожую на рис. 12.

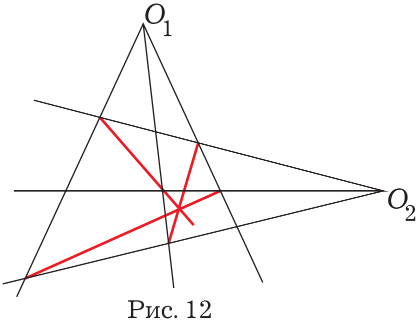


Рис. 12

Мы не будем здесь точно формулировать полученный результат. Отметим лишь, что *перевоплощения параллелограммов после двух центральных проекций привели нас к довольно общей теореме о точках пересечения двух троек прямых (каждая тройка имеет общую точку), где никаких параллельностей нет*.

Мы только чуть-чуть прикоснулись к теоремам проективного характера и лишь слегка приоткрыли «кулинарную книгу геометрических рецептов». Изучение свойств фигур, которые не меняются после конечного числа центральных проекций, – это предмет так называемой проективной геометрии.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Через точку P внутри параллелограмма проведены две прямые a и b, параллельные его сторонам. При этом площадь одной из частей, на которые он разбивается прямой a, равна площади одной из частей, на которые он разбивается прямой b. Найдите все такие точки.

Ответ: две диагонали параллелограмма.

2. Дан параллелограмм $KLMN$, у которого $KL = 6$, $\mathrm{KN} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ и $\angle LKN = 45^\circ$. На стороне KL взята точка A так, что $KA : AL = 1 : 2$. Через точку A параллельно LM проведена прямая, на которой внутри параллелограмма выбрана точка B. На стороне KN взята точка C так, что $KC = AB$. Прямые LC и MB пересекаются в точке D. Найдите величину угла LAD.

Ответ: $5\pi/12$.

Исследовательский проект

1. Три медианы треугольника делят треугольник на шесть равновеликих треугольников. Конечно, верно и обратное утверждение. А вот как его можно усилить?

а) Верно ли, что если три чевианы

треугольника пересекаются в одной точке и делят его на пять (или четыре) равновеликих треугольников, то эти чевианы являются медианами? Другими словами, верно ли, что если, например, $x = y = z = u = v$ (или $x = y = z = u$), то G – точка пересечения медиан треугольника (рис. 13)?

Чевиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с некоторой точкой на его противоположной стороне; важными примерами чевиан являются медианы, биссектрисы и высоты треугольника.

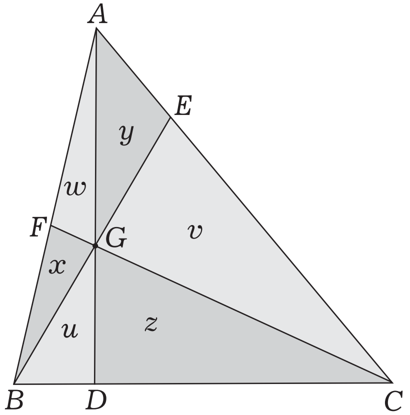


Рис. 13

б) Достаточно ли равенства площадей трёх любых таких треугольников (например, $x = y = z$) для того, чтобы точка G оказалась точкой пересечения медиан треугольника?

в) Равенство площадей каких двух (из шести) рассматриваемых треугольников (рис. 13) позволяют сделать заключение о том, что среди трёх чевиан имеется по крайней мере одна медиана?

2. *Медианой AG* тетраэдра *ABCD* называется отрезок, соединяющий вершину *A* с точкой пересечения медиан *G* (центром тяжести) противоположной ей грани *BCD*.

а) Пусть *P* – точка внутри тетраэдра *ABCD*. Верно ли, что условие о том, что треугольники *ABP*, *ACP*, *ADP* равновелики, является необходимым и достаточным условием того, чтобы точка *P* принадлежала медиане *AG* тетраэдра *ABCD*?

б) Верно ли, что условие о том, что тетраэдры *PABC*, *PACD*, *PABD* равновелики (имеют равные объёмы), является необходимым и достаточным условием того, чтобы точка *P* принадлежала медиане *AG* тетраэдра *ABCD*?

в) Докажите, что четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану тетраэдра в отношении 3:1, считая от вершины.

г) Сформулируйте для тетраэдров различные аналоги вопросов *а*), *б*), *в*) из исследовательской задачи 1 для треугольников и попытайтесь на них ответить.

3. *а*) Через внутреннюю точку *P* параллелепипеда проведены три плоскости, соответственно параллельные его граням. Сформулируйте критерий того, что точка *P* принадлежит одной из диагоналей параллелепипеда и докажите его.

б) Сформулируйте и докажите для параллелепипеда аналог теоремы о трёх параллелограммах.