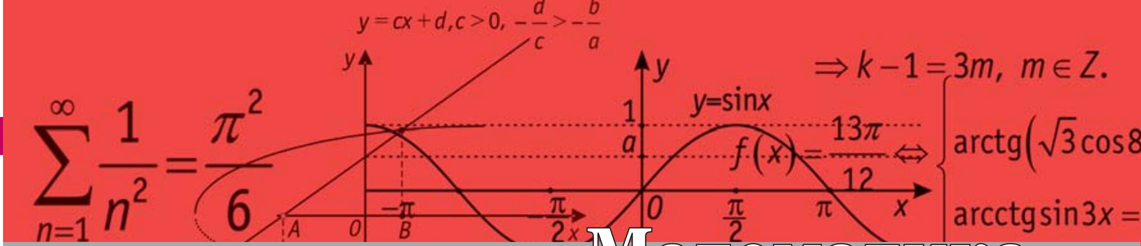

Вавилов Валерий Васильевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и школы имени А.Н. Колмогорова. Заслуженный преподаватель и лауреат Ломоносовской премии МГУ. Автор 23 книг, более 300 статей научного, методического и научно-популярного характера.

Теорема «о бабочках»

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$, пересекающиеся в точке O, делят его на четыре треугольника, причём

$$[AOB]\cdot[COD] = [BOC]\cdot[AOD],$$

где $[F]$ обозначает площадь фигуры F.

В статье рассматриваются некоторые применения этого свойства площадей, которое иногда называют теоремой «о бабочках» для четырёхугольника.

Основные равенства

Теорема 1. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ делят его на четыре треугольника (рис. 1), для площадей которых X, Y, U, V имеют место равенства

$$XY = UV,\quad V = \frac{(V+X)(V+Y)}{X+Y+U+V},$$

$$\frac{X+V}{U+Y} = \frac{OA}{OC},\quad \frac{X+U}{V+Y} = \frac{OB}{OD}.$$

Доказательство. Первое и третье из этих равенств легко следуют из того, что (рис. 1)

$$X = [ABO] = \frac{1}{2}h_1\cdot AO,$$

$$Y = [ODC] = \frac{1}{2}h_2\cdot OC,$$

$$U = [BOC] = \frac{1}{2}h_1\cdot OC,$$

$$V = [DOA] = \frac{1}{2}h_2\cdot AO.$$

Следовательно,

$$XY = \frac{1}{4}\cdot h_1\cdot h_2\cdot AO\cdot OC = UV.$$

Второе равенство просто эквивалентно первому, так как, умножив второе равенство на $X+Y+U+V$ и приведя общие члены, получим первую формулу.

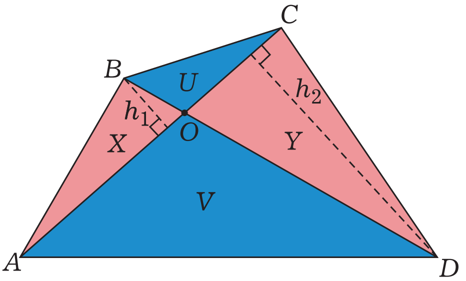

Рис. 1

Чтобы проверить две последние формулы, заметим (рис. 1), что

$$X+V = \frac{1}{2}\cdot(h_1+h_2)\cdot AO,$$

$$Y + U = \frac{1}{2} \cdot (h_1 + h_2) \cdot OC,$$

$$X + U = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot (AO + OC) = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot AC,$$

$$V + Y = \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot (AO + OC) = \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot AC.$$

Отсюда сразу получаем нужные формулы, так как равенство $\frac{h_1}{h_2} = \frac{OB}{OD}$ следует из подобия двух прямоугольных треугольников с гипотенузами OB и OD.

Теорема Рауза

Доказанные выше равенства оказываются иногда очень полезным инструментом при решении задач и доказательствах теорем. Одно из эффектных применений (вторая из доказанных формул) состоит в коротком доказательстве следующей теоремы, установленной английским математиком Д. Раузом в 1896 году (см. [1]).

Теорема Рауза. На сторонах треугольника ABC выбраны точки D, E, F (рис. 2), причём $BD{:}DC = r$, $CE{:}EA = s$, $AF{:}FB = t$. Тогда

$$\frac{[PQR]}{[ABC]} = \frac{(rst-1)^2}{(1+t+tr)(1+r+rs)(1+s+st)}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что

$$[ABC] = 1.$$

Вычислим $[ACQ]$, применив вторую формулу из теоремы, доказанной в п. 1, для четырёхугольника $AFDC$ (рис. 2). Имеем:

$$[ACQ] = \frac{[ACF] \cdot [ACD]}{[ACD] + [ADF]}.$$

Так как

$$[ACF] = \frac{[ACF]}{[ABC]} = \frac{AF}{AB} = \frac{t}{1+t},$$

$$[ACD] = \frac{[ACD]}{[ABC]} = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{1+r},$$

$$[ADB] = \frac{[ADB]}{[ABC]} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{BD+DC} = \frac{1}{1+\frac{DC}{BD}} = \frac{1}{1+\frac{1}{r}} = \frac{r}{1+r},$$

$$[ADF] = [ADB] \cdot \frac{AF}{AB} = [ADB] \cdot \frac{AF}{AF+FB} = \frac{r}{1+r} \cdot \frac{t}{1+t} = \frac{rt}{(1+r)(1+t)},$$ то

$$[ACQ] = \frac{\frac{t}{1+t} \cdot \frac{1}{1+r}}{\frac{1}{1+r} + \frac{rt}{(1+r)(1+t)}} = \frac{t}{1+t+tr}.$$

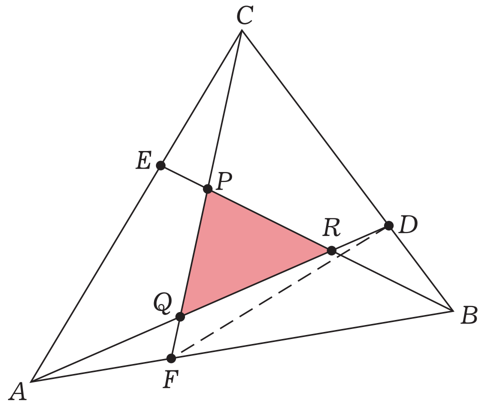

Рис. 2

Аналогично получаем, что

$$[ABR] = \frac{r}{1+r+rs}, \quad [BCP] = \frac{s}{1+s+st}.$$

Тогда, проводя простые алгебраические вычисления (которые мы оставляем читателю), получим:

$$[PQR] = 1 - [ACQ] - [ABR] - [BCP] = \frac{(rst-1)^2}{(1+t+tr)(1+r+rs)(1+s+st)}.$$

Замечание. 1) Формула Рауза имеет различные доказательства. Например, другое доказательство намечено в статье Т.Н. Епифановой «Пропорциональные отрезки в треугольнике» («Потенциал», №7, 2010).

В частном случае, когда $r = t = s$ (см., например, [1] и [2], где имеется очень красивый и неожиданно простой вывод формулы при $r = t = s = 1/2$), получаем, что

$$[PQR] = \frac{(r^3-1)^2}{1+r+r^2} = \frac{\left((r-1)(1+r+r^2)\right)^2}{(1+r+r^2)^3} = \frac{(r-1)^2}{1+r+r^2}.$$

2) Отметим, что из полученной формулы следует прямое утверждение в теореме Чевы: *если три чевианы AD, BE и CF пересекаются в одной точке, то $rst = 1$.*

Поэтому доказательство формулы Рауза по существу является одним из возможных доказательств и теоремы Чевы.

Пропорциональные отрезки в четырёхугольнике

Пусть на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана (рис. 3) точка L такая, что

$$BL{:}BC = p.$$

Покажем сначала, что

$$[ADL] = p[ADC] + (1-p)\,[ADB]. \qquad (*)$$

Рассмотрим высоты трёх треугольников, фигурирующих в этом равенстве, проведённых к их общему основанию AD. Эти три высоты BB_1, LL_1, CC_1 параллельны между собой (рис. 3).

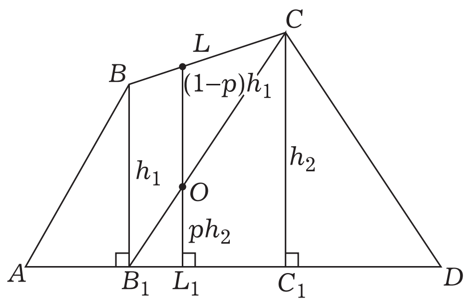

Рис. 3

Из подобия треугольников B_1L_1O и B_1C_1C следует, что $OL_1 = pCC_1$ (мы применили здесь также теорему Фалеса: $BL : BC = B_1L_1 : B_1C_1 = p$).

Аналогично, из подобия треугольников CLO и CBB_1 заключаем, что $OL = (1-p)BB_1$. Так как $LL_1 = OL + OL_1$, то $LL_1 = pCC_1 + (1-p)BB_1$. Это соотношение для высот треугольников с общим основанием и доказывает нужную формулу (*).

При помощи формулы (*) легко решается следующая задача.

Задача. На сторонах BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбраны (рис. 4) точки L и N так, что $DN{:}DA = BL{:}BC = p$. Доказать, что

$$[PLQN] = [ABP] + [DCQ].$$

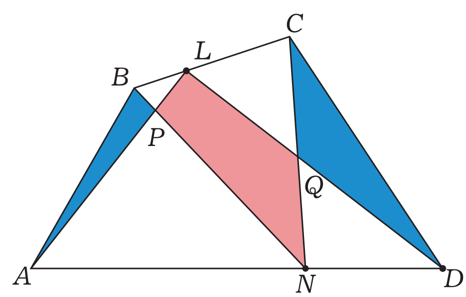

Рис. 4

Так как

$$[NDC] = p\,[ADC] \text{ и } [ABN] = (1-p)[ADB],$$

то из доказанного следует, что

$$[ADL] = [NDC] + [ABN].$$

Тогда

$$[PLQN] = [ADL] - [ANP] - [NDQ] = [NDC] + [ABN] - ([ABN] - [ABP]) - ([NDC] - [DCQ]) = [ABP] + [DCQ].$$

Теорема (о пропорциональных отрезках). На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбраны такие точки K, L, M, N, что (рис. 5)

$AN : AD = BL : BC = p$ и $AK : AB = DM : DC = q$.

Доказать, что

$$OK : OM = p : (1 - p),$$
$$ON : OL = q : (1 - q).$$

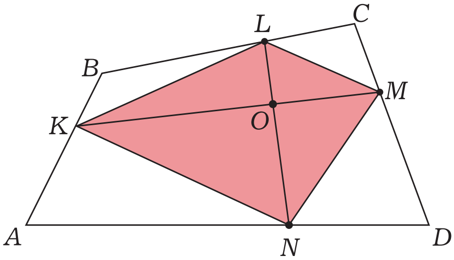

Рис. 5

Доказательство. Используя третью формулу из теоремы 1, заключаем, что

$$\frac{OK}{OM} = \frac{[LKN]}{[LMN]}.$$

С другой стороны,

$$\frac{[LBN]}{[LCN]} = \frac{p}{p-1} \text{ и } \frac{[LAN]}{[LDN]} = \frac{p}{p-1},$$

так как треугольники, площади которых сравниваются, имеют равные высоты.

Из формулы (*) заключаем, что

$$[LKN] = q\,[LBN] + (1 - q)[LAN].$$

Из последних трёх равенств следует, что

$$[LKN] = q\frac{p}{p-1}[LCN] + (1-q)\frac{p}{p-1}[LDN] =$$
$$= \frac{p}{p-1}(q[LCN] + (1-q)[LDN]).$$

Так как $DM : DC = q$, то выражение в скобках равно $[LNM]$. Поэтому

$$[LKN] = \frac{p}{1-p}[LNM],$$

и, тем самым, $OK : OM = p : (1 - p)$. Аналогично доказывается и второе соотношение.

Замечание. Теорема о пропорциональных отрезках может быть доказана также и другими способами (см., например, [3]). Однако «угадать» указанное в задаче свойство можно достаточно просто, так как если ответ в задаче имеется, то он должен быть таким же и для квадрата $ABCD$, а для квадрата нужное утверждение легко проверяется.

Одним из следствий теоремы о пропорциональных отрезках является следующая важная теорема (ей и приложениям этой теоремы посвящена отдельная статья автора в журнале «Потенциал», №9, 2010), доказанная французским механиком и инженером Пьером Вариньоном (1654 – 1722).

Теорема Вариньона. Четырёхугольник, образованный путём последовательного соединения середин сторон выпуклого четырёхугольника, является параллелограммом (рис. 6) и, кроме того,

$$[KLMN] = \frac{1}{2}[ABCD],$$
$$[OKAN] + [OLCM] = [OLBK] + [ONDM].$$

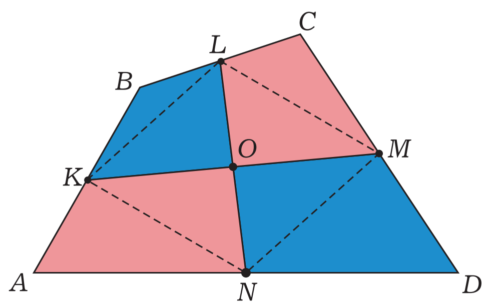

Рис. 6

Доказательство. 1) По доказанной теореме точка O делит каждую из диагоналей четырёхугольника $KLMN$ на равные части, и поэтому этот четырёхугольник есть параллелограмм.

2) Так как KL является средней линией (рис. 6) треугольника ABC, то $KL \parallel AC$. По тем же причинам $NM \parallel AC$. Следовательно, $KL \parallel NM$ и $KL = NM = AC/2$.

Средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, площадь которого в четыре раза меньше площади исходного треугольника.

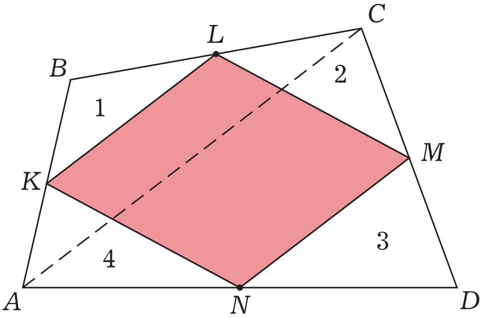

Рис. 7

Поэтому сумма площадей первого и третьего треугольников (рис. 7) равна четверти площади всего четырёхугольника. То же и относительно суммы площадей второго и четвёртого треугольников. Поэтому площадь параллелограмма $KLMN$ составляет половину площади четырёхугольника $ABCD$.

3) Опять воспользуемся свойством средней линии треугольника. Получаем:

$$[BKL] + [DNM] = ([BAC] + [DAC])/4 = [ABCD]/4 = ([ABD] + [CBD])/4 = [AKN] + [CLM].$$

Так как диагонали делят параллелограмм на четыре равновеликих треугольника, то требуемое следует из доказанного выше равенства.

Косоугольная шахматная доска

Пусть каждая из двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника площади 1 разделены на n равных частей, а другие две противоположные стороны – на m равных частей (m, $n \geq 2$ – натуральные числа). Затем точки на противоположных сторонах соединены так, чтобы получилась «косоугольная шахматная доска» (рис. 8; $m = 7$, $n = 5$).

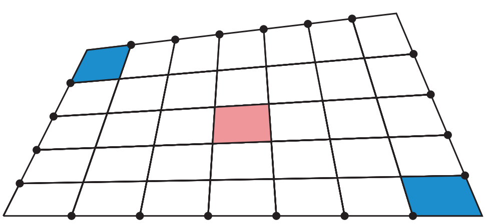
Рис. 8

Из теоремы о пропорциональных отрезках легко следует, что точки пересечения отрезков на этой «шахматной доске» делят каждый из них на равные части (на разных линиях они, возможно, разные по длине).

Покажем теперь, что в каждой «строке» (и в каждом «столбце») площади «клеток» (маленьких четырёхугольников) образуют арифметические прогрессии.

Для этого достаточно показать, что если противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ разделены на три равные части и точки деления попарно соединены (рис. 9), то

$$[EGHF] = \frac{1}{2}([ABGE] + [FHCD]).$$

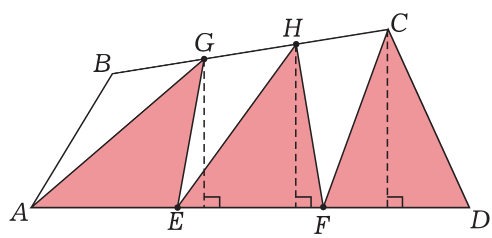

Рис. 9

Чтобы в этом убедиться, нужно проверить (почему?), что (рис. 9)

$$2\,[EHF] = [AGE] + [FCD].$$

А это равенство есть следствие того, что основания AE, EF, FD всех трёх треугольников равны, а высота треугольника EHF является средней линией трапеции с основаниями, равными высотам треугольников AGE и FCD.

Итак, в каждой горизонтальной (вертикальной) полоске «доски» площади её клеток образуют арифметические прогрессии.

Заметим, что разности всех этих прогрессий «по строкам» («по столбцам») одинаковы. Это следует из того, что, рассмотрев по два левых четырёхугольника в первых двух полосках и применив для соответствующего четырёхугольника второе равенство из теоремы Вариньона (рис. 6), имеем: разность двух соседних площадей в первой полоске равна разности соседних площадей во второй полоске. А это и означает, что разности этих двух арифметических прогрессий равны. Рассуждая так же и дальше для 2-й и 3-й, 3-й и 4-й и т. д. пар полосок, и получаем то, что утверждалось.

Проведённый анализ позволяет сделать три вывода.

1) Самая маленькая и самая большая (по площади) «клетки» находятся в противоположных углах «доски».

2) Для того чтобы вычислить площади всех «клеток», достаточно задать площади только трёх «клеток».

3) Если оба числа n, m являются нечётными числами, то для того, чтобы вычислить площади всех «клеток», достаточно задать площади только двух «клеток».

Докажем эти три вывода.

1) Заметим, что если a – это площадь левой верхней «клетки», то площади всех «клеток» занимают соответствующее место в таблице чисел (здесь r – разность прогрессий по строкам, s – разность прогрессий по столбцам):

$$\begin{array}{ccccc}
a & a+r & a+2r & \dots & a+(m-1)r \\
a+s & a+s+r & a+s+2r & \dots & a+s+(m-1)r \\
a+2s & a+2s+r & a+2s+2r & \dots & a+2s+(m-1)r \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a+(n-1)s & a+(n-1)s+r & a+(n-1)s+2r & \dots & a+(n-1)s+(m-1)r
\end{array}$$

Пусть, например, $r \geq 0$, $s \geq 0$. Тогда в каждой строке таблицы наибольшее число стоит в конце строки. Наибольшее же значение чисел арифметической прогрессии в последнем столбце при $s \geq 0$ равно $a + (n-1)s + (m-1)r$. Итак, в рассматриваемом случае «клетки» наименьшей и наибольшей площадей расположены в левом верхнем и правом нижнем углах «косоугольной шахматной доски». Аналогично разбирается случай $r \leq 0$, $s \geq 0$. Другие возможные случаи ($r \leq 0$, $s \leq 0$; $r \geq 0$, $s \leq 0$) аналогичны и получаются заменами строк таблицы её столбцами.

2) Достаточно задать, например, площади трёх угловых клеток, то есть числа a, $a + (m-1)r = A$, $a + (n-1)s = B$. Тогда из двух последних уравнений легко вычислить числа r и s, а вместе с ними и все числа из таблицы.

3) Если оба числа n, m нечётны, то таблица имеет средние горизонтальную и вертикальную полосы и тем самым имеет центральную клетку (рис. 8).

По доказанному (см. рис. 9) средняя горизонтальная «полоса» равна среднему арифметическому площадей всех «полос», то есть равна $1/n$

(площадь всей «доски» равна 1). Центральная «клетка доски» находится в середине этой горизонтальной «полосы» и по тем же причинам её площадь равна $1/m$ площади этой «полосы». Таким образом, площадь центральной «клетки» равна $1/nm$. Поэтому для нахождения площадей всех «клеток» достаточно задать, например, площади двух угловых клеток a, $a + (m - 1)r = A$. Отсюда мы находим разность r всех арифметических прогрессий в строках таблицы, а из уравнения

$$a + \frac{n-1}{2}s + \frac{m-1}{2}r = \frac{1}{nm}$$

находим разность s всех арифметических прогрессий в столбцах таблицы.

Литература

1. *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп. – М.: Наука, 1981.

2. *Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л.* Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.

3. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. Т. 1. – М.: Наука, 1995.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Встречаются два профессора математики. Первый, вздыхая:

– Коллега, а ведь меня опять обокрали!

Второй:

– Представьте себе, коллега, я раз и навсегда решил эту проблему!

– Хм... интересно было бы узнать, как?

– Я использовал теорию вероятностей и поставил на свою дверь шесть самых дешёвых китайских замков!

– Ну и при чём тут теория вероятностей, если их все можно открыть одним ключом?!

– Не скажите, коллега! Когда я выхожу из дома, я три замка закрываю, а три – нет!..

***

Ректор университета просмотрел смету, которую ему принёс декан физфака, и, вздохнув, сказал:

– Почему это физики всегда требуют такое дорогое оборудование? Вот, например, математики просят лишь деньги на бумагу, карандаши и ластики.

И, подумав, добавил:

– А философы – те ещё лучше. Им даже ластики не нужны.